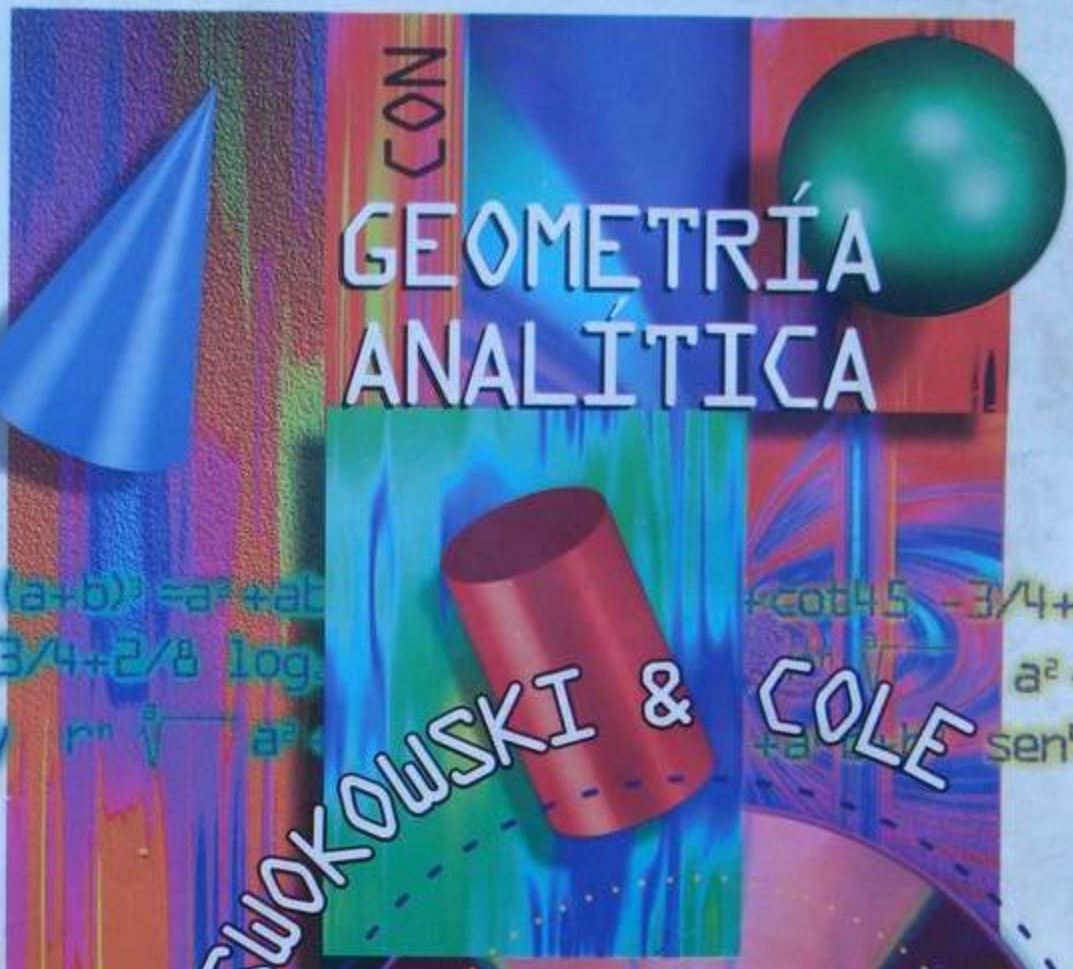
ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

CON

GEOMETRÍA ANALÍTICA



SWOKOWSKI & COLE

NOVENA EDICIÓN

MATEMÁTICAS
INTERNATIONAL THOMSON

www.elsolucionario.net

Find your solutions manual here!

El Solucionario
www.elsolucionario.net

Subscribe RSS | Find on Facebook | Follow my Tweets

Encuentra en nuestra página los Textos Universitarios que necesitas!

Libros y Solucionarios en formato digital
El complemento ideal para estar preparados para los exámenes!

Los Solucionarios contienen TODOS los problemas del libro resueltos y explicados paso a paso de forma clara..

Visitanos para descargarlos GRATIS!
Descargas directas mucho más fáciles...

WWW.ELSOLUCIONARIO.NET

Biology
Investigación Operativa
Computer Science
Matemáticas Avanzadas
Physics
Estadística
Chemistry
Geometría
Math
Termodinámica
Cálculo
Electrónica
Circuitos
Business
Mechanical Engineering
Civil Engineering
Economía
Análisis Numérico
Ecuaciones Diferenciales
Electrical Engineering
Álgebra
Electromagnetismo

Find your solutions manual here!

www.elsolucionario.net

Álgebra y trigonometría
con geometría analítica

www.elsolucionario.net

A la memoria de Earl W. Swokowski

www.elsolucionario.net

NOVENA EDICIÓN

Álgebra y trigonometría con geometría analítica

Earl W. Swokowski

Jeffery A. Cole
Anoka-Ramsey Community College

International Thomson Editores
an International Thomson Publishing Company I(T)P

México ■ *Albany* ■ *Bonn* ■ *Boston* ■ *Cincinnati* ■ *Detroit* ■ *Johannesburgo* ■ *Londres* ■ *Madrid* ■ *Melbourne* ■ *New York*
Paris ■ *San Francisco* ■ *San Juan, PR* ■ *Santiago* ■ *São Paulo* ■ *Singapore* ■ *Tokio* ■ *Toronto* ■ *Washington*

www.elsolucionario.net

Traducción del libro: *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, 9th edition,* publicado en inglés por Brooks Cole Publishing.
© 1997 *Brooks Cole Publishing, an ITP Company* ISBN 0-534-95308-5

Álgebra y trigonometría con geometría analítica
ISBN 968-7529-26-1
Derechos reservados respecto a la edición en español.
© 1998 por International Thomson Editores, S. A. de C. V.
ITP International Thomson Editores, S. A. de C. V. es una empresa de *International Thomson Publishing*. La marca registrada ITP se usa bajo licencia.

México y América Central
Séneca 53, Colonia Polanco
México, D. F. 11560
Tel. (525) 281-2906
Fax (525) 281-2656
clientes@mail.internet.com.mx
MÉXICO

El Caribe
Tel. (787) 758-7580
Fax (787) 758-7573
102154.1127@compuserve.com
Hato Rey, PUERTO RICO

América del Sur
Tel. (54-11)4325-2236
Fax (54-11)4328-1829
sdeluque@ba.net
Buenos Aires, ARGENTINA

España
Tel. (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
itesparaninfo.pedidos@mad.servicom.es
Madrid, ESPAÑA

Traducción
Jorge Humberto Muñoz
Traductor profesional

Revisión técnica
Víctor Garza Joa
ITESM Campus Estado de México

Adolfo Arredondo Michel
ITESM Campus Monterrey

Director editorial y de producción: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor de producción: René Garay Argueta
Coordinación editorial: Abelardo Rojas Flores
Tipografía: Ricardo Viesca Muriel
Diseño de portada: Estrategia Visual

9875432106 9VII9

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónica o mecánica, incluyendo el fotocopiado, el almacenamiento en algún sistema de recuperación de información, o el grabado, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

All rights reserved. No part of this work covered by the copyright hereon may be reproduced or used in any form or by any means —graphic, electronic, or mechanical, including photocopying, recording, taping or information storage and retrieval systems— without the written permission of the publisher.

Impreso en México
Printed in Mexico

www.elsolucionario.net

La novena edición de *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* supera a la octava en tres importantes formas. Primero, se volvieron a redactar los análisis con objeto de que el estudiante entienda con más facilidad los conceptos matemáticos que se presentan. Segundo, se añadieron ejercicios que requieren que el alumno estime, calcule e interprete un resultado, escriba un resumen, elabore un modelo, explore o encuentre una generalización. Tercero, se incorporó en buena parte el manejo de una calculadora graficadora a través de ejemplos, ejercicios y un apéndice de referencias cruzadas enfocado en el uso de la TI-82/83. Estos cambios se integraron sin sacrificar la profundidad de los conceptos matemáticos que ha sido clave para el éxito de este texto.

Dicho apéndice ofrece una excelente oportunidad para que profesores y alumnos se familiaricen con el uso de una calculadora graficadora trabajando en ejemplos y ejercicios (algunos en el texto principal y otros elaborados especialmente para el apéndice). El material para dicha calculadora es lo suficientemente versátil para cubrir las necesidades de cualquier docente, desde aquel que la emplea en forma opcional hasta aquel que la utiliza en cada tarea.

Los principales cambios realizados a cada capítulo se pormenorizan en seguida. Para el lector ajeno a las ediciones previas, hemos preparado una lista de características generales después de la lista de cambios.

CAMBIOS A ESTA EDICIÓN

Capítulo 1 Como novedad en esta edición, se hace énfasis en los ejercicios en que el estudiante ha de generar y examinar una tabla de valores como ayuda en la solución de problemas en que debe interpretar algunos aspectos de una tabla de valores dada. Ahora bien, los profesores que no quieran considerar este material, pueden empezar a partir de la sección 3.2 (donde aparecen por primera vez los ejercicios con calculadora graficadora).

Capítulo 2 En este capítulo aparecen por primera vez problemas adicionales de modelado. Las ecuaciones y desigualdades se resuelven algebraica y numéricamente; en capítulos posteriores se resuelven por métodos gráficos.

Capítulo 3 En la sección 3.4 se hace gran hincapié en el cociente de diferencias y las funciones lineales. En la sección 3.5 las gráficas mejoradas relativas al trazo vertical y horizontal, cuentan con color pedagógico y están diseñadas para ayudar a que el estudiante comprenda realmente los temas. Asimismo, se incluyeron más ejercicios de modelado.

www.elsolucionario.net

Capítulo 4 Cierta información específica relaciona la división de funciones polinomiales, un punto en su gráfica y su valor funcional para cierto valor de entrada. Cuenta con nuevos ejercicios y ejemplos relacionados con la calculadora graficadora . En la sección 4.6 las tablas que contienen ecuaciones y gráficas de las parábolas resumen la relación entre vértice, foco y directriz. También se añadió la graficación de medias parábolas, medias elipses y segmentos de hipérbolas, la cual cuenta con ejercicios referentes a las propiedades de paraboloides y elipsoides. La aplicación de la traslación de fórmulas de ejes fue sustituida con más referencias lógicas a las traslaciones generales del capítulo 3.

Capítulo 5 Se incluyó una fórmula para las leyes del crecimiento y decaimiento (o decrecimiento) y se sigue un enfoque más intuitivo para el tiempo de duplicación de una función exponencial. Además, se añadieron problemas y ejercicios de modelado que comprenden tablas.

Capítulo 6 Se puso mayor atención en los ejercicios que comprenden aproximaciones gráficas a las soluciones. Mediante el énfasis en el uso del método inverso para la solución de un sistema de ecuaciones, el texto permite que los estudiantes aprovechen la rapidez y precisión de las calculadoras graficadoras actuales.

Capítulo 7 Las funciones trigonométricas se definen ahora tanto en términos de un círculo unitario como de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. El tema del movimiento armónico (antes sección 7.8) se incluye en la sección 7.7, problemas de aplicación (antes sección 7.3). Problemas adicionales sobre el modelado de onda senoidal ayudarán al estudiante a relacionar datos realistas con una de las funciones matemáticas más importantes.

Capítulo 8 En la sección 8.6 se hace énfasis en la relación entre las funciones trigonométricas inversas y la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario. La presentación de otras alternativas de solución a los ejemplos, le darán al estudiante una perspectiva más amplia para la resolución de problemas utilizando diversos métodos.

Capítulo 9 Se incluyeron interpretaciones geométricas adicionales de los resultados derivados de las operaciones con números complejos. Mediante ejercicios de aplicación nuevos se subraya la importancia que tienen los números complejos en el estudio de los circuitos eléctricos.

Capítulo 10 Se puso mayor atención al tema de las sucesiones definidas recursivamente; de igual manera, se analiza la generación de este tipo de sucesiones en una computadora. En la sección 10.8 se incluyeron los temas de valor esperado, eventos mutuamente exclusivos y eventos independientes.

Capítulo 11 La aplicación de las fórmulas de traslación de ejes se reemplazó con más referencias lógicas a las traslaciones generales estudiadas en el capítulo 3. Ahora, las curvas planas y las ecuaciones paramétricas anteceden a las ecuaciones polares. En la sección 11.2 se incluyeron cuadros nuevos que ayudarán al estudiante a entender mejor la relación entre r y θ.

Apéndices Los apéndices de la octava edición, Uso de tablas logarítmicas y Tablas, fueron reemplazados con tres apartados de suma utilidad, los cuales proporcionan ayuda técnica y sirven de valiosa referencia:

El apéndice I, Uso de una calculadora graficadora TI-82/83, ofrece secuencias de tecleo específicas para dicho dispositivo. Buena parte de los ejemplos de este apéndice son ejemplos o ejercicios del texto principal. El lector puede utilizar con facilidad esta sección en dos formas: antes de estudiar los capítulos o como un apoyo de referencia cruzada del texto. Si los estudiantes carecen de experiencia con una calculadora graficadora, ambas opciones son recomendables.

El apéndice II, Gráficas comunes y sus ecuaciones, es un resumen gráfico de las gráficas y ecuaciones que el estudiante suele encontrar en las matemáticas precálculo.

www.elsolucionario.net

El apéndice III, Resumen de transformaciones gráficas, ofrece una sinopsis ilustrativa de las transformaciones básicas consideradas en el texto: desplazamiento, alargamiento, compresión y reflexión.

Por último, en la edición en español hemos incorporado los apéndices IV y V y VI. El primero contiene la información de la segunda y tercera de forros del original, referente a fórmulas y ecuaciones. El segundo presenta las gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas, y el tercero es un material desprendible, a manera de tarjeta de referencia rápida.

CARACTERÍSTICAS

Ilustraciones Son breves demostraciones del uso de definiciones, leyes y teoremas.

Tablas Ofrecen fácil acceso a resúmenes de propiedades, leyes, gráficas, relaciones y definiciones. A menudo contienen ejemplos sencillos de los conceptos que presentan.

Ejemplos Titulados para una referencia rápida, todos los ejemplos proporcionan soluciones minuciosas de problemas similares a los que están en las secciones de ejercicios. Muchos incluyen gráficas y tablas para ayudar a entender procedimientos y soluciones.

Explicaciones paso a paso A fin de ayudar al estudiante a seguir la solución de diversos ejemplos con más facilidad, se les ha dotado de explicaciones detalladas, paso por paso.

Ejercicios de análisis Ahora, cada capítulo termina con diversos ejercicios disponibles para la discusión en pequeños grupos, los cuales van de fáciles a difíciles y de teóricos a aplicados.

Comprobaciones Las soluciones de varios ejercicios se comprueban explícitamente, con objeto de recordar al alumno que revise si sus respuestas satisfacen las condiciones de los problemas.

Ejemplos con calculadora graficadora Cada que se consideró apropiado, se añadieron ejemplos que requieren el uso de este dispositivo. Se identifican con el icono que aparece a la izquierda y se ilustran con una imagen reproducida de la pantalla de la calculadora.

Ejercicios con calculadora graficadora En las secciones apropiadas se incluyen ejercicios especialmente diseñados para resolverlos mediante este aparato que pueden reconocerse mediante el icono de la izquierda.

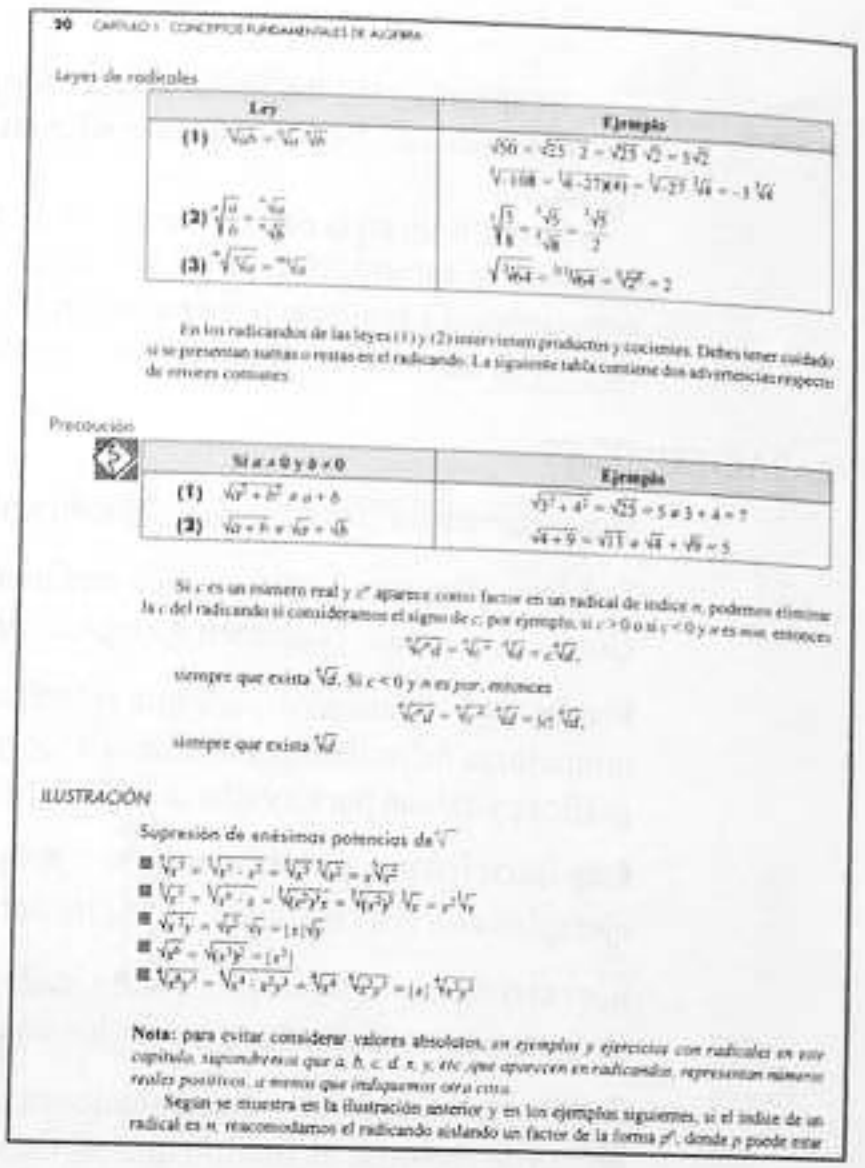
Aplicaciones Con objeto de incrementar el interés de los estudiantes y ayudarlos a relacionarse con ejercicios referentes a situaciones de la vida real, los ejercicios aplicados tienen título. Nuevas aplicaciones se relacionan con diversos temas como el grado de congelamiento en las nubes, cantidad de homicidios por disparo con arma de fuego, el costo y duración de un supertazón, la cantidad de beneficiarios de programas médicos, el efecto de la capa de ozono en el cáncer de piel y la relación entre los niveles de colesterol y las cardiopatías. La lista de aplicaciones al final del libro muestra la amplia gama de situaciones. Muchos profesores han comentado que estas aplicaciones constituyen una de las características más importantes de la obra.

Ejercicios Las secciones de ejercicios comienzan con problemas simples y progresan gradualmente hasta presentar situaciones mas difíciles. Muchos ejercicios que contienen gráficas y datos tabulares figuran por primera vez en esta edición. También hay nuevos problemas para los cuales el alumno ha de hallar un modelo matemático para los datos dados. Los problemas aplicados suelen hallarse al final de un conjunto de ejercicios. Asimismo, a fin de que el estudiante gane confianza al trabajar con nuevas ideas, manejarán problemas que requieren un análisis y síntesis más detallados de tales conceptos. Por último, los ejercicios de análisis al final de cada capítulo pueden servir para preparar exámenes.

www.elsolucionario.net

A lo largo de todo el texto se encuentran señales de advertencia para alertar al estudiante acerca de errores comunes

Las secciones de ilustración proporcionan breves demostraciones de definiciones, leyes y teoremas



30 CAPÍTULO 1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA

Leyes de radicales

Ley	Ejemplo
(1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt{-108} = \sqrt{4 \cdot 27}(-1) = \sqrt{-27}\sqrt{4} = -3\sqrt{4}$
(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

En los radicandos de las leyes (1) y (2) intervienen productos y cocientes. Debes tener cuidado si se presentan sumas o restas en el radicando. La siguiente tabla contiene dos advertencias respecto de errores comunes.

Precaución

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	Ejemplo
(1) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
(2) $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Si c es un número real y c^n aparece como factor en un radical de índice n, podemos eliminar la c del radicando si consideramos el signo de c; por ejemplo, si $c > 0$ o si $c < 0$ y n es impar, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt{c^n}\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$. Si $c < 0$ y n es par, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt{c^n}\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$.

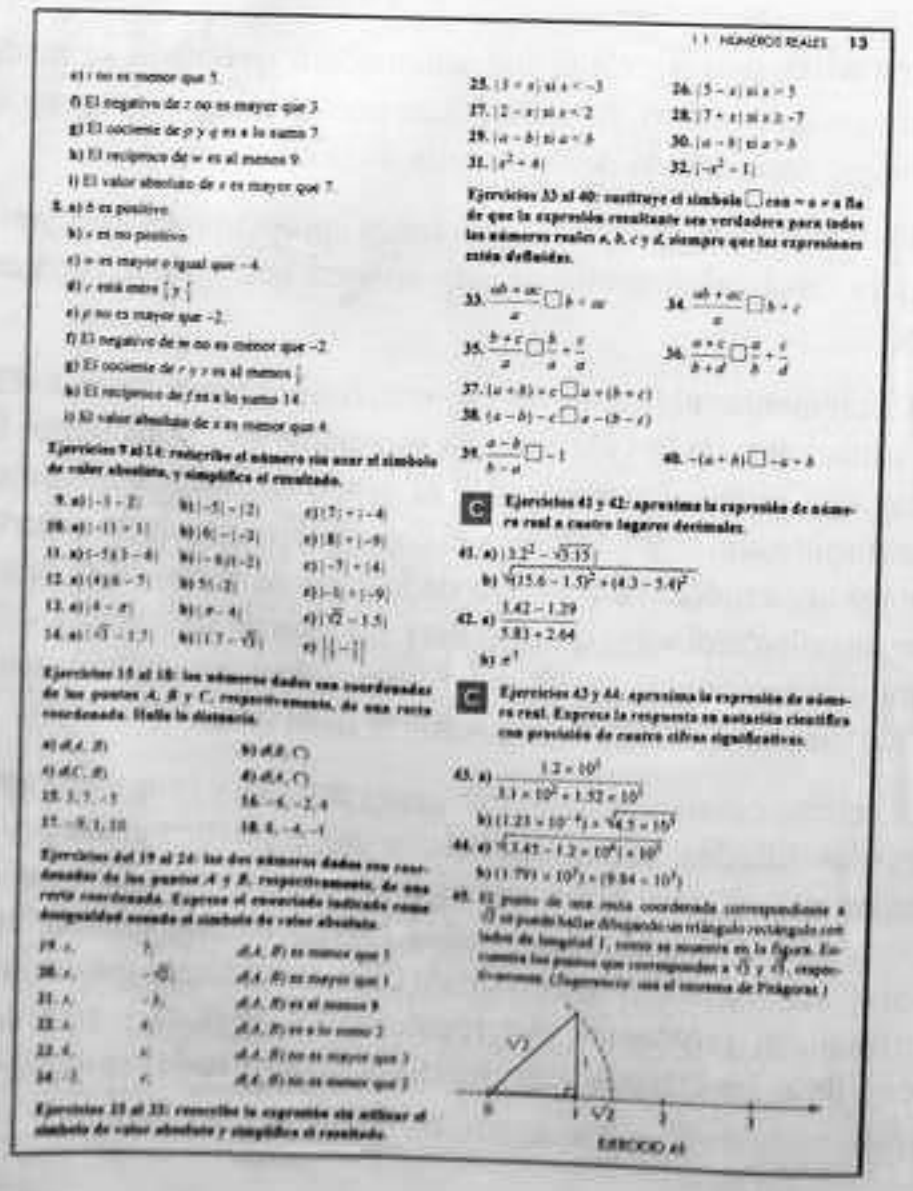
ILUSTRACIÓN

Supresión de enésimas potencias de $\sqrt{\ }$

- $\sqrt{x^2} = \sqrt{x^1 \cdot x^1} = \sqrt{x^1}\sqrt{x^1} = x\sqrt{x^0}$
- $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{(x^2)^1 x} = \sqrt{(x^2)^1}\sqrt{x} = x^1\sqrt{x}$
- $\sqrt{x^7 y} = \sqrt{x^6 \cdot x y} = |x^3|\sqrt{xy}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[3]{x^4 y^3} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x y^3} = \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x y^3} = |x|\sqrt[3]{x y^3}$

Nota: para evitar considerar valores absolutos, *en ejemplos y ejercicios con radicales en este capítulo, supondremos que a, b, c, d, x, y, etc. que aparecen en radicandos, representan números reales positivos, a menos que indiquemos otra cosa.*

Según se muestra en la ilustración anterior y en los ejemplos siguientes, si el índice de un radical es n, reacomodamos el radicando aislando un factor de la forma p^n, donde p puede estar



1.1 NÚMEROS REALES 13

e) t no es menor que 5.
f) El negativo de z no es mayor que 3.
g) El cociente de p y q es a lo sumo 7.
h) El recíproco de w es al menos 9.
i) El valor absoluto de x es mayor que 7.

2. a) b es positivo.
b) x es no positivo.
c) n es mayor o igual que -4.
d) r está entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
e) p no es mayor que -2.
f) El negativo de w no es menor que -2.
g) El cociente de r y s es al menos $\frac{1}{2}$.
h) El recíproco de f es a lo sumo 14.
i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejercicios 9 al 14: reescribe el número sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifica el resultado.

9. a) $\lvert -3 - 2\rvert$	b) $\lvert -5\rvert - \lvert 2\rvert$	c) $\lvert 7\rvert \div \lvert -4\rvert$
10. a) $\lvert -1\rvert + 1$	b) $\lvert 6\rvert - \lvert -3\rvert$	c) $\lvert 8\rvert \div \lvert -9\rvert$
11. a) $\lvert -5\rvert(3 - 4)$	b) $\lvert -8\rvert(1 - 2)$	c) $\lvert -7\rvert \div \lvert 4\rvert$
12. a) $(4)\lvert 6 - 7\rvert$	b) $5\lvert -2\rvert$	d) $\lvert -5\rvert \div \lvert -9\rvert$
13. a) $\lvert 4 - \pi\rvert$	b) $\lvert \pi - 4\rvert$	e) $\lvert\sqrt{2} - 1.5\rvert$
14. a) $\lvert -\sqrt{3} - 1.7\rvert$	b) $\lvert 1.7 - \sqrt{3}\rvert$	f) $\left\lvert\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right\rvert$

Ejercicios 15 al 18: los números dados son coordenadas de los puntos A, B y C, respectivamente, de una recta coordenada. Halle la distancia.

a) $d(A, B)$	b) $d(B, C)$
c) $d(C, B)$	d) $d(A, C)$
15. 3, 7, -1	**16.** -6, -2, 4
17. -9, 1, 10	**18.** 8, -4, -1

Ejercicios del 19 al 24: los dos números dados son coordenadas de los puntos A y B, respectivamente, de una recta coordenada. Exprese el enunciado indicado como desigualdad usando el símbolo de valor absoluto.

19. x,	$\frac{1}{2}$,	$d(A, B)$ es menor que 1
20. x,	$-\sqrt{2}$,	$d(A, B)$ es mayor que 1
21. x,	$-b$,	$d(A, B)$ es al menos 9
22. x,	4,	$d(A, B)$ es a lo sumo 2
23. x,	x,	$d(A, B)$ no es mayor que 3
24. -2,	x,	$d(A, B)$ no es menor que 2

Ejercicios 25 al 32: reescribe la expresión sin utilizar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado.

25. $\lvert 3 + x\rvert$ si $x < -3$	**26.** $\lvert 5 - x\rvert$ si $x > 5$
27. $\lvert 2 - x\rvert$ si $x < 2$	**28.** $\lvert 7 + x\rvert$ si $x \geq -7$
29. $\lvert a - b\rvert$ si $a < b$	**30.** $\lvert a - b\rvert$ si $a > b$
31. $\lvert x^2 + 4\rvert$	**32.** $\lvert -x^2 - 1\rvert$

Ejercicios 33 al 40: sustituye el símbolo $\square$ con $=$, $<$ o $>$ de modo que la expresión resultante sea verdadera para todos los números reales a, b, c y d, siempre que las expresiones estén definidas.

33. $\frac{ab + ac}{a} \square b + ac$	**34.** $\frac{ab + ac}{a} \square b + c$
35. $\frac{b + c}{a} \square \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$	**36.** $\frac{a + c}{b + d} \square \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
37. $(a + b) - c \square a + (b + c)$	
38. $(a - b) - c \square a - (b - c)$	
39. $\frac{a - b}{b - a} \square -1$	**40.** $-(a + b) \square -a + b$

C **Ejercicios 41 y 42: aproxima la expresión de número real a cuatro lugares decimales.**

41. a) $\lvert 3.2^2 - \sqrt{0.15}\rvert$

b) $\sqrt{(15.6 - 1.5)^2 + (4.3 - 5.4)^2}$

42. a) $\frac{5.42 - 1.29}{5.83 + 2.64}$

b) e^{-1}

C **Ejercicios 43 y 44: aproxima la expresión de número real. Expresa la respuesta en notación científica con precisión de cuatro cifras significativas.**

43. a) $\frac{1.2 \times 10^5}{3.1 \times 10^2 + 1.52 \times 10^3}$

b) $(1.23 \times 10^{-4}) + \sqrt{4.5 \times 10^3}$

44. a) $\sqrt{3.45 - 1.2 \times 10^4} + 10^3$

b) $(1.79) \times 10^5) \div (9.84 \times 10^3)$

45. El punto de una recta coordenada correspondiente a $\sqrt{3}$ se puede hallar dibujando un triángulo rectángulo con lados de longitud 1, como se muestra en la figura. Encuentra los puntos que corresponden a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. (*Sugerencia:* usa el teorema de Pitágoras.)

EJERCICIO 45

Los conjuntos de ejercicios comienzan con problemas simples que se van complicando. Incluyen casos de aplicaciones diseñadas para mostrar al lector cómo aplicar procedimientos matemáticos a la vida real

Diversas secciones cuentan con ejercicios para calculadora graficadora, identificables por el logo C

www.elsolucionario.net

Cuando apliques la fórmula de la distancia, notarás que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$, por lo tanto, no importa el orden en que restes las coordenadas x y las y de los puntos. Cabe considerar la distancia entre dos puntos como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 1 *Localización de la distancia entre puntos*

Localiza los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$ y encuentra la distancia $d(A, B)$.

Solución Los puntos están en la figura 4. Por la fórmula de la distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43$$

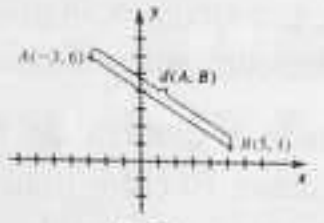


FIGURA 4

EJEMPLO 2 *Demostración de que un triángulo es triángulo rectángulo*

a) Localiza $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$, y prueba que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.
b) Encuentra el área del triángulo ABC.

Solución **a)** Los puntos se localizan en la figura 5. Por geometría, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia,

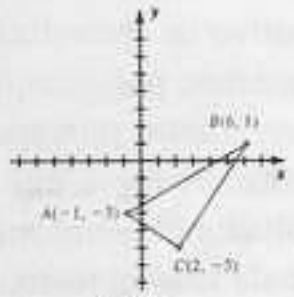


FIGURA 5

Los ejemplos, bien estructurados y expuestos por grado de dificultad, cuentan con título para su rápida identificación

Diversos ejemplos se ilustran con gráficas o tablas para ayudar al alumno a entender procedimientos y soluciones

Siempre que fue apropiada, se incluyeron en el texto ejemplos que requieren el uso de una calculadora graficadora. Se identifican por el icono y se ilustran con un reproducción de la pantalla del dispositivo

EJEMPLO 6 *Graficado de semielipses*

Traza la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0$.

Solución La ecuación se puede considerar como cuadrática en y de la forma $ay^2 + by^2 + c = 0$ al reacomodar términos de este modo:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática a la ecuación anterior, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$, llegamos a

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8}$$
$$= 1 \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}$$

Advertirás que no simplificamos por completo el radicando, ya que usaremos una calculadora graficadora.

Igual que en el ejemplo 6 de la sección anterior, ahora asignamos

$$Y_1 = \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}, \quad Y_2 = 1 + Y_1 \quad y \quad Y_3 = 1 - Y_1$$

Por último, graficamos Y_2 y Y_3 y obtenemos una imagen similar a la figura 55.

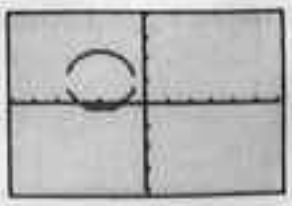


FIGURA 55 $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Las elipses pueden ser muy planas o casi circulares. Para obtener información sobre la *redondez* de una elipse, en ocasiones usamos el término *excentricidad*, que se define como sigue, con a, b y c con los mismos significados que antes.

Definición de excentricidad

La excentricidad e de una elipse es

$$e = \frac{\text{distancia del centro al foco}}{\text{distancia del centro al vértice}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

www.elsolucionario.net

Guías Las guías dentro de un recuadro enumeran los pasos de un procedimiento o técnica para ayudar al lector a resolver problemas de una manera sistemática.

Advertencias Intercaladas a lo largo de todo el material, hay notas precautorias que alertan al alumno acerca de errores comunes. La figura de la izquierda sirve para identificarlas.

Figuras y color Como parte de un paquete global, las figuras y gráficas se diseñaron con métodos computarizados de vanguardia para darles la mayor precisión posible. El color se usa para distinguir las diversas partes de una figura; por ejemplo, la gráfica de una función aparece en negro y la segunda función en azul. Las leyendas comparten el color de la sección que definen.

Diseño del texto El material fue diseñado a manera de facilitar el seguimiento de la exposición y destaca los conceptos más importantes. El color tiene un valor pedagógico, pues se usa para aclarar gráficas complicadas. Los anteriores usuarios de este texto han confirmado que ofrece un agradable equilibrio en el uso del color.

Sección de respuestas Se encuentra al final de la obra y cuenta con las respuestas de la mayor parte de los ejercicios con número impar, así como con las respuestas de todos los ejercicios de repaso de los capítulos. Este apartado significó un considerable esfuerzo mental y un gran esfuerzo para convertirlo en un verdadero dispositivo de aprendizaje para el alumno, en lugar de reducirlo a un formato de comprobación de respuestas; por ejemplo, cuenta con demostraciones para problemas matemáticos de inducción. Las respuestas numéricas para diversos ejercicios se establecieron tanto exacta como aproximadamente. Siempre que fue apropiado, se incluyeron gráficas, demostraciones y sugerencias. Las soluciones y respuestas preparadas por el autor aseguran un alto grado de consistencia a lo largo de todo el texto, el manual de soluciones y las respuestas.

HERRAMIENTAS DE ENSEÑANZA PARA EL INSTRUCTOR

Material impreso

Manual de soluciones del instructor (*Instructor's Solutions Manual*) Este manual, preparado por el autor, incluye las respuestas a todos los ejercicios, así como soluciones razonablemente detalladas de la mayor parte de los mismos. Para mayor precisión, el manual ha sido revisado por completo.

Artículos de prueba con pruebas de capítulo (*Test Items with Chapter Tests*), de Laurel Technical Services. Este manual impreso contiene todas los puntos para examen que se encuentran en el Banco de pruebas computarizado (*Computerized Test Items*), más dos pruebas muestra por capítulo.

Software

Brooks/Cole Exerciser 2.0 (BCX), por Laurel Technical Services BCX, es un tutorial específico para el libro, disponible para plataformas DOS WIN y MAC, que instruye y capacita al usuario en el manejo de problemas similares a los del texto. El paquete *a)* ofrece sugerencias; *b)* despliega el resultado correcto tras dos intentos fallidos; *c)* supervisa el progreso del estudiante, y *d)* incluye un sistema de reporte impreso en línea. Este software complementa el material del profesor luego de la adopción del texto.

www.elsolucionario.net

Computerized Test Items, de Laurel Technical Services. Este banco de exámenes para DOS, WIN y MAC proporciona alrededor de 800 puntos de examen y ha sido completamente revisado para esta edición. Cuenta con preguntas de opción múltiple, cierto-falso y final abierto. También está disponible en una versión impresa.

HERRAMIENTAS DE APRENDIZAJE PARA EL ESTUDIANTE

Tarjeta de referencia rápida Con esta edición se cuenta con una nueva herramienta para resolver problemas: una tarjeta de fórmulas. Se encuentra en el apéndice VI y ayudará a los estudiantes a dominar las fórmulas, ecuaciones y gráficas importantes. Al usarse como referencia rápida y reducir al mínimo la necesidad de buscar en el libro, disminuirá el tiempo que se utilice en tareas tediosas y permitirá que el alumno se concentre en los conceptos y principios importantes del curso.

RECONOCIMIENTOS

Quiero extender un agradecimiento especial a Gary Rockswold, de Mankato State University, por haber proporcionado la mayor parte de los nuevos problemas de aplicación y ejercicios con calculadora. Ha sido una invaluable fuente de conocimiento y apoyo. También deseo agradecer a mi esposa, Joan, por su lectura de galeras, y a George Morris, de Scientific Ilustrators, por la elaboración matemáticamente precisa de las imágenes.

Una buena cantidad de cambios a esta edición se deben a las siguientes personas, quienes revisaron el manuscrito e hicieron diversas sugerencias para incrementar la utilidad del texto:

Daniel D. Anderson
University of Iowa

Joann Bossenbrock
Columbus State Community College

Louis T. Congelio
Westmoreland Conty Community College

Melissa Cordle
Columbus State Community College

Mary Marsha Cupitt
Durham Technical Community College

Gregory J. Davis
University of Wisconsin-Green Bay

Robert S. Doran
Texas Christian University

George Drake
Lake Tahoe Community College

Arthur Foss
Broward Community College

Florence Gossett
North Hennepin Community College

Karen Hinz
Anoka-Ramsey Community College

Cindy Jones
Indiana University Purdue University Indianapolis

Darrel Minor
Columbus State Community College

Michal Misiurewicz
Indiana University Purdue University Indianapolis

Henry Nixt
Shawnee State University

Jean E. Rubin
Purdue University

Katherine Struve
Columbus State Community College

Linda C. Vereen
Coastal Carolina University

S. K. Wong
The Ohio State University

www.elsolucionario.net

También quiero dar las gracias por la excelente cooperación a los equipos de Brooks/Cole y PWS Publishing. Los editores Bob Pirtle y David Dietz supervisaron el proyecto y ofrecieron una importante cantidad de información y recomendaciones. Elizabeth Rommel y Beth Wilbur ensamblaron el valioso paquete auxiliar que acompaña a la obra. Sally Lifland, Denise Throckmorton y Andrea Deibler-Gorman, todos de Lifland *et al.*, Bookmakers, tuvieron especial cuidado en evitar que se presentara la menor inconsistencia y proporcionaron muchas recomendaciones útiles.

Además de las personas nombradas aquí, quiero expresar mi sincera gratitud a todos aquellos estudiantes y profesores que me han ayudado a aguzar mi perspectiva acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Por favor, siéntase en total libertad de escribirme respecto de cualquier punto de la obra, sabré valorar su opinión.

JEFFERY A. COLE

www.elsolucionario.net

1 Conceptos fundamentales de álgebra 1

1.1 Números reales 2
1.2 Exponentes y radicales 15
1.3 Expresiones algebraicas 26
1.4 Expresiones fraccionarias 38
Ejercicios de repaso 46
Ejercicios de análisis 48

2 Ecuaciones y desigualdades 49

2.1 Ecuaciones 50
2.2 Problemas aplicados 58
2.3 Ecuaciones cuadráticas 70
2.4 Números complejos 83
2.5 Otros tipos de ecuaciones 89
2.6 Desigualdades 98
2.7 Más sobre desigualdades 109
Ejercicios de repaso 116
Ejercicios de análisis 119

3 Funciones y gráficas 121

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares 122
3.2 Gráficas de ecuaciones 130
3.3 Rectas 144
3.4 Definición de función 164
3.5 Gráficas de funciones 181
3.6 Funciones cuadráticas 196
3.7 Operaciones sobre funciones 211

www.elsolucionario.net

3.8 Funciones inversas 221
3.9 Variación 232
Ejercicios de repaso 238
Ejercicios de análisis 243

4 Funciones polinomiales, funciones racionales y secciones cónicas 245

4.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2 246
4.2 Propiedades de la división 256
4.3 Ceros de polinomios 264
4.4 Ceros complejos y racionales de polinomios 277
4.5 Funciones racionales 285
4.6 Parábolas 301
4.7 Elipses 313
4.8 Hipérbolas 326
Ejercicios de repaso 338
Ejercicios de análisis 340

5 Funciones exponenciales y logarítmicas 343

5.1 Funciones exponenciales 344
5.2 Función exponencial natural 358
5.3 Funciones logarítmicas 369
5.4 Propiedades de los logaritmos 385
5.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 393
Ejercicios de repaso 404
Ejercicios de análisis 406

6 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 409

6.1 Sistemas de ecuaciones 410
6.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables 420
6.3 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables 429
6.4 Fracciones parciales 442
6.5 Sistemas de desigualdades 448
6.6 Programación lineal 458
6.7 Álgebra de matrices 468
6.8 Inversa de una matriz 476
6.9 Determinantes 481

www.elsolucionario.net

6.10 Propiedades de los determinantes 488
Ejercicios de repaso 495
Ejercicios de análisis 497

7 Funciones trigonométricas 499
7.1 Ángulos 500
7.2 Funciones trigonométricas de ángulos 510
7.3 Funciones trigonométricas de números reales 527
7.4 Valores de las funciones trigonométricas 548
7.5 Gráficas trigonométricas 555
7.6 Otras gráficas trigonométricas 571
7.7 Problemas de aplicación 581
Ejercicios de repaso 595
Ejercicios de análisis 601

8 Trigonometría analítica 603
8.1 Verificación de identidades trigonométricas 604
8.2 Ecuaciones trigonométricas 608
8.3 Fórmulas de suma y resta 621
8.4 Fórmulas de ángulos múltiples 632
8.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto 642
8.6 Funciones trigonométricas inversas 648
Ejercicios de repaso 665
Ejercicios de análisis 667

9 Aplicaciones de la trigonometría 669
9.1 Ley de los senos 670
9.2 Ley de los cosenos 682
9.3 Forma trigonométrica para números complejos 692
9.4 Teorema de DeMoivre y raíces *n*-ésimas de números complejos 698
9.5 Vectores 704
9.6 Producto punto 719
Ejercicios de repaso 731
Ejercicios de análisis 734

www.elsolucionario.net

10 Sucesiones, series y probabilidad 735

10.1 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria 736
10.2 Sucesiones aritméticas 745
10.3 Sucesiones geométricas 752
10.4 Inducción matemática 761
10.5 Teorema del binomio 767
10.6 Permutaciones 775
10.7 Permutaciones y combinaciones distinguibles 782
10.8 Probabilidad 788
Ejercicios de repaso 801
Ejercicios de análisis 803

11 Temas de geometría analítica 805

11.1 Curvas planas y ecuaciones paramétricas 806
11.2 Coordenadas polares 817
11.3 Ecuaciones polares de cónicas 831
Ejercicios de repaso 839
Ejercicios de análisis 839

Apéndices A1

I Uso de una calculadora graficadora TI-82/83 A2
II Gráficas comunes y sus ecuaciones A27
III Resumen de transformaciones de gráficas A29
IV Fórmulas más usuales en álgebra, geometría, geometría analítica y secciones cónicas A31
V Gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas A35
VI Tarjeta de referencia rápida A37

Respuestas a ejercicios seleccionados R1

www.elsolucionario.net

Conceptos fundamentales de álgebra

1

1.1 Números reales
1.2 Exponentes y radicales
1.3 Expresiones algebraicas
1.4 Expresiones fraccionarias

www.elsolucionario.net

La palabra *álgebra* proviene de *ilm al-jabr w'al muqabala*, que es el título de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe Al Juarismi. El título se ha traducido como la ciencia de la reposición y reducción, que significa trasponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La traducción fonética de *al-jabr* en el latín popular, llevó al nombre de la rama de las matemáticas que ahora conocemos como álgebra.

En esta disciplina usamos símbolos o letras como a, b, c, d, x, y para denotar números arbitrarios. La gran cantidad de fórmulas que se usan en ciencias e industria pone de manifiesto la naturaleza general del álgebra. A medida que avances en el estudio de este texto y pases a cursos más avanzados de matemáticas o a campos donde éstas se utilizan, estarás cada vez más consciente de la importancia y el poder de las técnicas algebraicas.

1.1 Números reales

Los números reales se emplean en todas las ramas de las matemáticas y es importante estar familiarizado con los símbolos que los representan, como

$$1, \quad 73, \quad -5, \quad \tfrac{49}{12}, \quad \sqrt{2}, \quad 0, \quad \sqrt[3]{-85}, \quad 0.33333\ldots, \quad 596.25,$$

etcétera. Los **enteros positivos**, o **números naturales**, son

$$1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Los **números enteros no negativos** son los números naturales combinados con el número 0. A menudo, los números enteros se expresan como:

$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

En todo este texto, las letras minúsculas $a, b, c, x, y, \ldots$ representan números reales arbitrarios. Si a y b denotan el mismo número real, escribimos $a = b$, que se lee "a **es igual a** b" y se llama **igualdad**. La notación $a \neq b$ se lee "a ***no*** **es igual a** b".

Si a, b y c son enteros y $c = ab$, entonces a y b son **factores** o **divisores** de c; por ejemplo, ya que

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6),$$

sabemos que $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6 son factores de 6.

Un entero positivo p diferente de 1 es **primo** si sus únicos factores positivos son 1 y p. Algunos de los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. El **teorema fundamental de la aritmética** asevera que todo entero positivo diferente de 1 se puede expresar como el producto de números primos según una y sólo una forma (excepto por el orden de los factores). Algunos ejemplos son

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Un **número racional** es un número real que puede expresarse en la forma a/b, en donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Notarás que todo entero a es un número racional, puesto que se puede expresar en la forma $a/1$. Es posible expresar todo número real como un decimal; por otro lado, las representaciones decimales para números racionales son *finitas, o no finitas y repetitivas*; por ejemplo, por el proceso aritmético de división podemos demostrar que

$$\tfrac{5}{4} = 1.25 \quad \text{y} \quad \tfrac{172}{55} = 3.2181818\ldots,$$

www.elsolucionario.net

en donde los dígitos 1 y 8 en la representación de $\frac{177}{55}$ se repiten en forma indefinida (a veces se anota $3.2\overline{18}$).

Los números reales que no son racionales son **números irracionales**; las representaciones decimales para estos últimos son siempre *infinitas* y *no repetitivas*. Un número irracional común, denotado por π, es el cociente o razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. La notación $\pi = 3.1416$ se usará para indicar que π es **aproximadamente igual** a 3.1416.

No existe número racional alguno tal que $b^2 = 2$, en donde b^2 denote a $b \cdot b$; pero sí el número irracional denotado por $\sqrt{2}$ (la **raíz cuadrada** de 2), tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Todos los números racionales e irracionales forman el sistema de **números reales**. Las relaciones entre los tipos de números que se usan en álgebra se ilustran en el diagrama de la figura 1, donde una línea que enlaza dos rectángulos significa que los números del rectángulo más alto incluyen los del más bajo. Los números complejos (Sec. 2.4) contienen todos los números reales.

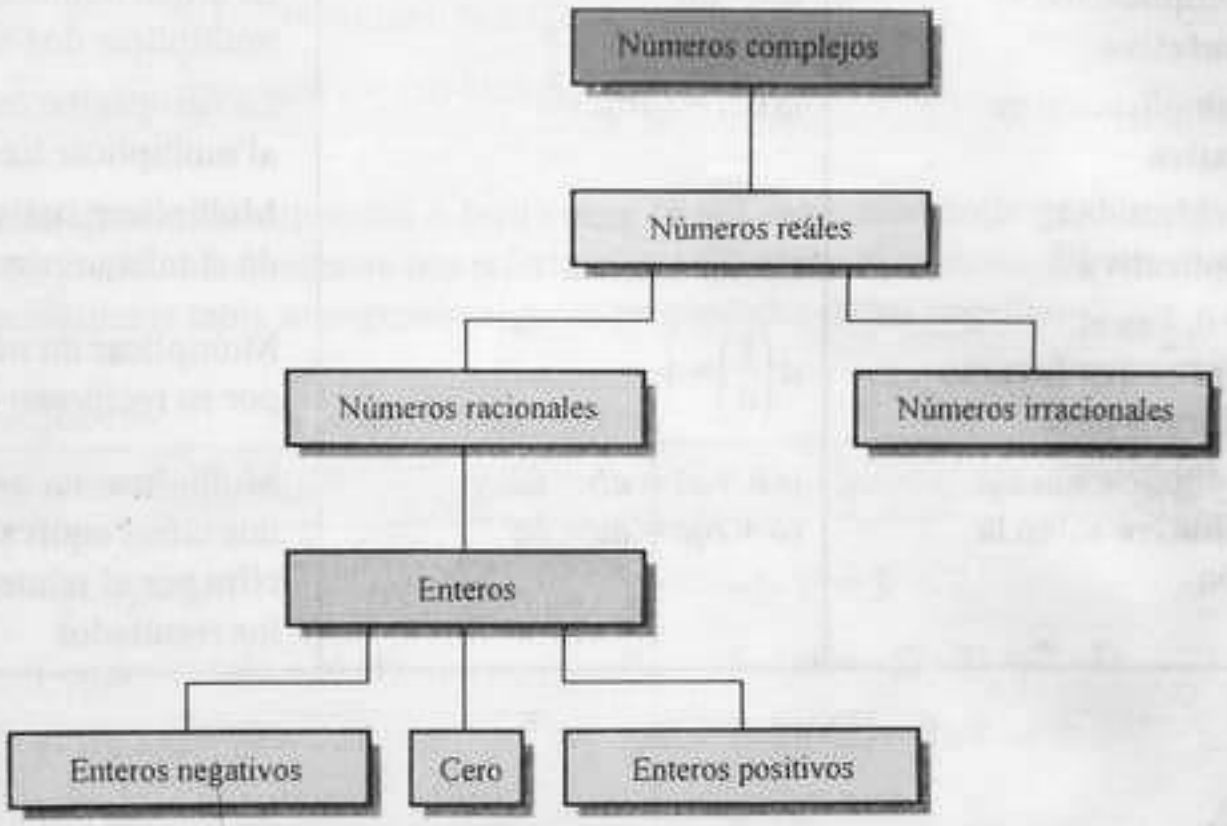


FIGURA 1 Tipos de números usados en álgebra.

Los números reales son **cerrados respecto de la operación de adición** (denotada por +); esto es, a todo par a, b de números reales corresponde exactamente un número real $a + b$, llamado **suma** de a y b. Los números reales también son **cerrados en relación con la multiplicación** (denotada por $\cdot$); o sea, a todo par a, b de números reales corresponde exactamente un número real $a \cdot b$ (también denotado por ab), denominado **producto** de a y b.

Éstas y otras propiedades importantes de la adición y multiplicación de números reales se incluyen en la tabla de la siguiente página.

Puesto que $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ son siempre iguales, el símbolo $a + b + c$ denota este número real; se usa abc ya sea para $a(bc)$ o $(ab)c$. Del mismo modo, si se suman o multiplican cuatro o más números reales a, b, c, d, se puede escribir $a + b + c + d$ para su suma y $abcd$ para su producto, sin importar cómo estén agrupados o intercambiados.

Las propiedades distributivas sirven para hallar los productos de muchos tipos de expresiones donde intervienen sumas. El siguiente ejemplo aclara el punto.

www.elsolucionario.net

Propiedades de números reales

Terminología	Caso general	Significado
(1) La adición es **conmutativa**	$a+b=b+a$	El orden es intrascendente cuando se suman dos números
(2) La adición es **asociativa**	$a+(b+c)=(a+b)+c$	La agrupación es intrascendente cuando se suman tres cifras
(3) 0 es la **identidad aditiva**	$a+0=a$	Sumar 0 a cualquier cantidad produce la misma cantidad
(4) $-a$ es el aditivo **inverso** o **negativo** de a	$a+(-a)=0$	Sumar una cifra y su inverso da 0
(5) La multiplicación es **conmutativa**	$ab=ba$	El orden no tiene importancia al multiplicar dos números
(6) La multiplicación es **asociativa**	$a(bc)=(ab)c$	La agrupación carece de importancia al multiplicar tres cifras
(7) 1 es la identidad **multiplicativa**	$a\cdot 1=a$	Multiplicar cualquier número por 1 da el mismo número
(8) Si $a\neq 0$, $\frac{1}{a}$ es el **multiplicativo inverso** o **recíproco** de a	$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$	Multiplicar un número diferente de 0 por su recíproco da 1
(9) La multiplicación es **distributiva** sobre la adición	$a(b+c)=ab+ac$ y $(a+b)c=ac+bc$	Multiplicar un número y la suma de dos cifras equivale a multiplicar cada cifra por el número y luego sumar los resultados

EJEMPLO 1 *Uso de propiedades distributivas*

Si p, q, r y s denotan números reales, demuestra que

$$(p+q)(r+s)=pr+ps+qr+qs.$$

Solución Utilizamos ambas propiedades distributivas incluidas en (9) de la tabla anterior:

$$\begin{aligned}
&(p+q)(r+s)\\
&=p(r+s)+q(r+s) && \text{segunda propiedad distributiva, con } c=r+s\\
&=(pr+ps)+(qr+qs) && \text{primera propiedad distributiva}\\
&=pr+ps+qr+qs && \text{eliminar paréntesis}
\end{aligned}$$

Las siguientes propiedades de igualdad son básicas.

www.elsolucionario.net

Propiedades de igualdad

Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces

(1) $a + c = b + c$

(2) $ac = bc$

Las propiedades 1 y 2 indican que el mismo número se puede sumar a ambos lados de una igualdad, y éstos se pueden multiplicar por el mismo número. A menudo usaremos estas propiedades en todo el texto para ayudarnos a resolver las ecuaciones.

Se puede demostrar este resultado:

Productos donde interviene el cero

(1) $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a.

(2) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$.

Cuando usamos la expresión *o bien* como en (2), queremos decir que al menos uno de los factores a o b es 0. Más adelante nos referiremos a (2) como el *teorema del factor cero*.

En la siguiente tabla se expresan algunas propiedades de los negativos.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ejemplo
(1) $-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
(2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-2)3 = -(2 \cdot 3) = 2(-3)$
(3) $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = 2 \cdot 3$
(4) $(-1)a = -a$	$(-1)3 = -3$

El recíproco $\frac{1}{a}$ de un número real a diferente de cero se denota muchas veces con a^{-1}, como en la siguiente tabla.

Notación para recíprocos

Definición	Ejemplo
Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$.	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

Notarás que si $a \neq 0$, entonces

$$a \cdot a^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

www.elsolucionario.net

Las operaciones de **sustracción** (−) y **división** (÷) se definen como sigue.

Sustracción y división

Definición	Significado	Ejemplo
$a - b = a + (-b)$	Para restar un número de otro, se suma el negativo.	$3 - 7 = 3 + (-7)$
$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ $= a \cdot b^{-1};\ b \neq 0$	Para dividir un número entre otro diferente de cero, se multiplica por el recíproco.	$3 \div 7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$ $= 3 \cdot 7^{-1}$

El símbolo a/b o bien $\frac{a}{b}$ se utiliza con frecuencia en lugar de $a \div b$ y nos referimos a él como el **cociente de *a* entre *b*** o la **fracción de *a* sobre *b***. Los números a y b se llaman **numerador** y **denominador**, respectivamente, de a/b. Puesto que el 0 carece de inverso multiplicativo, a/b no está definido para $b = 0$; esto es, *la división entre cero no está definida*. Es por esta razón que los números reales no son cerrados en relación con la división. Advertirás que

$$1 \div b = \frac{1}{b} = b^{-1} \quad \text{si} \quad b \neq 0.$$

Se pueden establecer las siguientes propiedades de los cocientes, en donde todos los denominadores son números reales distintos de cero.

Propiedades de los cocientes

	Propiedad	Ejemplo
(1)	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
(2)	$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$
(3)	$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$
(4)	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2+9}{5} = \frac{11}{5}$
(5)	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15}$
(6)	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$
(7)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

www.elsolucionario.net

Los números reales pueden ser representados por puntos de una recta l, de modo que a cada número real a corresponda un punto y uno solo de l y, recíprocamente, a cada punto P de la recta l corresponda un número real; esto se denomina **correspondencia biunívoca**. En primer lugar se escoge un punto arbitrario O, llamado **origen**, y se asocia con el número real 0. Los puntos vinculados con los enteros se establecen al marcar segmentos de recta sucesivos de igual longitud a cada lado de O (Fig. 2). El punto correspondiente a un número racional, como $\frac{23}{5}$, se obtiene subdividiendo estos segmentos de recta. Los puntos relacionados con ciertos números irracionales, como $\sqrt{2}$, se pueden encontrar por construcción geométrica (Ejer. 45).

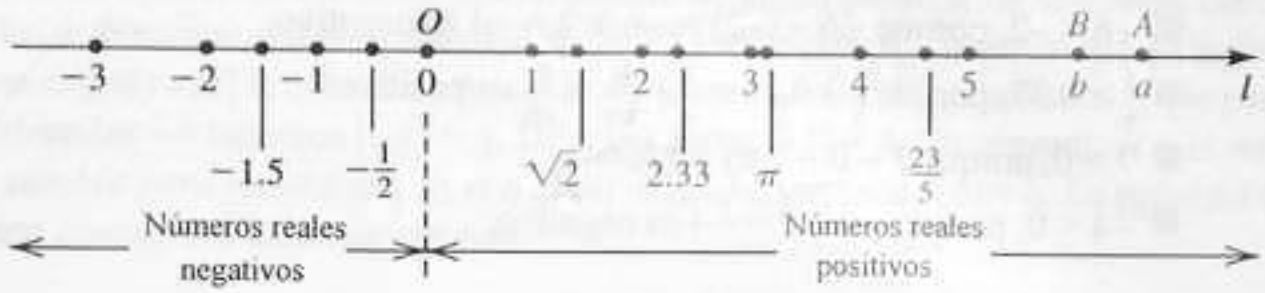


FIGURA 2

El número a asociado con el punto A en l se llama **coordenada** de A; estas coordenadas se conocen como **sistema coordenado** y l se denomina **línea coordenada** o **recta numérica real**. Se puede asignar una dirección a l considerando la **dirección positiva** a la derecha y la **dirección negativa** a la izquierda. La dirección positiva se identifica por la flecha en el extremo de l (Fig. 2).

Los números que corresponden a puntos del lado derecho de O en la figura 2 se llaman **números reales positivos**, y los números que corresponden a puntos a la izquierda de O son **números reales negativos**. *El número real* 0 *no es ni positivo ni negativo.*

Observa la diferencia entre un número real negativo y el *negativo* de un número real. En particular, el negativo de un número real a puede ser positivo; por ejemplo, si a es negativo, digamos $a = -3$, entonces el negativo de a es $-a = -(-3) = 3$, que es positivo. En general, tenemos las siguientes relaciones.

Relaciones entre a y $-a$

(1) Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.

(2) Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

En la tabla adjunta definimos las nociones de **mayor que** y **menor que** para números reales a y b. Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad**, y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se llaman **desigualdades**.

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

www.elsolucionario.net

Si los puntos A y B de una recta coordenada tienen coordenadas a y b, respectivamente, entonces $a > b$ equivale a la expresión "A está a la derecha de B", mientras que $a < b$ equivale a "A está a la *izquierda* de B".

ILUSTRACIÓN

Mayor que (>) y menor que (<)

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, porque $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, porque $-4 - 0 = -4$ es negativo.

La ley que sigue permite comparar, u *ordenar*, dos números reales cualesquiera.

Ley de la tricotomía

Si a y b son números reales, entonces exactamente una de las expresiones siguientes es verdadera:

$$a = b, \qquad a > b, \qquad \text{o bien} \qquad a < b$$

Consideramos que el **signo** de un número real es positivo si la cifra es positiva, o negativo si es negativa. Dos números reales tienen *el mismo signo* si ambos son positivos o negativos. Los números tienen *signos opuestos* si uno es positivo y el otro negativo. Se pueden demostrar los siguientes resultados respecto de los signos de productos y cocientes de dos números reales a y b, a partir de propiedades de los negativos y los cocientes.

Leyes de los signos

(1) Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.

(2) Si a y b tienen signos opuestos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Los **recíprocos*** de las leyes de los signos también son verdaderos; por ejemplo, si un cociente es negativo, el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

La notación $a \geq b$, que se lee "a **es mayor o igual que** b", significa que $a > b$ o que $a = b$ (pero no ambos); por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a. El símbolo $a \leq b$, que se lee "a **es menor o igual que** b", significa que $a < b$ o que $a = b$. Una expresión del tipo $a < b < c$ se denomina **desigualdad continua** y quiere decir que $a < b$ y $b < c$; se dice que "b **está entre** a y c". Del mismo modo, la expresión $c > b > a$ significa que $c > b$ y que $b > a$.

*Si un teorema está escrito en la forma "si P, entonces Q" donde P y Q son expresiones matemáticas llamadas *hipótesis* y *conclusión*, respectivamente, entonces el *recíproco* del teorema tiene la forma "si Q, entonces P". Si el teorema y su recíproco son verdaderos, muchas veces se escribe "P si y sólo si Q".

www.elsolucionario.net

ILUSTRACIÓN

Ordenamiento de tres números reales

- $1 < 5 < \frac{11}{2}$
- $-4 < \frac{2}{3} < \sqrt{2}$
- $3 > -6 > -10$

Hay otros tipos de desigualdades; por ejemplo, $a < b \leq c$ quiere decir que $a < b$ y que $b \leq c$. Del mismo modo, $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y que $b < c$. Por último, $a \leq b \leq c$ quiere decir que $a \leq b$ y que $b \leq c$.

Si a es un entero, entonces es la coordenada de algún punto A de una recta coordenada, y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades entre A y el origen, sin tomar en cuenta la dirección. El número no negativo $|a|$ se conoce como *valor absoluto de a*. En la figura 3 vemos que para el punto con coordenadas -4 tenemos $|-4| = 4$. De igual forma, $|4| = 4$. En general, *si a es negativo, su signo se cambia para encontrar* $|a|$; *si a es no negativo, entonces* $|a| = a$. La próxima definición amplía este concepto a todo número real.

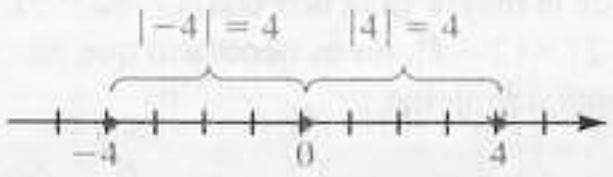


FIGURA 3

Definición de valor absoluto

El valor absoluto de un número real a, denotado por $|a|$, se define.

(1) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.

(2) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

Dado que a es negativo en la parte (2) de la definición, $-a$ representa un número real *positivo*. Algunos casos especiales de esta definición están dados en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN

Notación de valor absoluto $|a|$

- $|3| = 3$, porque $3 > 0$.
- $|-3| = -(-3)$, porque $-3 < 0$. Así, $|-3| = 3$
- $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, porque $2 - \sqrt{2} > 0$.
- $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2)$, porque $\sqrt{2} - 2 < 0$. Así, $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$.

En la ilustración anterior, $|3| = |-3|$ y $|2 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} - 2|$. En general, tenemos:

$$|a| = |-a| \text{ para todo número real } a$$

EJEMPLO 2 *Supresión de un símbolo de valor absoluto*

Si $x < 1$, reescribe $|x - 1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

www.elsolucionario.net

Solución Si $x < 1$, entonces $x - 1 < 0$; esto es, $x - 1$ es negativo; por lo tanto, por la parte (2) de la definición de valor absoluto,

$$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x$$

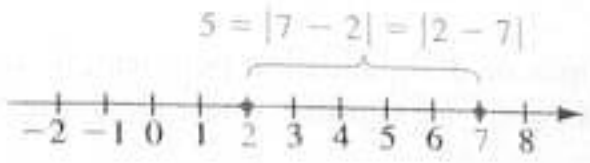


FIGURA 4

Se usará el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos de una recta coordenada. Comencemos por observar que la distancia entre los puntos con coordenadas 2 y 7 (Fig. 4) es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia obtenida al restar la coordenada menor (a la izquierda) de la mayor (a la derecha) ($7 - 2 = 5$). Si empleamos valores absolutos, entonces, puesto que $|7 - 2| = |2 - 7|$, no es necesario que nos preocupemos por el orden de la resta. Esto motiva la siguiente definición.

Definición de la distancia entre puntos de una recta coordenada

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B, respectivamente, de una recta coordenada. La distancia entre A y B, denotada por $d(A, B)$, se define como

$$d(A, B) = |b - a|$$

El número $d(A, B)$ es la longitud del segmento de recta AB.

Como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$, vemos que

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Observa que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a - 0| = |a|,$$

lo cual coincide con la interpretación geométrica de valor absoluto ilustrada en la figura 3. La fórmula $d(A,B) = |b - a|$ es válida, cualesquiera que sean los signos de a y b, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 ***Determinación de distancias entre puntos***

Sean A, B, C y D puntos con coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente, en una recta coordenada, como se muestra en la figura 5. Encuentra $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

FIGURA 5

Solución Por la definición de la distancia entre puntos de una recta coordenada, se obtienen las distancias:

www.elsolucionario.net

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$
$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$
$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$
$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

El concepto de valor absoluto tiene otros usos, además de hallar distancias entre puntos; se utiliza siempre que estemos interesados en la magnitud o valor numérico de un número real, cualquiera que sea su signo.

En la siguiente sección estudiaremos la *notación exponencial* a^n, donde a es un número real (denominado *base*) y n es un entero (llamado *exponente*). En particular, para la base 10 tenemos

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000,$$

y así sucesivamente. Para exponentes negativos se utiliza el recíproco del exponente positivo correspondiente:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Esta notación permite escribir cualquier representación decimal finita de un número real como una suma del tipo:

$$\begin{aligned} 437.56 &= 4(100) + 3(10) + 7(1) + 5\left(\tfrac{1}{10}\right) + 6\left(\tfrac{1}{100}\right) \\ &= 4(10^2) + 3(10^1) + 7(10^0) + 5(10^{-1}) + 6(10^{-2}) \end{aligned}$$

En ciencias a menudo es necesario trabajar con números muy grandes o muy pequeños, y comparar las magnitudes relativas de cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por lo general, se representa un número positivo grande o pequeño a en *notación científica,* con el símbolo $\times$, a fin de denotar multiplicación.

Notación científica

$a = c \times 10^n$, donde $1 \le c < 10$ y n es un entero.

La distancia que recorre un rayo de luz en un año es 5,900 000 000 000 millas. Este número se puede escribir en notación científica como 5.9×10^{12}, donde el exponente positivo 12 indica que el punto decimal debe moverse 12 lugares a la *derecha;* la notación opera igualmente bien para cifras pequeñas. El peso de una molécula de oxígeno se estima en

0.000 000 000 000 000 000 000 053 gramos,

o, en notación científica, 5.3×10^{-23} gramos, donde el exponente negativo indica que el punto decimal ha de moverse 23 lugares a la *izquierda.*

ILUSTRACIÓN

Notación científica

- $513 = 5.13 \times 10^2$
- $93\,000\,000 = 9.3 \times 10^7$
- $0.000\,000\,000\,43 = 4.3 \times 10^{-10}$
- $7.3 = 7.3 \times 10^0$
- $20\,700 = 2.07 \times 10^4$
- $0.000\,648 = 6.48 \times 10^{-4}$

www.elsolucionario.net

Muchas calculadoras usan la notación científica en sus pantallas; para el número $c \times 10^n$ se suprime el 10 y el exponente se muestra precedido por la letra E; por ejemplo, a fin de hallar $(4\ 500\ 000)^2$ en una calculadora científica, podemos teclear el entero 4 500 000 y presionar la tecla x^2 (o elevar al cuadrado), con lo cual obtenemos un resultado semejante al de la figura 6. Traduciríamos esto como 2.025×10^{13}; por lo tanto,

$$(4\ 500\ 000)^2 = 20\ 250\ 000\ 000\ 000$$

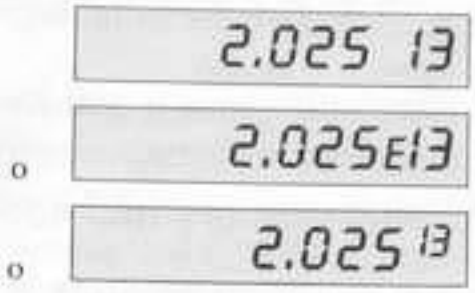


FIGURA 6

Las calculadoras también pueden utilizar la notación científica en el tecleo de números; por lo general el manual del usuario contiene detalles específicos.

Antes de concluir esta sección, consideraremos brevemente lo relativo al redondeo de resultados. A menudo, en problemas prácticos muchas veces aparecen números provenientes de diversos tipos de mediciones y, por lo tanto, son *aproximaciones* a los valores exactos. Dichas respuestas deben redondearse porque el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos que se hayan usado; por ejemplo, si la longitud y ancho de un rectángulo se miden con una precisión de dos lugares decimales, no es posible esperar una precisión de más de dos lugares decimales en el valor calculado del área del rectángulo. Ahora bien, para trabajos puramente *matemáticos*, si se dan los valores de longitud y ancho de un rectángulo supondremos que las dimensiones son *exactas* y no precisaremos redondeo alguno.

Si un número a se escribe en forma científica como $a = c \times 10^n$ para $1 \leq c < 10$ y si c se redondea a k lugares decimales, decimos que a es preciso (o ha sido redondeado) a $k+1$ **cifras significativas** o **dígitos**; por ejemplo, 37.2638 redondeado a 5 cifras significativas es 3.7264×10^1 (es decir, 37.264); a 3 cifras significativas, 3.73×10^1 (o sea, 37.3), y a una cifra significativa, 4×10^1 (esto es, 40).

1.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 y 2: si $x < 0$ y $y > 0$, determina el signo del número real.

1. **a)** xy **b)** x^2y **c)** $\frac{x}{y} + x$ **d)** $y - x$

2. **a)** $\frac{x}{y}$ **b)** xy^2 **c)** $\frac{x-y}{xy}$ **d)** $y(y-x)$

Ejercicios 3 al 6: sustituye el símbolo $\square$ con $<$, $>$ o $=$ para que la expresión resultante sea verdadera.

3. **a)** $-7 \square -4$ **b)** $\frac{\pi}{2} \square 1.57$ **c)** $\sqrt{225} \square 15$

4. **a)** $-3 \square -5$ **b)** $\frac{\pi}{4} \square 0.8$ **c)** $\sqrt{289} \square 17$

5. **a)** $\frac{1}{11} \square 0.09$ **b)** $\frac{2}{3} \square 0.6666$ **c)** $\frac{22}{7} \square \pi$

6. **a)** $\frac{1}{7} \square 0.143$ **b)** $\frac{5}{6} \square 0.833$ **c)** $\sqrt{2} \square 1.4$

Ejercicios 7 y 8: expresa el enunciado como desigualdad.

7. **a)** x es negativo.
   b) y es no negativo.
   c) q es menor o igual que π.
   d) d está entre 4 y 2.

www.elsolucionario.net

e) t no es menor que 5.

f) El negativo de z no es mayor que 3.

g) El cociente de p y q es a lo sumo 7.

h) El recíproco de w es al menos 9.

i) El valor absoluto de x es mayor que 7.

8. a) b es positivo.

b) s es no positivo.

c) w es mayor o igual que -4.

d) c está entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$

e) p no es mayor que -2.

f) El negativo de m no es menor que -2.

g) El cociente de r y s es al menos $\frac{1}{5}$.

h) El recíproco de f es a lo sumo 14.

i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejercicios 9 al 14: reescribe el número sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifica el resultado.

9. a) $|-3-2|$ **b)** $|-5|-|2|$ **c)** $|7|+|-4|$

10. a) $|-11+1|$ **b)** $|6|-|-3|$ **c)** $|8|+|-9|$

11. a) $(-5)|3-6|$ **b)** $|-6|/(-2)$ **c)** $|-7|+|4|$

12. a) $(4)|6-7|$ **b)** $5/|-2|$ **c)** $|-1|+|-9|$

13. a) $|4-\pi|$ **b)** $|\pi-4|$ **c)** $|\sqrt{2}-1.5|$

14. a) $|\sqrt{3}-1.7|$ **b)** $|1.7-\sqrt{3}|$ **c)** $\left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right|$

Ejercicios 15 al 18: los números dados son coordenadas de los puntos A, B y C, respectivamente, de una recta coordenada. Halla la distancia.

a) $d(A, B)$ **b)** $d(B, C)$

c) $d(C, B)$ **d)** $d(A, C)$

15. 3, 7, -5

16. -6, -2, 4

17. -9, 1, 10

18. 8, -4, -1

Ejercicios del 19 al 24: los dos números dados son coordenadas de los puntos A y B, respectivamente, de una recta coordenada. Expresa el enunciado indicado como desigualdad usando el símbolo de valor absoluto.

19. x, 7; $d(A, B)$ es menor que 5

20. x, $-\sqrt{2}$; $d(A, B)$ es mayor que 1

21. x, -3; $d(A, B)$ es al menos 8

22. x, 4; $d(A, B)$ es a lo sumo 2

23. 4, x; $d(A, B)$ no es mayor que 3

24. -2, x; $d(A, B)$ no es menor que 2

Ejercicios 25 al 32: reescribe la expresión sin utilizar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado.

25. $|3+x|$ si $x<-3$ **26.** $|5-x|$ si $x>5$

27. $|2-x|$ si $x<2$ **28.** $|7+x|$ si $x\geq -7$

29. $|a-b|$ si $a<b$ **30.** $|a-b|$ si $a>b$

31. $|x^2+4|$ **32.** $|-x^2-1|$

Ejercicios 33 al 40: sustituye el símbolo $\square$ con $=$ o $\neq$ a fin de que la expresión resultante sea verdadera para todos los números reales a, b, c y d, siempre que las expresiones estén definidas.

33. $\dfrac{ab+ac}{a} \square b+ac$ **34.** $\dfrac{ab+ac}{a} \square b+c$

35. $\dfrac{b+c}{a} \square \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$ **36.** $\dfrac{a+c}{b+d} \square \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$

37. $(a+b)+c \square a+(b+c)$

38. $(a-b)-c \square a-(b-c)$

39. $\dfrac{a-b}{b-a} \square -1$ **40.** $-(a+b) \square -a+b$

C **Ejercicios 41 y 42: aproxima la expresión de número real a cuatro lugares decimales.**

41. a) $|3.2^2-\sqrt{3.15}|$

b) $\sqrt{(15.6-1.5)^2+(4.3-5.4)^2}$

42. a) $\dfrac{3.42-1.29}{5.83+2.64}$

b) π^3

C **Ejercicios 43 y 44: aproxima la expresión de número real. Expresa la respuesta en notación científica con precisión de cuatro cifras significativas.**

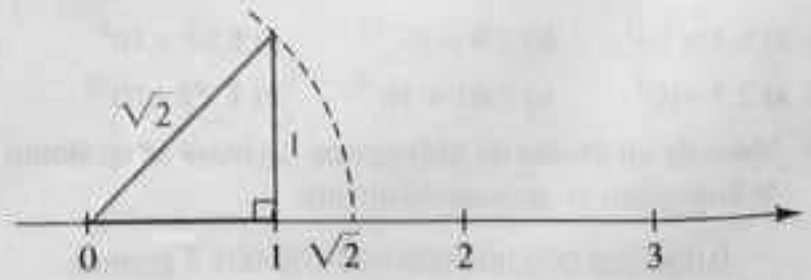
43. a) $\dfrac{1.2\times 10^3}{3.1\times 10^2+1.52\times 10^3}$

b) $(1.23\times 10^{-4})+\sqrt{4.5\times 10^3}$

44. a) $\sqrt{|3.45-1.2\times 10^4|+10^5}$

b) $(1.791\times 10^2)\times(9.84\times 10^3)$

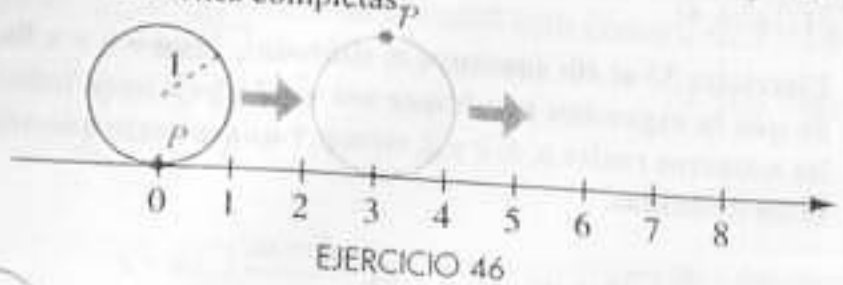
45. El punto de una recta coordenada correspondiente a $\sqrt{2}$ se puede hallar dibujando un triángulo rectángulo con lados de longitud 1, como se muestra en la figura. Encuentra los puntos que corresponden a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. (*Sugerencia*: usa el teorema de Pitágoras.)



EJERCICIO 45

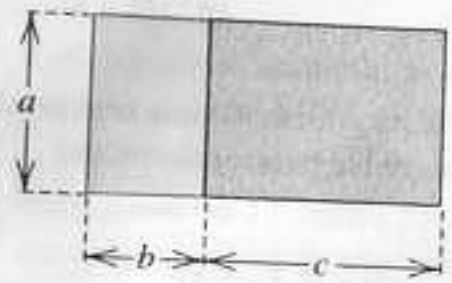
www.elsolucionario.net

46. Un círculo de radio 1 gira a lo largo de una recta coordenada en dirección positiva, según se ve en la figura. Si el punto P está en el origen al principio, encuentra la coordenada de P después de una, dos y diez revoluciones completas.



EJERCICIO 46

47. Los antiguos griegos fueron los primeros en demostrar las propiedades de los números reales con pruebas geométricas. Con objeto de establecer la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$ para los números reales positivos a, b y c, halla el área del rectángulo que se presenta de dos modos en la figura.



EJERCICIO 47

48. Las aproximaciones racionales a raíces cuadradas se pueden hallar con una fórmula descubierta por los antiguos babilonios. Sea x_1 la primera aproximación racional para $\sqrt{n}$. Si hacemos

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right),$$

entonces x_2 será una aproximación mejor para $\sqrt{n}$ y podemos repetir el cálculo con x_2 en lugar de x_1. Comienza con $x_1 = \frac{1}{2}$ y encuentra las siguientes dos aproximaciones racionales para $\sqrt{2}$.

Ejercicios 49 y 50: expresa el número en notación científica.

49. a) 427 000 **b)** 0.000 000 098 **c)** 810 000 000

50. a) 85 200 **b)** 0.000 005 5 **c)** 24 900 000

Ejercicios 51 y 52: expresa el número en forma decimal.

51. a) 8.3×10^5 **b)** 2.9×10^{-12} **c)** 5.63×10^8

52. a) 2.3×10^7 **b)** 7.01×10^{-9} **c)** 1.23×10^{10}

53. Masa de un átomo de hidrógeno La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente

0.000 000 000 000 000 000 001 7 gramos.

Expresa este número en forma científica.

54. Masa de un electrón La masa de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-31} kilogramos. Escribe este número en forma decimal.

55. Año luz En astronomía, las distancias a las estrellas se miden en años luz; un año luz es la distancia que un rayo de luz recorre en un año. Si la velocidad de la luz es de unos 186 000 millas por segundo, calcula el número de millas recorridas en un año luz.

56. Galaxia de la Vía Láctea

a) Los astrónomos han calculado que nuestra galaxia contiene 100 000 millones de estrellas. Expresa este número en notación científica.

b) El diámetro d de la galaxia se estima en 100 000 años luz. Expresa d en millas (consulta el Ejem. 55).

57. Número de Avogadro La cantidad de átomos de hidrógeno en un mol es el número de Avogadro, 6.02×10^{23}. Si un mol del gas tiene una masa de 1.01 gramos, calcula la masa de un átomo de hidrógeno.

58. Población de peces La dinámica poblacional de muchos peces se caracteriza por tasas de fertilidad en extremo altas en adultos y tasas de sobrevivencia muy bajas en jóvenes. Un lenguado desarrollado puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo 0.00035% de los hijuelos rebasará los tres años de edad. Utiliza la notación científica para calcular el número de descendientes que llega a los tres años.

59. Cuadros en una película La película más larga que se ha hecho fue filmada en Inglaterra en 1970 y dura nada menos que 48 horas. Supón que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, calcula el número total de cuadros en esta película y expresa tu respuesta en notación científica.

60. Números primos grandes El número $2^{44\,497} - 1$ es primo. En la época en que se determinó dicha característica, una de las computadoras más rápidas del mundo trabajó durante unos 60 días para comprobarla; esta computadora podía realizar 2×10^{11} cálculos por segundo. Con notación científica estima el número de cálculos necesarios para este cómputo. (En fecha más reciente —1992— se encontró un número primo que contiene 227 832 dígitos: $2^{756\,839} - 1$.)

61. Cociente de inteligencia El cociente de inteligencia (IQ) de una persona se determina al multiplicar por 100 el cociente entre su edad mental y su edad cronológica.

a) Encuentra el IQ de un niño de 12 años cuya edad mental es 15.

b) Proporciona la edad mental de una persona de 15 años cuyo IQ es 140.

www.elsolucionario.net

62. **Superficie de la Tierra** Las aguas cubren el 70.8%, o sea alrededor de 361×10^6 km^2, de la superficie del planeta; calcula el área total del globo terráqueo.

63. **Presión de un tornado** Cuando un tornado pasa cerca de un edificio, hay una rápida caída de la presión exterior y la presión interior no tiene tiempo para cambiar. La diferencia resultante es capaz de ocasionar una presión, hacia el exterior, de 1.4 lb/in^2 en las paredes y techo del inmueble.

a) Calcula la fuerza en libras ejercida en un pie cuadrado de una pared.

b) Calcula las toneladas de fuerza ejercida en una pared que mide 8 pies de alto y 40 pies de ancho.

32 operaciones

1.2 Exponentes y radicales

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n que se define en la tabla adjunta representa el producto del número real a multiplicado n veces por sí mismo. La expresión a^n se lee a a la enésima potencia o, simplemente, ***a* a la *n***. El entero positivo n se llama **exponente** y el número real a, **base**.

Notación exponencial

Caso general (n es cualquier entero positivo)	**Casos especiales**
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$	$a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

La próxima ilustración contiene varios ejemplos numéricos de notación exponencial.

ILUSTRACIÓN

Notación exponencial a^n

- $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

Es importante observar que si n es un entero positivo, entonces una expresión como $3a^n$ significa $3(a^n)$ pero *no* $(3a)^n$. El número real 3 se llama **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$; de igual forma, $-3a^n$ significa $(-3)a^n$ pero *no* $(-3a)^n$.

ILUSTRACIÓN

Notación ca^n

- $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $-5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$

www.elsolucionario.net

- $-2^4 = -(2^4) = -16$
- $3(-2)^3 = 3(-2)(-2)(-2) = 3(-8) = -24$

Ahora ampliamos la definición de a^n a exponentes no positivos.

Exponentes cero y negativo

Definición ($a \neq 0$)	Ejemplo
$a^0 = 1$	$3^0 = 1$, $(-\sqrt{2})^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$, $(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5}$

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$$

En vista de que el número total de factores de a a la derecha es $m + n$, esta expresión es igual a a^{m+n}; es decir,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Es posible ampliar esta fórmula a $m \leq 0$ o $n \leq 0$ con las definiciones del exponente cero y exponentes negativos, lo cual dará la ley 1 indicada en la siguiente tabla.

Con objeto de probar la ley 2, para m y n positivos anotamos:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \text{ factores de } a^m}$$

y contamos el número de veces que a aparece como factor del lado derecho. Dado que $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, donde a aparece m veces como factor, y en virtud de que el número de tales grupos de m factores es n, el número total de factores de a es $m \cdot n$; por lo tanto,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Los casos $m \leq 0$ y $n \leq 0$ se pueden demostrar con la definición de exponentes no positivos. Las tres leyes restantes se establecen de modo semejante contando factores. En las leyes 4 y 5 suponemos que los denominadores no son 0.

Leyes de exponentes para los números reales a y b y los enteros m y n

Ley	Ejemplo
(1) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
(5) **a)** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
b) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

www.elsolucionario.net

Por lo general, se usa 5(a) si $m > n$ y 5(b) si $m < n$.

Las leyes de los exponentes pueden generalizarse para obtener reglas como $(abc)^n = a^n b^n c^n$ y $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$. Algunos otros ejemplos de las leyes de los exponentes se dan en la próxima ilustración.

ILUSTRACIÓN

Leyes de los exponentes

- $x^5x^6x^2 = x^{5+6+2} = x^{13}$
- $(y^5)^7 = y^{5\cdot 7} = y^{35}$
- $(3st)^4 = 3^4s^4t^4 = 81s^4t^4$
- $\left(\frac{p}{2}\right)^5 = \frac{p^5}{2^5} = \frac{p^5}{32}$
- $\frac{c^8}{c^3} = c^{8-3} = c^5$
- $\frac{u^3}{u^8} = \frac{1}{u^{8-3}} = \frac{1}{u^5}$

Simplificar una expresión donde hay potencias de números reales, significa cambiarla a otra en que cada número real aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos. *Debemos asumir que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.*

EJEMPLO 1 *Simplificación de expresiones con exponentes*

Utiliza las leyes de los exponentes para simplificar la expresión:

a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$ **b)** $(2a^2b^3c)^4$ **c)** $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3$ **d)** $(u^{-2}v^3)^{-3}$

Solución

a) $(3x^3y^4)(4xy^5) = (3)(4)x^3xy^4y^5$ reacomodo de factores

$= 12x^4y^9$ ley 1

b) $(2a^2b^3c)^4 = 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4$ ley 3

$= 16a^8b^{12}c^4$ ley 2

c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 = \frac{(2r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3}$ ley 4

$= \frac{2^2(r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3}$ ley 3

$= \left(\frac{4r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right)$ ley 2

$= 4\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right)$ reacomodo de factores

$= 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s)$ leyes 5(b) y 5(a)

$= \frac{4s}{r^3}$ reacomodo de factores

www.elsolucionario.net

d) $(u^{-2}v^3)^{-3} = (u^{-2})^{-3}(v^3)^{-3}$ ley 3

$= u^6 v^{-9}$ ley 2

$= \dfrac{u^6}{v^9}$ definición de a^{-m}

El teorema que viene es útil para la solución de problemas con exponentes negativos.

Teorema sobre exponentes negativos

(1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$ **(2)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

PRUEBA Con las propiedades de exponentes y cocientes negativos, se obtiene

(1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{1/a^m}{1/b^n} = \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{b^n}{1} = \dfrac{b^n}{a^m}$

(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

EJEMPLO 2 *Simplificación de expresiones con exponentes negativos*

Simplifica:

a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ **b)** $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

Solución Se aplica el teorema sobre exponentes negativos y las leyes de los exponentes.

a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = \dfrac{8x^3}{4y^2} \cdot \dfrac{y^{-5}}{x^{-1}}$ disponer cocientes de modo que los exponentes negativos aparezcan en una fracción

$= \dfrac{8x^3}{4y^2} \cdot \dfrac{x^1}{y^5}$ teorema sobre exponentes negativos (1)

$= \dfrac{2x^4}{y^7}$ ley 1 de exponentes

b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2v}{u^2}\right)^3$ teorema sobre exponentes negativos (2)

$= \dfrac{2^3v^3}{(u^2)^3}$ leyes 4 y 3 de los exponentes

$= \dfrac{8v^3}{u^6}$ ley 2 de los exponentes

www.elsolucionario.net

A continuación definiremos la principal raíz enésima $\sqrt[n]{a}$ de un número real a.

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sean n un entero positivo mayor de 1 y a, un número real.

(1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

(2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *positivo* b tal que $b^n = a$.

(3) **a)** Si $a < 0$ y n es non, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *negativo* b tal que $b^n = a$.

b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es número real.

Los números complejos (que se estudian en la Sec. 2.4) se necesitan para definir $\sqrt[n]{a}$ si $a < 0$ y n es entero positivo *par*, porque para todos los números reales, b, $b^n \geq 0$ siempre que n sea par.

Si $n = 2$, se escribe $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y $\sqrt{a}$ se llama **raíz cuadrada principal** de a, o simplemente **raíz cuadrada** de a. El número $\sqrt[3]{a}$ es la raíz cúbica (principal) de a.

ILUSTRACIÓN

Principal raíz enésima $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt{16} = 4$, porque $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es número real.

Observa que $\sqrt{16} \neq \pm 4$ porque, por definición, las raíces de números reales positivos son positivas. El símbolo $\pm$ se lee "más o menos".

Para completar nuestra terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un **radical**, el número a se llama **radicando** y n es el **índice** del radical. El símbolo $\sqrt{\ }$ es el **signo radical.**

Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$; esto es, $(\sqrt{a})^2 = a$. Si $\sqrt[3]{a} = b$, entonces $b^3 = a$, o $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. En general, este modelo nos dará la propiedad 1 de la tabla siguiente.

Propiedades de $\sqrt[n]{\ }$ (n es un entero positivo)

Propiedad	Ejemplo
(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real	$(\sqrt{5})^2 = 5$, $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$
(2) $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$
(3) $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a < 0$ y n es non.	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$, $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
(4) $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$, si $a < 0$ y n es par.	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$, $\sqrt[4]{(-2)^4} = \lvert -2 \rvert = 2$

Si $a \geq 0$, entonces la propiedad (4) se reduce a la (2). También de la propiedad (4) vemos que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

para todo número real x. En particular, si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$; sin embargo, si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positiva.

Las tres leyes expresadas en la tabla que sigue son verdaderas para los enteros positivos m y n, *siempre que existan las raíces indicadas*; es decir, siempre que las raíces sean números reales.

www.elsolucionario.net

Leyes de radicales

Ley	Ejemplo
(1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2(3)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

En los radicandos de las leyes (1) y (2) intervienen productos y cocientes. Debes tener cuidado si se presentan sumas o restas en el radicando. La siguiente tabla contiene dos advertencias respecto de errores comunes.

Precaución

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	Ejemplo
(1) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
(2) $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Si c es un número real y c^n aparece como factor en un radical de índice n, podemos eliminar la c del radicando si consideramos el signo de c; por ejemplo, si $c > 0$ o si $c < 0$ y n es *non*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$. Si $c < 0$ y n es *par*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$.

ILUSTRACIÓN

Supresión de enésimas potencias de $\sqrt[n]{\ }$

- $\sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{x^2} = x\sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[4]{x^6 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4}\sqrt[4]{x^2 y^3} = |x|\sqrt[4]{x^2 y^3}$

Nota: para evitar considerar valores absolutos, *en ejemplos y ejercicios con radicales en este capítulo, supondremos que a, b, c, d, x, y, etc., que aparecen en radicandos, representan números reales positivos, a menos que indiquemos otra cosa.*

Según se muestra en la ilustración anterior y en los ejemplos siguientes, si el índice de un radical es n, reacomodamos el radicando aislando un factor de la forma p^n, donde p puede estar

www.elsolucionario.net

formado por varias letras. Entonces eliminamos $\sqrt[n]{p^n} = p$ del radical, como ya se indicó; por lo tanto, en el ejemplo 3b) el índice del radical es 3 y reacomodamos el radicando en *cubos*, con lo cual obtenemos el factor p^3, con $p = 2xy^2z$. En la parte c) el índice del radical es 2; así pues, reacomodamos el radicando en cuadrados y obtenemos un factor p^2 con $p = 3a^3b^2$.

Simplificar un radical quiere decir eliminar factores del radical hasta que el radicando contenga sólo un exponente igual o mayor que el índice del radical y el índice sea tan pequeño como sea posible.

EJEMPLO 3 *Eliminación de factores de radicales*

Simplifica el radical (todas las letras denotan números reales positivos):

a) $\sqrt[3]{320}$ **b)** $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ **c)** $\sqrt{3a^2b^3}\,\sqrt{6a^5b}$

Solución **a)**

$$\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64 \cdot 5} \quad \text{factorizar el cubo mayor en 320}$$

$$= \sqrt[3]{4^3}\,\sqrt[3]{5} \quad \text{ley 1 de radicales}$$

$$= 4\sqrt[3]{5} \quad \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{}$$

b)

$$\sqrt[3]{16x^3y^8z^4} = \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)} \quad \text{reacomodar el radicando en cubos}$$

$$= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} \quad \text{leyes 2 y 3 de los exponentes}$$

$$= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3}\,\sqrt[3]{2y^2z} \quad \text{ley 1 de radicales}$$

$$= 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z} \quad \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{}$$

c)

$$\sqrt{3a^2b^3}\,\sqrt{6a^5b} = \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^5b} \quad \text{ley 1de radicales}$$

$$= \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)} \quad \text{reacomodar el radicando en cuadrados}$$

$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)} \quad \text{leyes 2 y 3 de los exponentes}$$

$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\,\sqrt{2a} \quad \text{ley 1 de radicales}$$

$$= 3a^3b^2\sqrt{2a} \quad \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{}$$

Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$, entonces al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminaremos el radical del denominador porque

$$\sqrt[n]{a^k}\,\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a\,.$$

Este proceso se llama **racionalización del denominador**. Algunos casos especiales se expresan en la próxima tabla.

www.elsolucionario.net

Racionalización de denominadores de cocientes $(a > 0)$

Factor en el denominador	Multiplicar numerador y denominador por	Factor resultante
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[7]{a^3}$	$\sqrt[7]{a^4}$	$\sqrt[7]{a^3}\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^7} = a$

El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 *Racionalización de denominadores*

Racionaliza el denominador:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **d)** $\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}$

Solución

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

c) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$

Si usamos calculadora a fin de encontrar aproximaciones decimales de radicales, no tendremos beneficio alguno al racionalizar denominadores como $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$ o $\sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$, según se hizo en los ejemplos 4a) y 4c); sin embargo, ante simplificaciones *algebraicas* en ocasiones es deseable cambiar las expresiones en estas formas. Asimismo, en cursos avanzados de matemáticas (como cálculo integral), convertir $1/\sqrt[3]{x}$ a $\sqrt[3]{x^2}/x$ como en el ejemplo 4b) puede complicar *más* un problema. En dichos cursos es más fácil trabajar con la expresión $1/\sqrt[3]{x}$ que con la forma racionalizada.

A continuación usaremos radicales para definir *exponentes racionales*.

Definición de exponentes racionales

Sea m/n un número racional, donde n es un entero positivo mayor de 1. Si a es un número real tal que existe $\sqrt[n]{a}$, entonces

(1) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(3) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$

www.elsolucionario.net

Al evaluar $a^{m/n}$ en (2), por lo general usamos $(\sqrt[n]{a})^m$; es decir, primero tomamos la raíz n-ésima de a y luego elevamos el resultado a la potencia m, como en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN

Notación exponencial $a^{m/n}$

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
- $x^{3/5} = (\sqrt[5]{x})^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = (\sqrt[3]{125})^2 = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25$
- $\left(\frac{32}{243}\right)^{3/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{32}{243}}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

Las leyes de los exponentes son ciertas para exponentes racionales e *irracionales*, como $3^{\sqrt{2}}$ o 5^{π}, considerados en el capítulo 5.

A fin de simplificar una expresión que contiene potencias racionales de letras que representan números reales, la convertimos en una expresión en que cada letra aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos. Como hicimos con los radicales, supondremos que todas las letras representan números reales positivos, a menos que se indique de otra manera.

EJEMPLO 5 *Simplificación de potencias racionales*

Simplifica:

a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ **b)** $(r^2s^6)^{1/3}$ **c)** $\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

Solución **a)**

$$(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} = (\sqrt[3]{-27})^2(\sqrt{4})^{-5} \quad \text{definición de exponentes racionales}$$
$$= (-3)^2(2)^{-5} \quad \text{tomar raíces}$$
$$= \frac{(-3)^2}{2^5} \quad \text{definición de exponentes negativos}$$
$$= \frac{9}{32} \quad \text{tomar potencias}$$

b)

$$(r^2s^6)^{1/3} = (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} \quad \text{ley 3 de los exponentes}$$
$$= r^{2/3}s^2 \quad \text{ley 2 de los exponentes}$$

c)

$$\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) = \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) \quad \text{leyes de los exponentes}$$
$$= \frac{(4 \cdot 3)x^{4/3 - 5/6}}{y^{1 + (1/3)}} \quad \text{ley 1 de los exponentes}$$
$$= \frac{12x^{8/6 - 5/6}}{y^{4/3}} \quad \text{denominador común}$$
$$= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}} \quad \text{simplificar}$$

www.elsolucionario.net

Los exponentes racionales son útiles para problemas con radicales que no sean del mismo índice, como se ilustra en este ejemplo.

EJEMPLO 6 *Combinación de radicales*

Cambia a una expresión que contenga un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$:

a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

Solución Al introducir exponentes racionales se obtiene

a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a} = a^{1/3}\,a^{1/2} = a^{(1/3)+(1/2)} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a^{1/4}}{a^{2/3}} = a^{(1/4)-(2/3)} = a^{-5/12} = \dfrac{1}{a^{5/12}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$

En los ejercicios 1.2, siempre que el índice de un radical sea par (o se utilice un exponente racional m/n con n par), supondremos que las letras que aparecen en el radicando denotan números reales positivos, a menos que se indique lo contrario.

1.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 10: expresa el número en la forma a/b, donde a y b son enteros.

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$
2. $(-3)^3$
3. $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}$
4. $\dfrac{2^0+0^2}{2+0}$
5. -2^4+3^{-1}
6. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2^{-4}$
7. $16^{-3/4}$
8. $9^{5/2}$
9. $(-0.008)^{2/3}$
10. $(0.008)^{-2/3}$

Ejercicios 11 al 46: simplifica.

11. $\left(\frac{1}{2}x^4\right)(16x^5)$
12. $(-3x^{-2})(4x^4)$
13. $\dfrac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$
14. $\dfrac{(2x^2)^3}{4x^4}$
15. $\left(\frac{1}{6}a^5\right)(-3a^2)(4a^7)$
16. $(-4b^3)\left(\frac{1}{6}b^2\right)(-9b^4)$
17. $\dfrac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3}$
18. $\dfrac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3}$
19. $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$
20. $(x^2yz^3)\,(-2xz^2)(x^3y^{-2})$
21. $(8x^4y^{-3})\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$
22. $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$
23. $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-3}\right)^{-1}$
24. $(-2xy^2)^5\left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$
25. $(3y^3)^4(4y^2)^{-3}$
26. $(-3a^2b^{-5})^3$
27. $(-2r^4s^{-3})^{-2}$
28. $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^3\right)$
29. $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$
30. $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$
31. $\left(\dfrac{3x^5y^4}{x^0y^{-3}}\right)^2$
32. $(4a^2b)^4\left(\dfrac{-a^3}{2b}\right)^2$
33. $(4a^{3/2})(2a^{1/2})$
34. $(-6x^{7/5})(2x^{8/5})$
35. $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$
36. $(8r)^{1/3}(2r^{1/2})$
37. $(27a^6)^{-2/3}$
38. $(25z^4)^{-3/2}$
39. $(8x^{-2/3})x^{1/6}$
40. $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$
41. $\left(\dfrac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$
42. $\left(\dfrac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$
43. $\left(\dfrac{x^6}{9y^{-4}}\right)^{-1/2}$
44. $\left(\dfrac{c^{-4}}{16\,d^8}\right)^{3/4}$
45. $\dfrac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$
46. $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$

Ejercicios 47 al 52: reescribe la expresión con exponentes racionales.

47. $\sqrt[4]{x^3}$
48. $\sqrt[3]{x^5}$
49. $\sqrt[3]{(a+b)^2}$
50. $\sqrt{a+\sqrt{b}}$
51. $\sqrt{x^2+y^2}$
52. $\sqrt[3]{r^3-s^3}$

www.elsolucionario.net

Ejercicios 53 al 56: reescribe la expresión usando un radical.

53. a) $4x^{3/2}$ b) $(4x)^{3/2}$

54. a) $4 + x^{3/2}$ b) $(4 + x)^{3/2}$

55. a) $8 - y^{1/3}$ b) $(8 - y)^{1/3}$

56. a) $8y^{1/3}$ b) $(8y)^{1/3}$

Ejercicios 57 al 80: simplifica la expresión y racionaliza el denominador cuando sea apropiado.

57. $\sqrt{81}$ 58. $\sqrt[3]{-125}$

59. $\sqrt[5]{-64}$ 60. $\sqrt[4]{256}$

61. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 62. $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$

63. $\sqrt{9x^{-4}y^6}$ 64. $\sqrt{16a^8b^{-2}}$

65. $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$ 66. $\sqrt[4]{81r^5s^8}$

67. $\sqrt{\dfrac{3x}{2y^3}}$ 68. $\sqrt{\dfrac{1}{3x^3y}}$

69. $\sqrt[3]{\dfrac{2x^4y^4}{9x}}$ 70. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2y^5}{4x}}$

71. $\sqrt[4]{\dfrac{5x^8y^3}{27x^2}}$ 72. $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y^{12}}{125x}}$

73. $\sqrt[5]{\dfrac{5x^7y^2}{8x^3}}$ 74. $\sqrt[5]{\dfrac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

75. $\sqrt[4]{(3x^5y^{-2})^4}$ 76. $\sqrt[6]{(2u^{-3}v^4)^6}$

77. $\sqrt[5]{\dfrac{8x^3}{y^4}}\sqrt[5]{\dfrac{4x^4}{y^2}}$ 78. $\sqrt{5x^7}\sqrt{10x^3y^3}$

79. $\sqrt[3]{3t^4v^2}\sqrt[3]{-9t^{-1}v^4}$ 80. $\sqrt[3]{(2r-s)^3}$

Ejercicios 81 al 84: simplifica la expresión, suponiendo que x y y pueden ser negativas.

81. $\sqrt{x^6y^4}$ 82. $\sqrt{x^4y^{10}}$

83. $\sqrt[4]{x^8(y-1)^{12}}$ 84. $\sqrt[4]{(x+2)^{12}y^4}$

Ejercicios 85 al 90: sustituye el símbolo $\square$ con $=$ o $\neq$ para que el enunciado resultante sea verdadero, siempre que la expresión tenga significado. Dar una razón para la respuesta.

85. $(a^r)^2 \square a^{(r^2)}$ 86. $(a^2+1)^{1/2} \square a+1$

87. $a^r b^r \square (ab)^{r}$ 88. $\sqrt{a^r} \square (\sqrt{a})^r$

89. $\sqrt[n]{\dfrac{1}{c}} \square \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$ 90. $a^{1/k} \square \dfrac{1}{a^k}$

C Ejercicios 91 y 92: al evaluar números negativos elevados a potencias fraccionarias, puedes requerir evaluar la raíz y la potencia del entero por separado; por ejemplo, $(-3)^{2/5}$ se puede evaluar satisfactoriamente como $[(-3)^{1/5}]^2$ o bien $[(-3)^2]^{1/5}$, de otra manera quizá aparezca un mensaje de error. Calcula la expresión de número real a cuatro lugares decimales.

91. a) $(-3)^{2/5}$ b) $(-5)^{4/3}$

92. a) $(-1.2)^{3/7}$ b) $(-5.08)^{7/3}$

C Ejercicios 93 y 94: calcula la expresión de número real a cuatro lugares decimales.

93. a) $\sqrt{\pi+1}$ b) $\sqrt[3]{15.1} + 5^{1/4}$

94. a) $(2.6-1.9)^{-2}$ b) $5^{\sqrt{7}}$

95. **Cuenta de ahorros** Uno de los bancos más antiguos en Estados Unidos es el Bank of America, fundado en 1812. Si se hubieran depositado $200 en aquel tiempo en una cuenta que pagaba 4% de interés anual, luego de 180 años la cantidad habría crecido a $200(1.04)^{180}$ dólares. Calcula esta cantidad al centavo más cercano.

96. **Distancia de visibilidad** En un día despejado, la distancia d (en millas) a que se puede ver desde un edificio de altura h (en pies) se puede calcular mediante $d = 1.2\sqrt{h}$. Calcula la distancia que se puede ver desde lo alto de la Torre Sears de Chicago, que mide 1454 pies de alto.

97. **Largo de un lenguado** La relación largo-ancho del lenguado del Pacífico se puede calcular mediante la fórmula $L = 0.46\sqrt[3]{W}$, donde W es en kilogramos y L en metros. El lenguado más grande (comprobado) pesaba 230 kilogramos. Calcula su longitud.

98. **Peso de una ballena** La relación largo-peso para la ballena sei se puede calcular con $W = 0.0016L^{2.43}$, donde W es en toneladas y L en pies. Calcula el peso de una ballena que mide 25 pies de largo.

99. ***Handicaps* para levantadores de pesas** La fórmula de O'Carroll se usa medir el *handicap* necesario para los levantadores de pesas. Si un atleta que pesa b kilogramos levanta w kilogramos de peso, entonces el peso W con *handicap* está dado por

$$W = \frac{w}{\sqrt[3]{b-35}}.$$

Supón que dos atletas que pesan 75 kg y 120 kg levantan pesos de 180 y 250 kilogramos, respectivamente. Utiliza la fórmula de O'Carroll para determinar el mejor levantador de pesas.

100. **Superficie corporal** La superficie corporal S de una persona (en ft^2) se puede calcular con la fórmula

$$S = (0.1091)w^{0.425}h^{0.725},$$

www.elsolucionario.net

en donde la estatura h es en pulgadas (in) y el peso w es en libras (lb).

a) Calcula S para una persona que mide 6 pies de estatura y pesa 175 libras.

b) Si una persona mide 5 pies y 6 pulgadas de alto, ¿qué efecto tiene sobre S un aumento de 10% en peso?

101. Peso de hombres El promedio de peso W (en libras) para hombres de estatura h entre 64 y 79 pulgadas se puede calcular con la fórmula $W = 0.1166h^{1.7}$. Haz una tabla para W con $h = 64, 65, \ldots, 79$. Redondea todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	
68		76	
69		77	
70		78	
71		79	

102. Peso de mujeres La media del peso W (en libras) para mujeres de estatura h entre 60 y 75 pulgadas se puede calcular usando la fórmula $W = 0.1049h^{1.7}$. Elabora una tabla para W con $h = 60, 61, \ldots 75$. Redondea todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
60		68	
61		69	
62		70	
63		71	
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	

1.3 Expresiones algebraicas

Algunas veces empleamos la notación y la terminología de los conjuntos para describir relaciones matemáticas. Un **conjunto** es una colección de objetos de algún tipo y los objetos se llaman **elementos** del conjunto. Para denotar los conjuntos suelen usarse letras mayúsculas, como R, S, T, . . .; las minúsculas (a, b, x, y) por lo general representan elementos de los conjuntos. En todo este libro, $\mathbb{R}$ denotará el conjunto de los números reales y $\mathbb{Z}$ el de los enteros.

Dos conjuntos S y T son **iguales** (se escribe $S = T$), si S y T contienen exactamente los mismos elementos. Anotamos $S \neq T$ si S y T no son iguales. En la siguiente tabla aparecen otras notaciones y terminología.

Notación o terminología	Significado	Ejemplo
$a \in S$	a es un elemento de S	$3 \in \mathbb{Z}$
$a \notin S$	a no es elemento de S	$\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$
S es un **subconjunto** de T	Todo elemento de S es elemento de T	$\mathbb{Z}$ es subconjunto de $\mathbb{R}$

(continúa)

www.elsolucionario.net

Notación o terminología	Significado	Ejemplo
Constante	Una letra o símbolo que representa un elemento *específico* de un conjunto	$5, -\sqrt{2}, \pi$
Variable	Una letra o símbolo que representa *cualquier* elemento o conjunto	Que x denote cualquier número real

En general usamos las últimas letras del alfabeto (por ejemplo, x, y y z), para variables y las primeras (como a, b y c), para constantes. En todo este texto, a menos que se especifique lo contrario, las variables representan números reales.

Si los elementos de un conjunto S tienen cierta propiedad, escribimos que $S = \{x: \}$ en donde la propiedad que describe a la variable x se indica en el espacio que sigue a los dos puntos. La expresión comprendida en las llaves y los dos puntos se lee "el conjunto de toda x tal que . . .", donde completamos la frase al escribir la propiedad deseada; por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ se lee "el conjunto de toda x tal que x es mayor que 3".

Para conjuntos finitos, en ocasiones listamos todos los elementos del conjunto entre las llaves. Así, si el conjunto T está formado por los primeros cinco enteros positivos, anotamos $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando describimos conjuntos de esta manera, el orden usado al especificar los elementos es irrelevante, de modo que se puede escribir $T = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, $T = \{4, 3, 2, 5, 1\}$, y así sucesivamente.

Si comenzamos con cualquier colección de variables y números reales, entonces obtenemos una **expresión algebraica** al aplicar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias o extracción de raíces. Si sustituimos las variables por números específicos en una expresión algebraica, el número real que resulte se llama **valor** de la expresión para tales números. El **dominio** de una expresión algebraica está formado por todos los números reales que puedan representar las variables. Así, a menos que se indique de otra manera, *suponemos que el dominio está formado por los números reales que —cuando se sustituyen por las variables— hacen que la expresión tenga significado, en el sentido de que los denominadores no pueden ser iguales a cero y las raíces siempre existen.* En la próxima tabla hay dos ejemplos.

Expresiones algebraicas

Ejemplos	Dominio	Valor típico
$x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$	toda $x > 0$	en $x = 4$ $4^3 - 5(4) + \dfrac{6}{\sqrt{4}} = 64 - 20 + 3 = 47$
$\dfrac{2xy + (3/x^2)}{\sqrt[3]{y - 1}}$	toda $x \neq 0$ y toda $y \neq 1$	en $x = 1$ y $y = 9$ $\dfrac{2(1)(9) + (3/1^2)}{\sqrt[3]{9 - 1}} = \dfrac{18 + 3}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{21}{2}$

www.elsolucionario.net

Si x es una variable, entonces un **monomio** en x es una expresión de la forma ax^n, en donde a es un número real y n es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio**, una suma de tres monomios. Un *polinomio en x* es una suma de cualquier número de monomios en x. Otro modo de decirlo es el siguiente.

Definición de polinomio

Un **polinomio en x** es una suma de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

en donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real. Si $a_n \neq 0$, se dice que el polinomio tiene **grado n**.

Cada expresión $a_k x^k$ en la suma es un término del polinomio. Si el coeficiente a_k es cero, se omite el término $a_k x^k$. El coeficiente a_k de la potencia más alta de x es el **coeficiente principal** del polinomio.

La siguiente tabla contiene ilustraciones específicas de polinomios.

Polinomios

Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Por definición, dos polinomios son **iguales** si y sólo si son del mismo grado y los coeficientes de potencias semejantes de x son iguales. Si todos los coeficientes del polinomio son cero, se obtiene el llamado **polinomio cero** y se denota con 0. Sin embargo, por convención, el grado del polinomio cero *no es* cero sino indefinido. Si c es un *número real diferente de cero*, entonces c es un polinomio de grado 0. Tales polinomios (incluyendo el polinomio cero) se conocen como **polinomios constantes**.

Si el coeficiente de un polinomio es negativo, por lo general usamos un signo menos entre términos apropiados. Para ilustrar lo anterior, tenemos:

$$3x^2 + (-5)x + (-7) = 3x^2 - 5x - 7.$$

También podemos considerar polinomios con variables que no sean x (o variables distintas de x); por ejemplo, $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. En términos generales, colocamos los términos de un polinomio con las potencias de la variable en orden decreciente y escribimos

$$\tfrac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4 = -3z^7 - \sqrt{5}z^4 + \tfrac{2}{5}z^2 + 8.$$

Por otro lado, podemos considerar que un polinomio en x es una expresión algebraica obtenida empleando nada más sumas, restas y multiplicaciones que incluyan x. Si una expresión algebraica contiene divisiones o raíces que incluyan una variable x, entonces no es un polinomio en x.

www.elsolucionario.net

ILUSTRACIÓN

No polinomios

■ $\frac{1}{x} + 3x$ ■ $\frac{x-5}{x^2+2}$ ■ $3x^2 + \sqrt{x} - 2$

Puesto que los polinomios representan números reales, estamos en posibilidad de aplicar las propiedades descritas en la sección 1.1. En particular, si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones con polinomios, podemos simplificar los resultados mediante las propiedades de los números reales, como se demuestra en estos ejemplos.

EJEMPLO 1 *Suma y resta de polinomios*

a) Halla la suma: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$

b) Halla la resta: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3)$

Solución **a)** Para obtener la suma de cualesquier dos polinomios en x, sumamos los coeficientes de potencias semejantes de x.

$$(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3)$$
$$= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 \quad \text{eliminar paréntesis}$$
$$= (1 - 4)x^3 + (2 + 5)x^2 - 5x + (7 - 3) \quad \text{sumar coeficientes de potencias semejantes de } x$$
$$= 5x^3 + 3x^2 - 5x + 4 \quad \text{simplificar}$$

Mostramos el agrupamiento del primer paso a fin de aclarar el proceso, pero puedes omitirlo una vez que tengas práctica en este tipo de operaciones.

b) Para restar polinomios primero eliminamos los paréntesis pero, cuidado, el signo menos que precede al segundo par de paréntesis cambia el signo de *cada* término de ese polinomio.

$$(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$$
$$= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3 \quad \text{eliminar paréntesis}$$
$$= (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3)$$
$$= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad \text{sumar coeficientes de potencias semejantes de } x$$
$$= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \quad \text{simplificar}$$

EJEMPLO 2 *Multiplicación de binomios*

Halla el producto: $(4x + 5)(3x - 2)$

Solución Puesto que $3x - 2 = 3x + (-2)$, procedemos como en el ejemplo 1 de la sección 1.1:

$$(4x + 5)(3x - 2)$$
$$= (4x)(3x) + (4x)(-2) + (5)(3x) + (5)(-2) \quad \text{propiedades distributivas}$$
$$= 12x^2 - 8x + 15x - 10 \quad \text{multiplicar}$$
$$= 12x^2 + 7x - 10 \quad \text{simplificar}$$

www.elsolucionario.net

Después de adquirir práctica en problemas del tipo del ejemplo 2, podrás efectuar mentalmente los dos primeros pasos y continuar hasta la forma final de manera directa.

En el ejemplo que sigue se ilustran dos métodos para hallar el producto de dos polinomios.

EJEMPLO 3 *Multiplicación de polinomios*

Halla el producto: $(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$

Solución **Método 1** Primero usamos una propiedad distributiva, tratando al polinomio $2x^3 + 3x - 1$ como si fuera un solo número real.

$$(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$$
$$= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) - 4(2x^3 + 3x - 1)$$

A continuación utilizamos tres veces otra propiedad distributiva y simplificamos el resultado, con lo cual

$$(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$$
$$= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x - 8x^3 - 12x + 4$$
$$= 2x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 17x + 4.$$

Notarás que multiplicamos los tres monomios del primer polinomio por cada uno de los tres monomios del segundo polinomio, y esto produjo un total de nueve términos.

Método 2 Listamos los polinomios y enseguida los multiplicamos, dejando espacios para las potencias de x que tengan coeficiente 0:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
2x^3 & + & 3x & - 1 & & & & & & \\
x^2 & + & 5x & - 4 & & & & & & \\
\hline
2x^5 & & & + 3x^3 & - & x^2 & & & & = x^2 \quad (2x^3 + 3x - 1) \\
 & & 10x^4 & & + & 15x^2 & - & 5x & & = 5x \quad (2x^3 + 3x - 1) \\
 & & & - 8x^3 & & & - & 12x & + 4 & = -4 \quad (2x^3 + 3x - 1) \\
\hline
2x^5 & + & 10x^4 & - 5x^3 & + & 14x^2 & - & 17x & + 4 & = \text{suma de lo anterior}
\end{array}$$

En la práctica se omiten las razones (igualdades) escritas a la derecha en los últimos cuatro renglones.

También podemos considerar polinomios de más de una variable; por ejemplo, un polinomio en *dos* variables x y y es una suma de términos, cada uno de la forma $ax^m y^k$ para un número real a, y enteros no negativos m y k. Un ejemplo es

$$3x^4y + 2x^3y^5 + 7x^2 - 4xy + 8y - 5.$$

Otros polinomios pueden comprender tres variables (x, y y z) o *cualquier* número de variables. La suma, resta y multiplicación se efectúan utilizando las propiedades de los números reales, igual que con polinomios en una variable.

El siguiente ejemplo ilustra la división de un polinomio entre un monomio.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4 *División de un polinomio entre un monomio*

Expresa como polinomio en x y y:

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy}$$

Solución

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy} = \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy} \quad \text{dividir cada término entre } 2xy$$

$$= 3xy^2 + 2x^2y - 5 \quad \text{simplificar}$$

Los productos de la siguiente tabla aparecen con tanta frecuencia que merecen atención especial; puedes comprobar la validez de cada fórmula por multiplicación. En (2) y (3) usamos el signo superior o el inferior en ambos lados; por lo tanto, en realidad (2) es *dos* fórmulas:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{y} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Del mismo modo, (3) representa dos fórmulas.

Fórmulas de productos

Fórmula	Ejemplo
(1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(2a + 3)(2a - 3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
(2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2$
	$= 4a^2 - 12a + 9$
(3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3$
	$= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

En el próximo ejemplo hay varias demostraciones de las fórmulas de productos.

EJEMPLO 5 *Uso de fórmulas de productos*

Encuentra el producto:

a) $(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s})$ **b)** $\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$ **c)** $(2a - 5b)^3$

Solución **a)** Usamos la fórmula (1), con $x = 2r^2$ y $y = \sqrt{s}$:

$$(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s}) = (2r^2)^2 - (\sqrt{s})^2$$

$$= 4r^4 - s$$

b) Aplicamos la fórmula (2), con $x = \sqrt{c}$ y $y = \frac{1}{\sqrt{c}}$

$$\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = (\sqrt{c})^2 + 2 \cdot \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

$$= c + 2 + \frac{1}{c}$$

www.elsolucionario.net

Observa que la última expresión *no es* un polinomio.

c) Utilizamos la fórmula (3), con $x = 2a$ y $y = 5b$:

$$\begin{aligned}(2a - 5b)^3 &= (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3 \\ &= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3\end{aligned}$$

Si un polinomio es un producto de otros polinomios, entonces cada polinomio del producto es un **factor** del polinomio original. El proceso de expresar una suma de términos como un producto se llama **factorización**; por ejemplo, como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, los polinomios $x + 3$ y $x - 3$ son factores de $x^2 - 9$.

La factorización desempeña un importante papel en matemáticas porque permite reducir el estudio de una expresión complicada al de varias expresiones más sencillas; por ejemplo, las propiedades del polinomio $x^2 - 9$ se pueden determinar examinando los factores $x + 3$ y $x - 3$. Según veremos en el capítulo 2, otro uso destacado de la factorización es resolver ecuaciones.

Nos interesan principalmente los **factores no triviales** de los polinomios —esto es, factores que contienen polinomios de grado positivo—; sin embargo, si los coeficientes se limitan a *enteros*, entonces eliminamos un factor integral común de cada término del polinomio; por ejemplo,

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3).$$

Un polinomio con coeficientes en algún conjunto S de números es **primo**, o **irreducible** sobre S, si no puede escribirse como producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S. Un polinomio es irreducible sobre un conjunto S pero no sobre otro; por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible sobre los números racionales (puesto que no se puede expresar como un producto de dos polinomios que tengan coeficientes *racionales*), pero no lo es sobre los números reales, ya que se puede escribir

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

De igual forma, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales pero, como veremos en la sección 2.4, no sobre los números complejos.

Todo polinomio $ax + b$ de grado 1 es irreducible.

Antes de factorizar un polinomio es necesario especificar el sistema numérico (o conjunto) del cual han de elegirse los coeficientes. En este capítulo usaremos la regla de que *si un polinomio tiene coeficientes enteros, los factores han de ser polinomios con coeficientes enteros.* **Factorizar un polinomio** significa expresarlo como un producto de polinomios irreducibles.

El **máximo factor común (mfc)** de una expresión es el producto de los factores que aparecen en cada término, cada uno elevado al exponente más pequeño diferente de cero que aparezca en cualquier término. Al factorizar polinomios, es aconsejable factorizar primero el máximo factor común, como se muestra en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN

Polinomios factorizados

- $25x^2 + 25x - 150 = 25(x^2 + x - 6) = 25(x + 3)(x - 2)$
- $4x^5y - 9x^3y^3 = x^3y(4x^2 - 9y^2) = x^3y(2x + 3y)(2x - 3y)$

Por lo general es difícil factorizar polinomios de grado mayor que 2. En casos sencillos las siguientes fórmulas de factorización son útiles, cada una de las cuales se puede comprobar

www.elsolucionario.net

multiplicando los factores a la derecha del signo igual. Es posible demostrar que los factores $x^2 + xy + y^2$ y $x^2 - xy + y^2$ en la diferencia y suma de dos cubos, respectivamente, son irreducibles sobre los números reales.

Fórmulas de factorización

Fórmula	Ejemplo
(1) Diferencia de dos cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = (3a + 4)(3a - 4)$
(2) Diferencia de dos cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3 = (2a - 3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2] = (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$
(3) Suma de dos cubos: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$125a^3 + 1 = (5a)^3 + (1)^3 = (5a + 1)[(5a)^2 - (5a)(1) + (1)^2] = (5a + 1)(25a^2 - 5a + 1)$

En los siguientes dos ejemplos hay varias demostraciones del uso de las fórmulas de factorización.

EJEMPLO 6 *Diferencia de dos cuadrados*

Factoriza el polinomio:

a) $25r^2 - 49s^2$ **b)** $81x^4 - y^4$ **c)** $16x^4 - (y - 2z)^2$

Solución **a)** Se aplica la fórmula de la diferencia de dos cuadrados, con $x = 5r$ y $y = 7s$:

$$25r^2 - 49s^2 = (5r)^2 - (7s)^2 = (5r + 7s)(5r - 7s)$$

b) Escribimos $81x^4 = (9x^2)^2$ y $y^4 = (y^2)^2$ y aplicamos dos veces la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} 81x^4 - y^4 &= (9x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (9x^2 + y^2)(9x^2 - y^2) \\ &= (9x^2 + y^2)[(3x)^2 - (y)^2] \\ &= (9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y) \end{aligned}$$

c) Escribimos $16x^4 = (4x^2)^2$ y aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y - 2z)^2 &= (4x^2)^2 - (y - 2z)^2 \\ &= [(4x^2) + (y - 2z)][(4x^2) - (y - 2z)] \\ &= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z) \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 *Suma y diferencia de dos cubos*

Factoriza el polinomio:

a) $a^3 + 64b^3$ **b)** $8c^6 - 27d^9$

Solución **a)** Aplicamos la fórmula de la suma de dos cubos, con $x = a$ y $y = 4b$:

www.elsolucionario.net

$$\begin{aligned} a^3 + 64b^3 &= a^3 + (4b)^3 \\ &= (a + 4b)[a^2 - a(4b) + (4b)^2] \\ &= (a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2) \end{aligned}$$

b) Usamos la fórmula de la diferencia de dos cubos, con $x = 2c^2$ y $y = 3d^3$:

$$\begin{aligned} 8c^6 - 27d^9 &= (2c^2)^3 - (3d^3)^3 \\ &= (2c^2 - 3d^3)[(2c^2)^2 + (2c^2)(3d^3) + (3d^3)^2] \\ &= (2c^2 - 3d^3)(4c^4 + 6c^2d^3 + 9d^6) \end{aligned}$$

La factorización de un trinomio $px^2 + qx + r$, donde p, q y r son enteros, debe ser de la forma

$$px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d),$$

donde a, b, c y d son enteros. Se deduce que

$$ac = p, \qquad bd = r, \qquad \text{y} \qquad ad + bc = q.$$

Sólo un número limitado de opciones para a, b, c y d satisface estas condiciones; si ninguna de las opciones funciona, entonces $px^2 + qx + r$ es irreducible. El proceso de probar diversas posibilidades, como se describe en el siguiente ejemplo, se llama **método de prueba y error**. Este método también es aplicable a trinomios de la forma $px^2 + qxy + ry^2$, en cuyo caso la factorización debe ser de la forma $(ax + by)(cx + dy)$.

EJEMPLO 8 *Factorización de un trinomio mediante prueba y error*

Factorizar $6x^2 - 7x - 3$.

Solución Si escribimos

$$6x^2 - 7x - 3 = (ax + b)(cx + d),$$

entonces se tienen que cumplir estas relaciones:

$$ac = 6, \qquad bd = -3, \qquad \text{y} \qquad ad + bc = -7$$

Si suponemos que a y c son positivas, entonces todos los valores posibles están dados en la tabla que sigue:

a	1	6	2	3
c	6	1	3	2

Por lo tanto, si $6x^2 - 7x - 3$ es factorizable, una de estas expresiones es verdadera:

$$6x^2 - 7x - 3 = (x + b)(6x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (6x + b)(x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (2x + b)(3x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (3x + b)(2x + d)$$

www.elsolucionario.net

Luego consideramos todos los valores posibles para b y d. Como $bd = 3$, éstos son:

b	1	−1	3	−3
d	−3	3	−1	1

Probamos con varios valores (quizá con todos) y encontramos que $b = -3$ y $d = 1$; esto es,

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

Como prueba, multiplica la factorización final para ver si se obtiene el polinomio dado.

El método de prueba y error ilustrado en el ejemplo 8 puede ser largo y tedioso si los coeficientes de los polinomos son grandes y tienen muchos factores primos. Con casos sencillos, a menudo es posible llegar a la opción correcta con rapidez.

EJEMPLO 9 *Factorización de polinomios*

Factoriza:

a) $12x^2 - 36xy + 27y^2$ **b)** $4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3$

Solución **a)** Puesto que cada término tiene 3 como factor, empezamos escribiendo

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2).$$

Una factorización de $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como producto de dos polinomios de primer grado debe ser de la forma

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

Por lo tanto, $ac = 4$, $bd = 9$ y $ad + bc = -12$.

Con el método de prueba y error (Ejem. 8), obtenemos:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)(2x - 3y) = (2x - 3y)^2.$$

Así, $$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2) = 3(2x - 3y)^2.$$

b) Como cada término tiene x^2y como factor, comenzamos por escribir

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y\,(4x^2 - 11xy + 6y^2).$$

Por prueba y error obtenemos la factorización

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x - 3y)(x - 2y).$$

Si una suma contiene cuatro o más términos, es posible agrupar los términos de manera adecuada y luego encontrar una factorización mediante las propiedades distributivas. Esta técnica, llamada **factorización por agrupación**, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 *Factorización por agrupación*

Factoriza:

a) $4ac + 2bc - 2ad - bd$ **b)** $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

c) $x^2 - 16y^2 + 10x + 25$

www.elsolucionario.net

Solución **a)** Agrupamos los dos primeros términos y los dos últimos, y luego procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= (4ac + 2bc) - (2ad + bd) \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \end{aligned}$$

En esta etapa no hemos factorizado la expresión dada porque el lado derecho tiene la forma

$$2ck - dk \qquad \text{con} \qquad k = 2a + b.$$

Sin embargo, si factorizamos k, entonces

$$2ck - dk = (2c - d)k = (2c - d)(2a + b).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \\ &= (2c - d)(2a + b). \end{aligned}$$

b) Agrupamos los dos primeros términos, los dos últimos y continuamos de esta manera:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= (3x^3 + 2x^2) - (12x + 8) \\ &= x^2(3x + 2) - 4(3x + 2) \\ &= (x^2 - 4)(3x + 2) \end{aligned}$$

Por último, usamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para $x^2 - 4$ y obtenemos la factorización:

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x + 2)(x - 2)(3x + 2)$$

c) Primero reacomodamos y agrupamos términos, y luego aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 16y^2 + 10x + 25 &= (x^2 + 10x + 25) - 16y^2 \\ &= (x + 5)^2 - (4y)^2 \\ &= [(x + 5) + 4y][(x + 5) - 4y] \\ &= (x + 4y + 5)(x - 4y + 5) \end{aligned}$$

1.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 44: expresa como un polinomio.

1. $(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1) + (9x^3 - 4x^2 - 6x)$
2. $(7x^3 + 2x^2 - 11x + (-3x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$
3. $(4x^3 + 5x - 3) - (3x^3 + 2x^2 + 5x - 7)$
4. $(6x^3 - 2x^2 + x - 2) - (8x^2 - x - 2)$
5. $(2x + 5)(3x - 7)$
6. $(3x - 4)(2x + 9)$
7. $(5x + 7y)(3x + 2y)$
8. $(4x - 3y)(x - 5y)$
9. $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u - 2)$
10. $(3u - 1)(u + 2) + 7u(u + 1)$
11. $(3x + 5)(2x^2 + 9x - 5)$
12. $(7x - 4)(x^3 - x^2 + 6)$
13. $(t^2 + 2t - 5)(3t^2 - t + 2)$
14. $(r^2 - 8r - 2)(-r^2 + 3r - 1)$
15. $(x + 1)(2x^2 - 2)(x^3 + 5)$
16. $(2x - 1)(x^2 - 5)(x^3 - 1)$
17. $\dfrac{8x^2y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$
18. $\dfrac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$
19. $\dfrac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$

www.elsolucionario.net

20. $\dfrac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

21. $(2x + 3y)(2x - 3y)$

22. $(5x + 4y)(5x - 4y)$

23. $(x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$

24. $(3x + y^3)(3x - y^3)$

25. $(x^2 + 9)(x^2 - 4)$

26. $(x^2 + 1)(x^2 - 16)$

27. $(3x + 2y)^2$

28. $(5x - 4y)^2$

29. $(x^2 - 3y^2)^2$

30. $2x^2 + 5y^2)^2$

31. $(x + 2)^2(x - 2)^2$

32. $(x + y)2(x - y)^2$

33. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

34. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

35. $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

36. $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

37. $(x - 2y)^3$

38. $(x + 3y)^3$

39. $(2x + 3y)^3$

40. $(3x - 4y)^3$

41. $(a + b - c)^2$

42. $(x^2 + x + 1)^2$

43. $(2x + y - 3z)^2$

44. $(x - 2y + 3z)^2$

Ejercicios 45 al 100: factoriza el polinomio.

45. $rs + 4st$

46. $4u^2 - 2uv$

47. $3a^2b^2 - 6a^2b$

48. $10xy + 15xy^2$

49. $3x^2y^3 - 9x^3y^2$

50. $16x^5y^2 + 8x^3y^3$

51. $15x^3y^5 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$

52. $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$

53. $8x^2 - 53x - 21$

54. $7x^2 + 10x - 8$

55. $x^2 + 3x + 4$

56. $3x^2 - 4x + 2$

57. $6x^2 + 7x - 20$

58. $12x^2 - x - 6$

59. $12x^2 - 29x + 15$

60. $21x^2 + 41x + 10$

61. $4x^2 - 20x + 25$

62. $9x^2 + 24x + 16$

63. $25z^2 + 30z + 9$

64. $16z^2 - 56z + 49$

65. $45x^2 + 38xy + 8y^2$

66. $50x^2 + 45xy - 18y^2$

67. $36r^2 - 25t^2$

68. $81r^2 - 16t^2$

69. $z^4 - 64w^2$

70. $9y^4 - 121x^2$

71. $x^4 - 4x^2$

72. $x^3 - 25x$

73. $x^2 + 25$

74. $4x^2 + 9$

75. $75x^2 - 48y^2$

76. $64x^2 - 36y^2$

77. $64x^3 + 27$

78. $125x^3 - 8$

79. $64x^3 - y^6$

80. $216x^9 + 125y^3$

81. $343x^3 + y^9$

82. $x^6 - 27y^3$

83. $2ax - 6bx + ay - 3by$

84. $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$

85. $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$

86. $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$

87. $x^4 + 2x^3 - x - 2$

88. $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

89. $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

90. $6w^8 + 17w^4 + 12$

91. $a^6 - b^6$

92. $x^8 - 16$

93. $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$

94. $x^2 - 4y^2 - 6x + 9$

95. $y^2 - x^2 + 8y + 16$

96. $y^2 + 9 - 6y - 4x^2$

97. $y^6 + 7y^3 - 8$

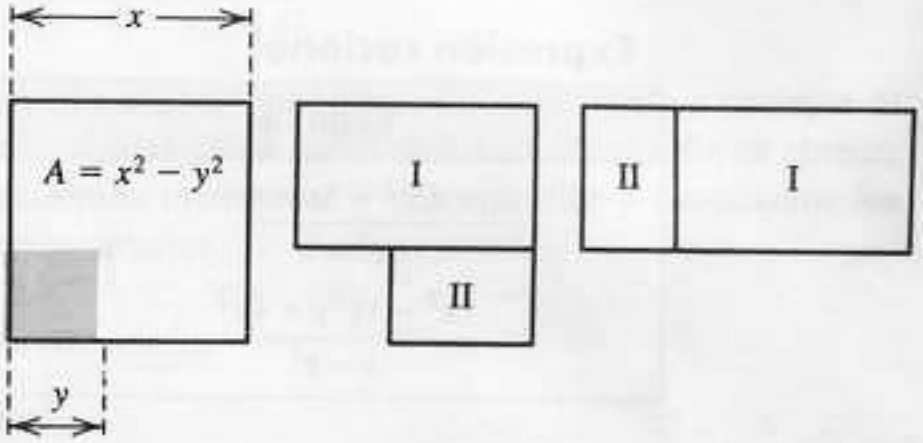
98. $8c^6 + 19c^3 - 27$

99. $x^{16} - 1$

100. $4x^3 + 4x^2 + x$

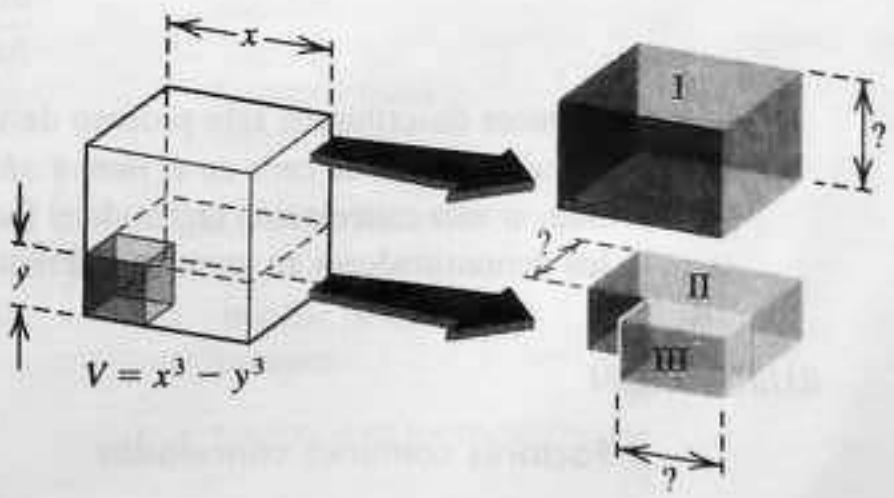
Ejercicios 101 y 102: los antiguos griegos proporcionaron demostraciones geométricas para las fórmulas de factorización de la diferencia de dos cuadrados y la diferencia de dos cubos. Establece la fórmula para el caso especial descrito.

101. Halla las áreas de las regiones I y II de la figura, a fin de establecer la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para el caso especial $x > y$.



EJERCICIO 101

102. Encuentra los volúmenes de las cajas I, II y III de la figura con objeto de establecer la fórmula de la diferencia de dos cubos para el caso especial $x > y$.



EJERCICIO 102

103. Necesidades de calorías La necesidad básica de energía de un individuo es la cantidad mínima de calorías necesarias para mantener los procesos esenciales para la conservación de la vida: circulación, temperatura corporal y respiración. Dado el sexo de una persona, el peso w (en kilogramos), la estatura h (en centímetros)

www.elsolucionario.net

y la edad (en años), se puede calcular la necesidad básica de energía en calorías con las siguientes fórmulas, donde C_m y C_h son las calorías necesarias para mujeres y hombres, respectivamente:

$$C_m = 66.5 + 13.8w + 5h - 6.8y$$

$$C_h = 665 + 9.6w + 1.9h - 4.7y$$

a) Determina las necesidades básicas de energía, primero para una mujer de 25 años, 59 kg y 1.63 m de estatura, y luego para un hombre de 55 años, 75 kg y 1.78 metros.

b) Analiza por qué el coeficiente para y es negativo en ambas fórmulas y los otros coeficientes son positivos.

1.4 Expresiones fraccionarias

El cociente de dos expresiones algebraicas se llama **expresión fraccionaria**. Como caso especial, una **expresión racional** es el cociente p/q de dos *polinomios* p y q. Dado que no se permite la división entre cero, el dominio de p/q estará formado por todos los números reales, excepto los que hacen cero al denominador. En la siguiente tabla hay dos demostraciones.

Expresión racional

Ejemplo	Dominio
$\dfrac{6x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$	Toda $x \neq \pm 3$
$\dfrac{x^3 - 3x^2y + 4y^2}{y - x^3}$	Toda x y y tales que $y \neq x^3$

En la mayor parte de nuestro trabajo nos interesan las expresiones racionales en que tanto numerador como denominador son polinomios de una sola variable.

Puesto que las variables de expresiones racionales representan números reales, podemos usar las propiedades de cocientes de la sección 1.1, sustituyendo las letras a, b, c y d con polinomios. La siguiente propiedad es de particular importancia, donde $bd \neq 0$:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

A veces describimos este proceso de simplificación diciendo que es posible cancelar un *factor común distinto de cero en el numerador y denominador de un cociente.* En la práctica, solemos indicar esta cancelación tachando el factor común, como en la ilustración que sigue, donde todos los denominadores se suponen diferentes de cero.

ILUSTRACIÓN

Factores comunes cancelados

- $\dfrac{\cancel{ad}}{\cancel{bd}} = \dfrac{a}{b}$
- $\dfrac{m\cancel{n}}{\cancel{n}pq} = \dfrac{m}{pq}$
- $\dfrac{pq\cancel{r}}{\cancel{r}sv} = \dfrac{q}{v}$

Una expresión racional está *simplificada,* o *reducida a su mínima expresión,* si numerador y denominador no tienen factores polinomiales comunes de grado positivo ni factores enteros comunes mayores de 1. Para simplificar una expresión racional, se factorizan numerador y denominador y entonces, suponiendo que los factores del denominador no son cero, se cancelan los factores comunes como en la siguiente ilustración.

www.elsolucionario.net

ILUSTRACIÓN

Expresiones racionales simplificadas

si $x \neq 2$

$$\blacksquare \quad \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}=\frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}\overset{\downarrow}{=}\frac{3x+1}{x+2}$$

si $x \neq 2/3$

$$\blacksquare \quad \frac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2}=\frac{-(3x^2+x-2)}{6x^2-x-2}=-\frac{(3x-2)(x+1)}{(3x-2)(2x+1)}\overset{\downarrow}{=}-\frac{x+1}{2x+1}$$

si $x \neq 5, x \neq -4$

$$\blacksquare \quad \frac{(x^2+8x+16)(x-5)}{(x^2-5x)(x^2-16)}=\frac{(x+4)^2(x-5)}{x(x-5)(x+4)(x-4)}\overset{\downarrow}{=}\frac{x+4}{x(x-4)}$$

Según se muestra en el próximo ejemplo, cuando simplificamos un producto o cociente de expresiones racionales, a menudo recurrimos a las propiedades de los cocientes a fin de obtener una expresión racional. Entonces factorizamos numerador y denominador y cancelamos los factores comunes, igual que en la ilustración anterior.

EJEMPLO 1 *Productos de cocientes de expresiones racionales*

Efectúa la operación indicada y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}$ **b)** $\dfrac{x+2}{2x-3}\div\dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

Solución

a)
$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\frac{2x-2}{x-3}=\frac{(x^2-6x+9)(2x-2)}{(x^2-1)(x-3)}$$ propiedad de los cocientes

$$=\frac{(x-3)^2\cdot 2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$$ factorizar todos los polinomios

si $x \neq 3, x \neq 1$

$$\overset{\downarrow}{=}\frac{2(x-3)}{x+1}$$ cancelar factores comunes

b)
$$\frac{x+2}{2x-3}\div\frac{x^2-4}{2x^2-3x}=\frac{x+2}{2x-3}\cdot\frac{2x^2-3x}{x^2-4}$$ propiedad de los cocientes

$$=\frac{(x+2)x(2x-3)}{(2x-3)(x+2)(x-2)}$$ propiedad de los cocientes; factorizar todos los polinomios

si $x \neq -2, x \neq \frac{3}{2}$

$$\overset{\downarrow}{=}\frac{x}{x-2}$$ cancelar factores comunes

www.elsolucionario.net

Para sumar o restar dos expresiones racionales, por lo general hallamos un *común denominador* y usamos estas propiedades de los cocientes:

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{d}$$

Si los denominadores de las expresiones no son los mismos, podemos obtener un común denominador multiplicando el numerador y denominador de cada fracción por una expresión apropiada. Es recomendable usar el ***mínimo* común denominador (MCDn)** de los dos cocientes. Para hallar el MCDn, factorizamos cada denominador en primos y luego formamos el producto de los diversos factores primos, utilizando el *mayor* exponente que aparezca en cada factor primo. Veamos este método con un ejemplo numérico.

EJEMPLO 2 *Suma de fracciones usando el MCDn*

Expresa como número irracional en términos irreducibles:

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}$$

Solución Las factorizaciones en primos de los denominadores 24 y 18 son $24 = (2^3)(3)$ y $18 = 2 \cdot 3^2$. Para hallar el MCDn, formamos el producto de los diferentes factores primos usando el exponente mayor asociado a cada factor. Esto dará $2^3 \cdot 3^2$. Ahora sustituimos cada fracción por otra equivalente con denominador $2^3 \cdot 3^2$ y sumamos:

$$\begin{aligned}\frac{7}{24}+\frac{5}{18} &= \frac{7}{2^3\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3^2}\\ &= \frac{7}{2^3\cdot 3}\cdot\frac{3}{3}+\frac{5}{2\cdot 3^2}\cdot\frac{2^2}{2^2}\\ &= \frac{21}{2^3\cdot 3^2}+\frac{20}{2^3\cdot 3^2}\\ &= \frac{41}{2^3\cdot 3^2}\\ &= \frac{41}{72}\end{aligned}$$

El método para encontrar el MCDn de expresiones racionales es análogo al proceso ilustrado en el ejemplo 2. La única diferencia es que factorizamos polinomios en lugar de enteros.

EJEMPLO 3 *Sumas y restas de expresiones racionales*

Efectúa las operaciones y simplifica:

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}$$

Solución Los denominadores ya están factorizados. El MCDn es $x^2(3x-2)$. Para obtener tres fracciones que tengan ese denominador necesitamos multiplicar por x el numerador y el denominador de la primera fracción, los de la segunda por x^2 y los de la tercera por $3x-2$. Esto dará

www.elsolucionario.net

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6}{x(3x-2)}\cdot\frac{x}{x}+\frac{5}{3x-2}\cdot\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{3x-2}{3x-2}$$
$$=\frac{6x}{x^2(3x-2)}+\frac{5x^2}{x^2(3x-2)}-\frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$
$$=\frac{6x+5x^2-2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$
$$=\frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}.$$

EJEMPLO 4 *Simplificación de sumas de expresiones racionales*

Efectúa las operaciones y simplifica:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}$$

Solución Comenzamos por factorizar denominadores:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x+5}{(x+3)^2}+\frac{x}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x-3}$$

Como el MCDn es $(x+3)^2(x-3)$, multiplicamos el numerador y el denominador de la primera fracción por $x-3$, los de la segunda por $x+3$, los de la tercera por $(x+3)^2$ y luego sumamos:

$$\frac{(2x+5)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}+\frac{x(x+3)}{(x+3)^2(x-3)}+\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)}$$
$$=\frac{(2x^2-x-15)+(x^2+3x)+(x^2+6x+9)}{(x+3)^2(x-3)}$$
$$=\frac{4x^2+8x-6}{(x+3)^2(x-3)}=\frac{2(2x^2+4x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$$

Una **fracción compleja** es aquella en que numerador, denominador o ambos, es una expresión fraccionaria. Ciertos problemas en cálculo integral requieren simplificar fracciones complejas del tipo del ejemplo que sigue.

EJEMPLO 5 *Simplificación de una fracción compleja*

Simplifica la fracción compleja:

$$\frac{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{a+3}}{x-a}$$

Solución Cambiamos el numerador de la expresión dada por una sola fracción y luego usamos una propiedad para simplificar cocientes:

$$\frac{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{a+3}}{x-a}=\frac{\dfrac{2(a+3)-2(x+3)}{(x+3)(a+3)}}{x-a}$$ combinar fracciones del numerador

$$=\frac{2a-2x}{(x+3)(a+3)}\cdot\frac{1}{x-a}$$ simplificar; propiedad de los cocientes

www.elsolucionario.net

$$= \frac{2(a-x)}{(x+3)(a+3)(x-a)}$$ factorizar $2a-2x$; propiedad de los cocientes

si $x \neq a$

$$= -\frac{2}{(x+3)(a+3)}$$ cambiar $\frac{a-x}{x-a}$ por -1

Una solución alternativa consiste en multiplicar numerador y denominador de la expresión dada por $(x+3)(a+3)$, el MCDn del numerador y el denominador, y luego simplificar el resultado.

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a+\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; como en el siguiente ejemplo, estos cocientes se pueden simplificar multiplicando numerador y denominador por el **conjugado** $a-\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, respectivamente. Por supuesto, si aparece $a-\sqrt{b}$, multiplica por $a+\sqrt{b}$.

EJEMPLO 6 *Racionalización de un denominador*

Racionaliza el denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Solución

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$ multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$$ propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$ ley de los radicales

En cálculo a veces es necesario racionalizar el *numerador* de un cociente, como en el ejemplo adjunto.

EJEMPLO 7 *Racionalización de un numerador*

Si $h \neq 0$, racionaliza el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Solución

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

$$= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

Solucionario.net

$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \qquad \text{ley de radicales}$$

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \qquad \text{simplificar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \qquad \text{cancelar } h \neq 0$$

Puede parecer que logramos muy poco, dado que se presentan radicales en el denominador. Sin embargo, en cálculo es de interés determinar qué es cierto si h está muy cerca de cero. Observa que si usamos la expresión *dada* obtenemos:

$$\text{Si } h \approx 0, \text{ entonces } \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \approx \frac{\sqrt{x+0}-\sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0},$$

expresión que no tiene sentido; pero si usamos la forma *racionalizada* llegamos a:

$$\text{Si } h \approx 0, \quad \text{entonces} \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Para algunos problemas de cálculo es necesario simplificar expresiones del tipo que se muestra en este ejemplo.

EJEMPLO 8 *Simplificación de la expresión fraccionaria*

Simplifica, si $h \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$$

Solución

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h} \qquad \text{combinar cocientes en el numerador}$$

$$= \frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2} \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{elevar al cuadrado } x+h; \text{ propiedad de los cocientes}$$

$$= \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h} \qquad \text{eliminar paréntesis}$$

$$= \frac{-\cancel{h}(2x+h)}{(x+h)^2x^2\cancel{h}} \qquad \text{simplificar; factorizar } -h$$

$$= -\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2} \qquad \text{cancelar } h \neq 0$$

Algunos problemas del tipo dado en el ejemplo adjunto se presentan en cálculo.

EJEMPLO 9 *Simplificación de una expresión fraccionaria*

Simplifica:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2}-x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \qquad \textit{(continúa)}$$

www.elsolucionario.net

Solución Una forma de simplificar la expresión es:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - \dfrac{x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5}$$ definición de exponentes negativos

$$= \frac{\dfrac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5}$$ combinar términos en el numerador

$$= \frac{6x^3 + 15x^2 - x^3}{(2x+5)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2x+5}$$ propiedad de los cocientes

$$= \frac{5x^3 + 15x^2}{(2x+5)^{3/2}}$$ simplificar

$$= \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$ factorizar numerador

Una simplificación alternativa consiste en eliminar la potencia negativa, $-\frac{1}{2}$, en la expresión dada:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \cdot \frac{(2x+5)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}}$$ multiplicar numerador y denominador por $(2x+5)^{1/2}$

$$= \frac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)(2x+5)^{1/2}}$$ propiedad de los cocientes y ley de los exponentes

El resto de la simplificación es similar.

Un tercer método de simplificación es factorizar primero el máximo factor común (mfc). En este caso, los factores comunes son x y $(2x+5)$, y los exponentes más pequeños son 2 y $-\frac{1}{2}$, respectivamente; por lo tanto, el mfc es $x^2(2x+5)^{-1/2}$, y factorizamos el numerador y simplificamos de esta forma:

$$\frac{x^2(2x+5)^{-1/2}[3(2x+5) - x]}{(2x+5)} = \frac{x^2(5x+15)}{(2x+5)^{3/2}} = \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$

1.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: escribe la expresión como si fuera un número racional simplificado.

1. $\frac{3}{50} + \frac{7}{30}$
2. $\frac{4}{63} + \frac{5}{42}$
3. $\frac{5}{24} - \frac{3}{20}$
4. $\frac{11}{54} - \frac{7}{72}$

Ejercicios 5 al 48: simplifica la expresión.

5. $\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 7x - 4}$
6. $\frac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 17x + 10}$
7. $\frac{y^2 - 25}{y^3 - 125}$
8. $\frac{y^2 - 9}{y^3 + 27}$

www.elsolucionario.net

9. $\dfrac{12+r-r^2}{r^3+3r^2}$

10. $\dfrac{10+3r-r^2}{r^4+2r^3}$

11. $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2}\cdot\dfrac{9x^4-6x^3+4x^2}{27x^4+8x}$

12. $\dfrac{4x^2-9}{2x^2+7x+6}\cdot\dfrac{4x^4+6x^3+9x^2}{8x^7-27x^4}$

13. $\dfrac{5a^2+12a+4}{a^4-16}\div\dfrac{25a^2+20a+4}{a^2-2a}$

14. $\dfrac{a^3-8}{a^2-4}\div\dfrac{a}{a^3+8}$

15. $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{3x}{x^2-4}$

16. $\dfrac{15}{x^2-9}-\dfrac{5x}{x^2-9}$

17. $\dfrac{2}{3s+1}-\dfrac{9}{(3s+1)^2}$

18. $\dfrac{4}{(5s-2)^2}+\dfrac{s}{5s-2}$

19. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{x-2}{x^3}$

20. $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2x-1}{x^2}+\dfrac{x+5}{x^3}$

21. $\dfrac{3t}{t+2}+\dfrac{5t}{t-2}-\dfrac{40}{t^2-4}$

22. $\dfrac{t}{t+3}+\dfrac{4t}{t-3}-\dfrac{18}{t^2-9}$

23. $\dfrac{4x}{3x-4}+\dfrac{8}{3x^2-4x}+\dfrac{2}{x}$

24. $\dfrac{12x}{2x+1}-\dfrac{3}{2x^2+x}+\dfrac{5}{x}$

25. $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x}$

26. $\dfrac{5x}{2x+3}-\dfrac{6}{2x^2+3x}+\dfrac{2}{x}$

27. $\dfrac{p^4+3p^3-8p-24}{p^3-2p^2-9p+18}$

28. $\dfrac{2ac+bc-6ad-3bd}{6ac+2ad+3bc+bd}$

29. $3+\dfrac{5}{u}+\dfrac{2u}{3u+1}$

30. $4+\dfrac{2}{u}-\dfrac{3u}{u+5}$

31. $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}-\dfrac{6x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}$

32. $\dfrac{2x+6}{x^2+6x+9}+\dfrac{5x}{x^2-9}+\dfrac{7}{x-3}$

33. $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

34. $\dfrac{\frac{1}{x+2}-3}{\frac{4}{x}-x}$

35. $\dfrac{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$

36. $\dfrac{\frac{r}{s}+\frac{s}{r}}{\frac{r^2}{s^2}-\frac{s^2}{r^2}}$

37. $\dfrac{y^{-1}+x^{-1}}{(xy)^{-1}}$

38. $\dfrac{y^{-2}-x^{-2}}{y^{-2}+x^{-2}}$

39. $\dfrac{\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x+3}}{\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x+3}}$

40. $\dfrac{\frac{3}{w}-\frac{6}{2w+1}}{\frac{5}{w}+\frac{8}{2w+1}}$

41. $\dfrac{\frac{3}{x-1}-\frac{3}{a-1}}{x-a}$

42. $\dfrac{\frac{x+2}{x}-\frac{a+2}{a}}{x-a}$

43. $\dfrac{(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)}{h}$

44. $\dfrac{(x+h)^3+5(x+h)-(x^3+5x)}{h}$

45. $\dfrac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$

46. $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

47. $\dfrac{\frac{4}{3x+3h-1}-\frac{4}{3x-1}}{h}$

48. $\dfrac{\frac{5}{2x+2h+3}-\frac{5}{2x+3}}{h}$

Ejercicios 49 al 54: racionaliza el denominador.

49. $\dfrac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$

50. $\dfrac{\sqrt{t}-4}{\sqrt{t}+4}$

51. $\dfrac{81x^2-16y^2}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

52. $\dfrac{16x^2-y^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

53. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ (*Sugerencia:* multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.)

54. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

Ejercicios 55 al 60: racionaliza el numerador.

55. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^2-b^2}$

56. $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b^2-c^2}$

57. $\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$

58. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

59. $\dfrac{\sqrt{1-x-h}-\sqrt{1-x}}{h}$

60. $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ (*Sugerencia:* compara con el Ejer. 53)

www.elsolucionario.net

Ejercicios 61 al 64: expresa como una suma de términos de la forma ax^r, donde r es un número racional.

61. $\dfrac{4x^2 - x + 5}{x^{2/3}}$

62. $\dfrac{x^2 + 4x - 6}{\sqrt{x}}$

63. $\dfrac{(x^2 + 2)^2}{x^5}$

64. $\dfrac{(\sqrt{x} - 3)^2}{x^3}$

Ejercicios 65 al 68: expresa como cociente.

65. $x^{-3} + x^2$

66. $x^{-4} - x$

67. $x^{-1/2} - x^{3/2}$

68. $x^{-2/3} + x^{7/3}$

Ejercicios 69 al 82: simplifica la expresión.

69. $(2x^2 - 3x + 1)(4)(3x + 2)^3(3) + (3x + 2)^4(4x - 3)$

70. $(6x - 5)^3(2)(x^2 + 4)(2x) + (x^2 + 4)^2(3)(6x - 5)^2(6)$

71. $(x^2 - 4)^{1/2}(3)(2x + 1)^2(2) + (2x + 1)^3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 - 4)^{-1/2}(2x)$

72. $(3x + 2)^{1/3}(2)(4x - 5)(4) + (4x - 5)^2\left(\frac{1}{3}\right)(3x + 2)^{-2/3}(3)$

73. $(3x + 1)^6\left(\frac{1}{2}\right)(2x - 5)^{-1/2}(2) + (2x - 5)^{1/2}(6)(3x + 1)^5(3)$

74. $(x^2 + 9)^4\left(-\frac{1}{3}\right)(x + 6)^{-4/3} + (x + 6)^{-1/3}(4)(x^2 + 9)^3(2x)$

75. $\dfrac{(6x + 1)^3(27x^2 + 2) - (9x^3 + 2x)(3)(6x + 1)^2(6)}{(6x + 1)^6}$

76. $\dfrac{(x^2 - 1)^4(2x) - x^2(4)(x^2 - 1)^3(2x)}{(x^2 - 1)^8}$

77. $\dfrac{(x^2 + 2)^3(2x) - x^2(3)(x^2 + 2)^2(2x)}{[(x^2 + 2)^3]^2}$

78. $\dfrac{(x^2 - 5)^4(3x^2) - x^3(4)(x^2 - 5)^3(2x)}{[(x^2 - 5)^4]^2}$

79. $\dfrac{(x^2 + 4)^{1/3}(3) - (3x)\left(\frac{1}{3}\right)(x^2 + 4)^{-2/3}(2x)}{[(x^2 + 4)^{1/3}]^2}$

80. $\dfrac{(1 - x^2)^{1/2}(2x) - x^2\left(\frac{1}{2}\right)(1 - x^2)^{-1/2}(-2x)}{[(1 - x^2)^{1/2}]^2}$

81. $\dfrac{(4x^2 + 9)^{1/2}(2) - (2x + 3)\left(\frac{1}{2}\right)(4x^2 + 9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2 + 9)^{1/2}]^2}$

82. $\dfrac{(3x + 2)^{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)(2 + 3)^{-2/3}(2) - (2x + 3)^{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)(3x + 2)^{-1/2}(3)}{[(3x + 2)^{1/2}]^2}$

Ejercicios 83 y 84: evalúa el par de expresiones para $x = 1, 2, 3, 4, 5$ mediante una tabla de valores. Discute si ambas expresiones deben ser iguales

83. $\dfrac{113x^3 + 280x^2 - 150x}{22x^3 + 77x^2 - 100x - 350}, \dfrac{3x}{2x + 7} + \dfrac{4x^2}{1.1x^2 - 5}$

84. $\dfrac{20x^2 + 41x + 31}{10x^3 + 10x^2}, \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{3.2}{x^2}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Expresa como número racional simplificado:

   a) $(\frac{1}{7})(-\frac{8}{3})$ **b)** $\frac{3}{4} + \frac{6}{5}$ **c)** $\frac{5}{8} - \frac{6}{7}$ **d)** $\frac{3}{4} \div \frac{6}{5}$

2. Sustituye el símbolo $\square$ con $<$, $>$ o $=$ para que la expresión resultante sea verdadera.

   a) $-0.1 \square -0.001$ **b)** $\sqrt{9} \square -3$

   c) $\frac{1}{6} \square 0.166$

3. Expresa como desigualdad:

   a) x es negativa

   b) a está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$

   c) El valor absoluto de x no es mayor de 4.

4. Reescribe sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

   a) $|-7|$ **b)** $\dfrac{|-5|}{-5}$ **c)** $|3^{-1} - 2^{-1}|$

5. Si los puntos A, B y C de una recta coordenada tienen coordenadas -8, 4 y -3, respectivamente, encuentra la distancia:

   a) $d(A, C)$ **b)** $d(C, A)$ **c)** $d(B, C)$

6. Determina si la expresión es verdadera para todos los valores de las variables, siempre que la expresión esté definida.

   a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{x} + y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

   c) $\dfrac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} = \dfrac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{c - d}$

7. Ajusta el número en notación científica.

   a) 93 700 000 000 **b)** 0.000 004 02

8. Expresa el número en forma decimal.

   a) 6.8×10^7 **b)** 7.3×10^{-4}

www.elsolucionario.net

Ejercicios 9 y 10: reescribe la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifica el resultado.

9. $|x+3|$ *si* $x \le -3$

10. $|(x-2)(x-3)|$ si $2 < x < 3$

Ejercicios 11 y 12: escribe el número en la forma *a/b*, donde *a* y *b* son enteros.

11. $-3^2 + 2^0 + 27^{-2/3}$

12. $\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1^2 + 16^{-3/4}$

Ejercicios 13 al 38: simplifica la expresión y racionaliza el denominador cuando sea apropiado.

13. $(3a^2b)^2(2ab^3)$

14. $\dfrac{6r^3y^2}{2r^5y}$

15. $\dfrac{(3x^2y^{-3})^{-2}}{x^{-5}y}$

16. $\left(\dfrac{a^{2/3}b^{3/2}}{a^2b}\right)^6$

17. $(-2p^2q)^3\left(\dfrac{p}{4q^2}\right)^2$

18. $c^{-4/3}c^{3/2}c^{1/6}$

19. $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{z}}\right)^4 \div \left(\dfrac{x^{1/3}y^2}{z}\right)^3$

20. $\left(\dfrac{-64x^3}{z^6y^9}\right)^{2/3}$

21. $[(a^{2/3}b^{-2})^3]^{-1}$

22. $\dfrac{(3u^2v^5w^{-4})^3}{(2uv^{-3}w^2)^4}$

23. $\dfrac{r^{-1}+s^{-1}}{(rs)^{-1}}$

24. $(u+v)^3(u+v)^{-2}$

25. $s^{5/2}s^{-4/3}s^{-1/6}$

26. $x^{-2} - y^{-1}$

27. $\sqrt[3]{(x^4y^{-1})^6}$

28. $\sqrt[3]{8x^5y^3z^4}$

29. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

30. $\sqrt{\dfrac{a^2b^3}{c}}$

31. $\sqrt[3]{4x^2y}\,\sqrt[3]{2x^5y^2}$

32. $\sqrt[4]{(-4a^3b^2c)^2}$

33. $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)$

34. $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3d^6)^4}}$

35. $\dfrac{\sqrt{12x^4y}}{\sqrt{3x^2y^5}}$

36. $\sqrt[3]{(a+2b)^3}$

37. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi^2}}$

38. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{9y}}$

Ejercicios 39 al 42: racionaliza el denominador.

39. $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

40. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}$

41. $\dfrac{81x^2-y^2}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

42. $\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$

Ejercicios 43 al 58: expresa como polinomio.

43. $(3x^3 - 4x^2 + x - 7) + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5)$

44. $(4z^4 - 3z^2 + 1) - z(z^3 + 4z^2 - 4)$

45. $(x+4)(x+3) - (2x-1)(x-5)$

46. $(4x-5)(2x^2+3x-7)$

47. $(3y^3 - 2y^2 + y + 4)(y^2 - 3)$

48. $(3x+2)(x-5)(5x+4)$

49. $(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

50. $\dfrac{9p^4q^3 - 6p^2q^4 + 5p^3q^2}{3p^2q^2}$

51. $(3a-5b)(2a+7b)$

52. $(4r^2 - 3s)^2$

53. $(13a^2 + 4b)(13a^2 - 4b)$

54. $(a^3 - a^2)^2$

55. $(2a+b)^3$

56. $(c^2 - d^2)^3$

57. $(3x+2y)^2(3x-2y)^2$

58. $(a+b+c+d)^2$

Ejercicios 59 al 74: factoriza el polinomio.

59. $60xw + 70w$

60. $2r^4s^3 - 8r^2s^5$

61. $28x^2 + 4x - 9$

62. $16a^4 + 24a^2b^2 + 9b^4$

63. $2wy + 3yx - 8wz - 12zx$

64. $2c^3 - 12c^2 + 3c - 18$

65. $8x^3 + 64y^3$

66. $u^3v^4 - u^6v$

67. $p^8 - q^8$

68. $x^4 - 8x^3 + 16x^2$

69. $w^6 + 1$

70. $3x + 6$

71. $x^2 + 25$

72. $x^2 - 49y^2 - 14x + 49$

73. $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$

74. $4x^4 + 12x^3 + 20x^2$

Ejercicios 75 al 86: simplifica la expresión.

75. $\dfrac{6x^2 - 7x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$

76. $\dfrac{r^3 - t^3}{r^2 - t^2}$

77. $\dfrac{6x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4} \div \dfrac{2x^2 - 3x}{x+2}$

78. $\dfrac{2}{4x-5} - \dfrac{5}{10x+1}$

79. $\dfrac{7}{x+2} + \dfrac{3x}{(x+2)^2} - \dfrac{5}{x}$

80. $\dfrac{x+x^{-2}}{1+x^{-2}}$

81. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2+x} - \dfrac{3}{x+3}$

82. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

83. $\dfrac{x+2-\dfrac{3}{x+4}}{\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{1}{x+4}}$

84. $\dfrac{\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{x+2}}{x-3-\dfrac{6}{x+2}}$

85. $(x^2+1)^{3/2}(4)(x+5)^3 + (x+5)^4\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+1)^{1/2}(2x)$

86. $\dfrac{(4-x^2)\left(\frac{1}{3}\right)(6x+1)^{-2/3}(6) - (6x+1)^{1/3}(-2x)}{(4-x^2)^2}$

87. Glóbulos rojos en el cuerpo El cuerpo de una persona promedio contiene 5.5 litros de sangre y alrededor de 5 millones de glóbulos rojos por milímetro cúbico de sangre. Dado que un litro es igual a 10^6 mm, calcula el

www.elsolucionario.net

número de glóbulos rojos en el cuerpo de una persona promedio.

88. Pulsaciones durante una vida Un corazón sano pulsa de 70 a 90 veces por minuto. Calcula el número de pulsaciones durante la vida de un individuo que llega a los 80 años de edad.

89. Superficie del cuerpo A la edad de 2 años, un niño promedio mide unos 86 cm y pesa 13 kilogramos. Utiliza la fórmula de DuBois y DuBois, $S = (0.007184)w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso y h es la estatura, para hallar la superficie S del cuerpo (en metros cuadrados).

90. Expansión adiabática Si dice que un gas se expande *adiabáticamente* si no hay pérdida ni ganancia de calor. La fórmula para la expansión adiabática del aire es $pv^{-1.4} = c$, donde p es la presión, v es el volumen y c es una constante. Si, en un cierto instante, la presión es 40 dinas/cm^2 y el volumen es 60 cm^3, encuentra el valor de c (una *dina* es la unidad de fuerza en el sistema cgs).

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 1

1. Superficie de un tanque Sabes que un tanque esférico contiene 10 000 galones de agua. ¿Qué otra información necesitas para hallar el área del tanque? Calcula el área del tanque.

2. Determina las condiciones en que $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

3. Demuestra que la suma de cuadrados $x^2 + 25$ se puede factorizar al sumar y restar un término particular y seguir el método demostrado en el ejemplo 10c) de la sección 1.3.

4. ¿Cuál es la diferencia entre la expresión $\dfrac{1}{x-1}$ y $\dfrac{x-1}{x^2-1}$?

5. Escribe el cociente de dos polinomios arbitrarios de segundo grado en x, y evalúa el cociente con diversos valores grandes de x. ¿Qué conclusión general puedes obtener sobre dichos cocientes?

6. Simplifica la expresión $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$. Ahora evalúa ambas expresiones con un valor de x ($x \neq \pm 2$). Analiza qué prueba esta evaluación (o qué no demuestra) y qué prueba tu simplificación (o qué no demuestra).

www.elsolucionario.net

Ecuaciones y desigualdades

2

2.1 Ecuaciones

2.2 Problemas aplicados

2.3 Ecuaciones cuadráticas

2.4 Números complejos

2.5 Otros tipos de ecuaciones

2.6 Desigualdades

2.7 Más sobre desigualdades

www.elsolucionario.net

Los métodos para resolver ecuaciones datan de los tiempos de los babilonios (2000 a.C.), quienes describieron ecuaciones con palabras en lugar de las variables x, y y otras que usamos hoy en día. Hacia el siglo XVI, en Italia tuvieron lugar avances importantes para hallar soluciones de ecuaciones, los cuales continuaron en todo el mundo hasta bien entrado el siglo XIX. En los tiempos modernos, las computadoras se usan a fin de calcular soluciones de ecuaciones muy complicadas.

Las desigualdades donde aparecen variables han alcanzado ahora el mismo nivel de importancia que las ecuaciones, y se usan con frecuencia en matemáticas aplicadas. En este capítulo estudiaremos diversos métodos para resolver ecuaciones y desigualdades básicas.

2.1 Ecuaciones

Una **ecuación** (o **igualdad**) es el enunciado de que dos cantidades o expresiones son iguales. Las ecuaciones se utilizan en todos los campos donde se usen números reales. Como ejemplo, la ecuación

$$d = vt \qquad \text{o bien} \qquad \text{distancia} = (\text{velocidad})(\text{tiempo}),$$

se usa en la solución de problemas donde un objeto se mueve con velocidad constante. Si la velocidad v es 45 millas por hora, entonces la distancia d (en millas) recorrida después de un tiempo t (en horas) está dada por

$$d = 45t.$$

Por ejemplo, si $t = 2$ h, entonces $d = 45 \cdot 2 = 90$ millas. Si deseamos hallar cuánto tarda el objeto en recorrer 75 millas, hacemos $d = 75$ y *resolvemos* la ecuación

$$75 = 45t \qquad \text{o bien,} \qquad 45t = 75.$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre 45, obtenemos

$$t = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}.$$

Por lo tanto, si $v = 45$ millas por hora, el tiempo requerido para recorrer 75 millas es $1\frac{2}{3}$ horas, o sea 1 hora y 40 minutos.

Observarás que la ecuación $d = vt$ contiene tres variables: d, v y t. En buena parte de nuestro trabajo en este capítulo sólo consideraremos ecuaciones de una variable. La tabla que sigue se aplica a una variable x, pero se puede considerar cualquier otra variable. Las abreviaturas LI y LD de la segunda ilustración son por lado izquierdo y lado derecho.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación en x	Una expresión de igualdad con una variable, x	$x^2 - 5 = 4x$
Solución, o **raíz**, de una ecuación en x	Un número a que produce una expresión cierta al sustituirlo con x	5 es una solución de $x^2 - 5 = 4x$ porque la sustitución dará LI: $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ y LD: $4 \cdot 5 = 20$, y $20 = 20$ es una expresión verdadera.
Un número a **satisface** una ecuación en x	a es una solución de la ecuación	5 satisface $x^2 - 5 = 4x$.

www.elsolucionario.net

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones	$2x + 1 = 7$ $2x = 7 - 1$ $2x = 6$ $x = 3$
Resolver una ecuación en x	Hallar todas las soluciones de la ecuación	Para resolver $(x + 3)(x - 5) = 0$, igualar a cero cada factor: $x + 3 = 0, \quad x - 5 = 0,$ obteniendo soluciones -3 y 5.

Una **ecuación algebraica** en x contiene sólo expresiones algebraicas como polinomios, expresiones racionales, radicales y otras. Una ecuación de este tipo se llama **ecuación condicional** si hay números en los dominios de las expresiones que no sean soluciones; por ejemplo, la ecuación $x^2 = 9$ es condicional porque el número $x = 4$ (y otros) no es una solución. Si *todo* número de los dominios de las expresiones de una ecuación algebraica es una solución, la ecuación se llama **identidad.**

A veces es difícil especificar si una ecuación es condicional o una identidad; a menudo esta última estará indicada cuando se obtiene una ecuación de la forma $p = p$, donde p es alguna expresión, luego de aplicar algunas propiedades de los números reales. Para ilustrar esto, si multiplicamos ambos lados de la ecuación

$$\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)}$$

por $x^2 - 4$, obtenemos una $x = x$. Esto nos alerta porque podemos tener una identidad que no prueba nada. Un método estándar para comprobar que una ecuación es identidad consiste en demostrar —mediante las propiedades de los números reales— que la expresión que aparece en un lado de la ecuación se puede transformar en la expresión que se encuentra en el otro lado de la ecuación. Esto resultó fácil en la ilustración anterior porque sabemos que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Por supuesto, para demostrar que una ecuación no es una identidad, basta hallar un número real del dominio de la variable que no satisfaga la ecuación original.

La ecuación más básica en álgebra es la *ecuación lineal*, definida en la siguiente tabla, en donde a y b denotan números reales.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación lineal en x	Una ecuación que se puede escribir en la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$.	$4x + 5 = 0$ $4x = -5$ $x = -\frac{5}{4}$

El ejemplo de la tabla anterior indica un método característico de resolver una ecuación lineal. Con el mismo procedimiento, vemos que

$$\text{si} \quad ax + b = 0, \quad \text{entonces} \quad x = -\frac{b}{a},$$

siempre que $a \neq 0$; por lo tanto, una ecuación lineal tiene exactamente una solución.

www.elsolucionario.net

A veces resolvemos una ecuación elaborando una lista de ecuaciones equivalentes (cada una en algún sentido más sencilla que la precedente) que termina con una ecuación de la que se pueden sacar las soluciones con facilidad. A menudo simplificamos una ecuación al agregarle o restarle la misma expresión en ambos lados. También se pueden multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que representa un número real *diferente de cero*. En los próximos ejemplos, las frases en color indican cómo se obtuvo una ecuación equivalente a la ecuación previa. Para abreviar estas frases usamos, como en el ejemplo 1, "sumar 7" en lugar de la más precisa pero más larga *sumar 7 a ambos lados*; "restar $2x$", en vez de *restar $2x$ de ambos lados*, y "dividir entre 4" quiere decir *dividir ambos lados entre 4*.

EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación lineal*

Resuelve la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$.

Solución Las ecuaciones de la siguiente lista son equivalentes.

$6x - 7 = 2x + 5$	dado
$(6x - 7) + 7 = (2x + 5) + 7$	sumar 7
$6x = 2x + 12$	simplificar
$6x - 2x = (2x + 12) - 2x$	restar $2x$
$4x = 12$	simplificar
$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$	dividir entre 4
$x = 3$	simplificar

PRUEBA $x = 3$ LI: $6(3) - 7 = 18 - 7 = 11$
LD: $2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$

Puesto que $11 = 11$ es una expresión verdadera, $x = 3$ es una solución.

Como se indicó en el ejemplo 1, con frecuencia verificamos una solución sustituyéndola en la ecuación dada. Dichas pruebas pueden detectar errores introducidos por manipulaciones incorrectas o errores en aritmética.

Decimos que la ecuación del ejemplo 1 *tiene la solución* $x = 3$. Del mismo modo, señalamos que la ecuación $x^2 = 4$ *tiene soluciones* $x = 2$ *y* $x = -2$.

El ejemplo que viene ilustra que una ecuación aparentemente complicada puede simplificarse a una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación*

Resuelve la ecuación $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$.

www.elsolucionario.net

Solución Las ecuaciones de la siguiente lista son equivalentes:

$$(8x-2)(3x+4) = (4x+3)(6x-1) \quad \text{dado}$$

$$24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3 \quad \text{multiplicar factores}$$

$$26x - 8 = 14x - 3 \quad \text{restar } 24x^2$$

$$12x - 8 = -3 \quad \text{restar } 14x$$

$$12x = 5 \quad \text{sumar } 8$$

$$x = \tfrac{5}{12} \quad \text{dividir entre } 12$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación dada es $\frac{5}{12}$.

No comprobamos la solución anterior porque cada paso tiene una ecuación equivalente; sin embargo, al trabajar ejercicios o contestar un examen, conviene comprobar las respuestas para evitar errores aritméticos.

Si una ecuación contiene expresiones racionales, a menudo eliminamos denominadores multiplicando ambos lados por el MCDn de estas expresiones. Si multiplicamos ambos lados por una expresión que es igual a cero para algún valor de x, quizá la ecuación resultante no equivalga a la original, como se plantea en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 *Una ecuación sin soluciones*

Resuelva la ecuación $\dfrac{3x}{x-2} = 1 + \dfrac{6}{x-2}$.

Solución

$$\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2} \quad \text{dado}$$

$$\left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) = (1)(x-2) + \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2) \quad \text{multiplicar por } x-2$$

$$3x = (x-2) + 6 \quad \text{simplificar}$$

$$3x = x + 4 \quad \text{simplificar}$$

$$2x = 4 \quad \text{restar } x$$

$$x = 2 \quad \text{dividir entre } 2$$

PRUEBA $x = 2$ LI: $\dfrac{3(2)}{(2)-2} = \dfrac{6}{0}$

Puesto que no se permite la división entre 0, $x = 2$ no es una solución; por lo tanto, *la ecuación dada no tiene soluciones*.

www.elsolucionario.net

En el proceso de resolver una ecuación, como una *posible* solución, podemos obtener un número que *no es* una solución de la ecuación dada. Dicho número se llama **solución extraña** o **raíz extraña** de la ecuación dada. En el ejemplo 3, $x = 2$ es una solución (raíz) extraña de la ecuación dada.

También se pueden usar estas guías a fin de resolver la ecuación del ejemplo 3. En este caso, seguir la guía 2 haría innecesario comprobar la solución extraña $x = 2$.

Guías para resolver una ecuación que contenga expresiones racionales

(1) Determina el MCDn de las expresiones racionales.

(2) Halla los valores de la variable que hagan cero al MCDn. Éstas *no* son soluciones porque dan como resultado al menos un denominador cero al sustituirlo en la ecuación dada.

(3) Multiplica cada término de la ecuación por el MCDn y simplifica, con lo cual eliminarás todos los denominadores.

(4) Resuelve la ecuación obtenida en la guía 3.

(5) Las soluciones de la ecuación dada son las encontradas en la guía 4, con la exclusión de los valores encontrados en la guía 2.

Seguiremos estos parámetros en el ejemplo que viene.

EJEMPLO 4 *Una ecuación que contiene expresiones racionales*

Resuelve la ecuación $\dfrac{3}{2x-4} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{2}{x-2}$.

Solución **Guía 1** Al reescribir el denominador $2x - 4$ como $2(x - 2)$, el MCDn de las tres expresiones racionales es $2(x - 2)(x + 3)$.

Guía 2 Los valores de x que hacen cero al MCDn $2(x - 2)(x + 3)$ son 2 y -3, de modo que estos números no pueden ser soluciones de la ecuación.

Guía 3 Multiplicar cada término de la ecuación por el MCDn y simplificar nos dará lo siguiente:

$$\frac{3}{2(x-2)}\,2(x-2)(x+3) - \frac{5}{x+3}\,2(x-2)(x+3) = \frac{2}{x-2}\,2(x-2)(x+3)$$

$$3(x+3) - 10(x-2) = 4(x+3) \qquad \text{cancelar factores semejantes}$$

$$3x + 9 - 10x + 20 = 4x + 12 \qquad \text{multiplicar factor}$$

Guía 4 Resolvemos la última ecuación obtenida en la guía 3.

$$3x - 10x - 4x = 12 - 9 - 20 \qquad \text{restar } 4x,\ 9 \text{ y } 20.$$

$$-11x = -17 \qquad \text{combinar términos semejantes}$$

$$x = \frac{17}{11} \qquad \text{dividir entre } -11$$

www.elsolucionario.net

Guía 5 Como $\frac{17}{11}$ no está incluido entre los valores (2 y −3) que hacen cero al MCDn (guía 2), tenemos que $x = \frac{17}{11}$ es una solución de la ecuación dada.

No comprobaremos la solución $x = \frac{17}{11}$ por sustitución porque la aritmética de que se trata es complicada. Es más fácil cotejar con cuidado las manipulaciones algebraicas usadas en cada paso.

Las fórmulas con diversas variables se presentan en muchas aplicaciones de las matemáticas. A veces es necesario despejar una variable especifica en términos de las variables restantes que aparecen en la fórmula, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

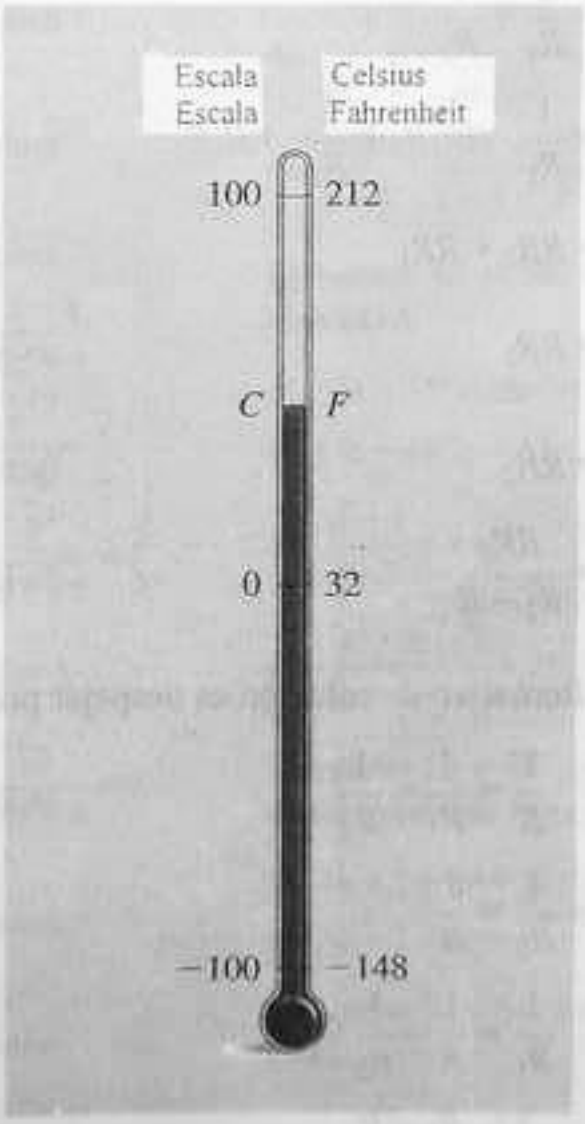
EJEMPLO 5 *Relación entre escalas de temperatura*

En el termómetro de la figura 1 se muestran las escalas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F). La relación entre las lecturas de temperaturas °C y °F está dada por $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$. Despeja °F.

Solución Para *despejar* °F debes obtener una fórmula que tenga °F por sí misma en un lado del signo igual y no tenga °F en el otro lado. Esto se hace como sigue:

$$°C = \tfrac{5}{9}(°F - 32) \qquad \text{dado}$$

$$\tfrac{9}{5}°C = °F - 32 \qquad \text{multiplicar por } \tfrac{9}{5}$$



www.elsolucionario.net

$$\tfrac{9}{5}\,°\text{C} + 32 = °\text{F} \qquad \text{sumar } 32$$

$$°\text{F} = \tfrac{9}{5}\,°\text{C} + 32 \qquad \text{ecuación equivalente}$$

EJEMPLO 6 *Resistores conectados en paralelo*

En teoría eléctrica, la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se usa para hallar la resistencia total R cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo (Fig. 2). Despeja R_1.

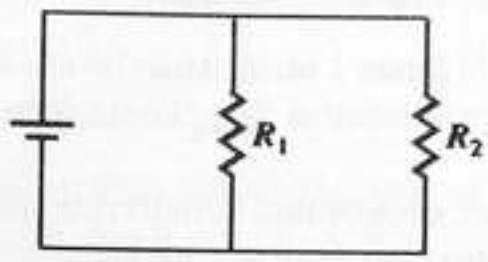


FIGURA 2

Solución Primero se multiplican ambos lados de la ecuación dada por el MCDn de las tres fracciones y luego se despeja R_1:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{dado}$$

$$\frac{1}{R} \cdot RR_1R_2 = \frac{1}{R_1} \cdot RR_1R_2 + \frac{1}{R_2} \cdot RR_1R_2 \qquad \text{multiplicar por el MCDn, } RR_1R_2$$

$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1 \qquad \text{cancelar factores comunes}$$

$$R_1R_2 - RR_1 = RR_2 \qquad \text{reunir términos con } R_1 \text{ en un lado}$$

$$R_1(R_2 - R) = RR_2 \qquad \text{factorizar } R_1$$

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R} \qquad \text{dividir entre } R_2 - R$$

Un método alternativo de solución es despejar primero $\frac{1}{R_1}$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{dado}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \qquad \text{restar } \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2} \qquad \text{combinar fracciones}$$

www.elsolucionario.net

Si dos números diferentes de cero son iguales, sus recíprocos también son iguales; por lo tanto,

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}.$$

2.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 44: resuelve la ecuación.

1. $-3x + 4 = -1$

2. $2x - 2 = -9$

3. $4x - 3 = -5x + 6$

4. $5x - 4 = 2(x - 2)$

5. $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

6. $6(2y + 3) - 3(y - 5) = 0$

7. $\frac{1}{5}x + 2 = 3 - \frac{2}{7}x$

8. $\frac{5}{3}x - 1 = 4 + \frac{2}{3}x$

9. $0.3(3 + 2x) + 1.2x = 3.2$

10. $1.5x - 0.7 = 0.4(3 - 5x)$

11. $\dfrac{3 + 5x}{5} = \dfrac{4 - x}{7}$

12. $\dfrac{2x - 9}{4} = 2 + \dfrac{x}{12}$

13. $\dfrac{13 + 2x}{4x + 1} = \dfrac{3}{4}$

14. $\dfrac{3}{7x - 2} = \dfrac{9}{3x + 1}$

15. $8 - \dfrac{5}{x} = 2 + \dfrac{3}{x}$

16. $\dfrac{3}{y} + \dfrac{6}{y} - \dfrac{1}{y} = 11$

17. $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

18. $(x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$

19. $(5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0$

20. $(2x + 9)(4x - 3) = 8x^2 - 12$

21. $\dfrac{3x + 1}{6x - 2} = \dfrac{2x + 5}{4x - 13}$

22. $\dfrac{5x + 2}{10x - 3} = \dfrac{x - 8}{2x + 3}$

23. $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{10x + 5} = \dfrac{7}{2x + 1}$

24. $\dfrac{-5}{3x - 9} + \dfrac{4}{x - 3} = \dfrac{5}{6}$

25. $\dfrac{3}{2x - 4} - \dfrac{5}{3x - 6} = \dfrac{3}{5}$

26. $\dfrac{9}{2x + 6} - \dfrac{7}{5x + 15} = \dfrac{2}{3}$

27. $2 - \dfrac{5}{3x - 7} = 2$

28. $\dfrac{6}{2x + 11} + 5 = 5$

29. $\dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{4}{8x - 4}$

30. $\dfrac{4}{5x + 2} - \dfrac{12}{15x + 6} = 0$

31. $\dfrac{7}{y^2 - 4} - \dfrac{4}{y + 2} = \dfrac{5}{y - 2}$

32. $\dfrac{4}{2u - 3} + \dfrac{10}{4u^2 - 9} = \dfrac{1}{2u + 3}$

33. $(x + 3)^3 - (3x - 1)^2 = x^3 + 4$

34. $(x - 1)^3 = (x + 1)^3 - 6x^2$

35. $\dfrac{9x}{3x - 1} = 2 + \dfrac{3}{3x - 1}$

36. $\dfrac{2x}{2x + 3} + \dfrac{6}{4x + 6} = 5$

37. $\dfrac{1}{x + 4} + \dfrac{3}{x - 4} = \dfrac{3x + 8}{x^2 - 16}$

38. $\dfrac{2}{2x + 3} + \dfrac{4}{2x - 3} = \dfrac{5x + 6}{4x^2 - 9}$

39. $\dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{5x - 6}{x^2 - 4}$

40. $\dfrac{2}{2x + 5} + \dfrac{3}{2x - 5} = \dfrac{10x + 5}{4x^2 - 25}$

41. $\dfrac{2}{2x + 1} - \dfrac{3}{2x - 1} = \dfrac{-2x + 7}{4x^2 - 1}$

42. $\dfrac{3}{2x + 5} + \dfrac{4}{2x - 5} = \dfrac{14x + 3}{4x^2 - 25}$

43. $\dfrac{5}{2x + 3} + \dfrac{4}{2x - 3} = \dfrac{14x + 3}{4x^2 - 9}$

44. $\dfrac{-3}{x + 4} + \dfrac{7}{x - 4} = \dfrac{-5x + 4}{x^2 - 16}$

Ejercicios 45 al 50: demuestra que la ecuación es una identidad.

45. $(4x - 3)^2 - 16x^2 = 9 - 24x$

46. $(3x - 4)(2x + 1) + 5x = 6x^2 - 4$

47. $\dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3$

48. $\dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$

49. $\dfrac{3x^2 + 8}{x} = \dfrac{8}{x} + 3x$

50. $\dfrac{49x^2 - 25}{7x - 5} = 7x + 5$

Ejercicios 51 y 52: ¿para qué valor de c el número a es una solución de la ecuación?

51. $4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6; \quad a = -2$

52. $3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1; \quad a = 4$

Ejercicios 53 y 54: determina si las dos ecuaciones equivalen.

53. a) $\dfrac{7x}{x - 5} = \dfrac{42}{x - 5}, \quad x = 6$

www.elsolucionario.net

b) $\dfrac{7x}{x-5} = \dfrac{35}{x-5}$, $x = 5$

54. a) $\dfrac{8x}{x-7} = \dfrac{72}{x-7}$, $x = 9$

b) $\dfrac{8x}{x-7} = \dfrac{56}{x-7}$, $x = 7$

Ejercicios 55 y 56: encuentra valores para a y b tales que $\frac{5}{3}$ sea una solución de la ecuación.

55. $ax + b = 0$

56. $ax^2 + bx = 0$

Ejercicios 57 y 58: indica cuál ecuación no equivale a la ecuación que le precede.

57.
$$x^2 - x - 2 = x^2 - 4$$
$$(x+1)(x-2) = (x+2)(x-2)$$
$$x + 1 = x + 2$$
$$1 = 2$$

58.
$$5x + 6 = 4x + 3$$
$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 4x + 3$$
$$(x+2)(x+3) = (x+1)(x+3)$$
$$x + 2 = x + 1$$
$$2 = 1$$

Ejercicios 59 al 72: la fórmula se presenta en la aplicación indicada. Despeja la variable especificada.

59. $I = Prt$ para P (interés simple)

60. $C = 2\pi r$ para r (circunferencia de un círculo)

61. $A = \frac{1}{2}bh$ para h (área de un triángulo)

62. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para h (volumen de un cono)

63. $F = g\dfrac{mM}{d^2}$ para m (ley de Newton de la gravitación)

64. $R = \dfrac{V}{I}$ para I (ley de Ohm en teoría eléctrica)

65. $P = 2l + 2w$ para w (perímetro de un rectángulo)

66. $A = P + Prt$ para r (capital más interés)

67. $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ para b_1 (área de un trapecio)

68. $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ para v_0 (distancia de caída de un cuerpo)

69. $S = \dfrac{p}{q + p(1-q)}$ para q (ley de Amdahl para supercomputadoras)

70. $S = 2(lw + hw + hl)$ para h (superficie de una caja rectangular)

71. $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ para q (ecuación de las lentes)

72. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ para R_2 (tres resistores conectados en paralelo)

Ejercicios 73 y 74: escoge la ecuación que mejor describa la tabla de datos. En el ejemplo 1 del apéndice I se dan algunas secuencias de tecleo para crear una tabla usando la calculadora graficadora TI-82.

73.

x	y
1	0.8
2	–0.4
3	–1.6
4	–2.8
5	–4.0

(1) $y = -1.2x + 2$
(2) $y = -1.2x^2 + 2$
(3) $y = 0.8\sqrt{x}$
(4) $y = x^{3/4} - 0.2$

74.

x	y
1	–9
2	–4
3	11
4	42
5	95

(1) $y = 13x - 22$
(2) $y = x^2 - 2x - 8$
(3) $y = 4\sqrt{x} - 13$
(4) $y = x^3 - x^2 + x - 10$

2.2 Problemas aplicados

Las ecuaciones se usan con frecuencia en la solución de *problemas aplicados*; es decir, problemas con aplicaciones matemáticas a otros campos. Debido a la ilimitada variedad de problemas apli-

www.elsolucionario.net

cados, es difícil expresar reglas específicas para hallar soluciones. Las siguientes guías pueden ser útiles, siempre que sea posible formular el problema en términos de una ecuación en una variable.

Guías para resolver problemas aplicados

(1) Si el problema se expresa por escrito, léelo con cuidado varias veces y considera los datos junto con la cantidad desconocida que ha de encontrarse.

(2) Introduce una letra para denotar la cantidad desconocida. Éste es uno de los pasos más importantes en la solución. Frases que tengan palabras como *qué, hallar, cuánto, a qué distancia* o *cuándo* ponen sobre aviso respecto a la cantidad desconocida.

(3) Si es necesario, haz un dibujo y ponle leyendas.

(4) Lista los datos conocidos y sus relaciones con la cantidad desconocida. Una ecuación en que aparecen enunciados escritos (en lugar de letras o números) en uno o ambos lados del signo igual, puede describir una relación.

(5) Después de analizar la lista de la guía 4, formula una ecuación que describa con precisión qué se expresa en palabras.

(6) Resuelve la ecuación formulada en la guía 5.

(7) Comprueba las soluciones obtenidas en la guía 6 consultando el enunciado original del problema. Verifica que la solución esté acorde con las condiciones indicadas.

El próximo ejemplo ilustra el uso de estas guías.

EJEMPLO 1 *Promedio de examen*

En un curso de álgebra, un estudiante obtiene calificaciones de 64 y 78. ¿Qué calificación en el tercer examen le dará un promedio de 80?

Solución **Guía 1** Lee el problema al menos una vez más.

Guía 2 La cantidad desconocida es la calificación del tercer examen, así que anota

$$x = \text{calificación del tercer examen.}$$

Guía 3 No es necesario un dibujo o un diagrama para este problema.

Guía 4 Los datos conocidos son las calificaciones de 64 y 78 de los primeros dos exámenes. Una relación donde aparece x es la calificación promedio de 64, 78 y x; por lo tanto,

$$\text{calificación promedio} = \frac{64 + 78 + x}{3}.$$

Guía 5 Como la calificación promedio de la guía 4 es 80, considera la ecuación

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = 80.$$

(continúa)

www.elsolucionario.net

Guía 6 Resuelve la ecuación formulada en la guía 5:

$$64 + 78 + x = 80 \cdot 3 \qquad \text{multiplicar por 3}$$

$$142 + x = 240 \qquad \text{simplificar}$$

$$x = 98 \qquad \text{restar 142}$$

Guía 7 **PRUEBA** Si las tres calificaciones de examen son 64, 78 y 98, entonces el promedio es

$$\frac{64 + 78 + 98}{3} = \frac{240}{3} = 80,$$

como se desea.

En los ejemplos restantes, trata de identificar las guías explícitas que se usan en soluciones.

EJEMPLO 2 *Cálculo de un precio de preventa*

Una tienda de ropa, que hace una venta de liquidación, anuncia que ha reducido todos los precios en 20 por ciento. Si una camisa se vende en $28, ¿cuál es su precio de preventa?

Solución En vista de que la cantidad desconocida es el precio de preventa, hacemos

$$x = \text{precio de preventa.}$$

Tomamos nota de los siguientes datos:

$$0.20x = \text{descuento de 20\% sobre el precio de preventa}$$

$$28 = \text{precio de venta}$$

El precio de venta se determina como sigue:

$$(\text{precio de preventa}) - (\text{descuento}) = \text{precio de venta}$$

Traducimos la última ecuación en símbolos, resolvemos y resulta

$$x - 0.20x = 28 \qquad \text{formular una ecuación}$$

$$0.80x = 28 \qquad \text{restar } 0.20x \text{ de } 1x$$

$$x = \frac{28}{0.80} = 35. \qquad \text{dividir entre } 0.80$$

El precio de preventa es de $35.

PRUEBA Si una camisa de $35 se rebaja 20%, el descuento es (0.20)(35) = 7 y el precio de venta es 35 – 7, o sea $28.

www.elsolucionario.net

Los bancos y otras instituciones financieras pagan interés sobre inversiones. Por lo general este interés es *compuesto* (como se describe en la Sec. 5.1); si se invierte o presta dinero a un tiempo corto, puede pagarse *interés simple* usando esta fórmula:

Fórmula de interés simple

Si se invierte una cantidad de dinero C (o **capital inicial**) a una tasa r de interés simple (expresada como decimal), el **interés simple** I al término de t años es

$$I = Crt.$$

La tabla adjunta ilustra el interés simple para tres casos.

Inicial C	Tasa de interés r	Número de años t	Interés $I = Crt$
\$1000	$8\% = 0.08$	1	$\$1000(0.8)(1) = \$80$
\$2000	$6\% = 0.06$	$1\frac{1}{2}$	$\$2000(0.06)(1.5) = \$180$
\$3200	$5\frac{1}{2}\% = 0.055$	2	$\$3200(0.55)(2) = \$352$

EJEMPLO 3 *Inversión de dinero en dos acciones*

Una empresa inversionista tiene \$100 000 de un cliente para invertir y decide ponerlos en dos acciones, A y B. La tasa esperada de interés anual o interés simple de la acción A es 15%, pero tiene algún riesgo y el cliente no desea invertir más de \$50 000 en dicha acción. Se anticipa que la tasa anual de interés de la acción B, que es más estable, es de 10 por ciento. Determina si hay una forma de invertir el dinero de modo que el interés anual sea

a) \$12 000 **b)** \$13 000

Solución El interés anual está dado por $I = Cr$, que resulta de la fórmula de interés simple $I = Crt$ con $t = 1$. Si denotamos con x la cantidad invertida en la acción A, entonces $100\,000 - x$ se invertirán en la acción B. Esto lleva a las siguientes igualdades:

x = cantidad invertida en la acción A al 15%

$100\,000 - x$ = cantidad invertida en la acción B al 10%

$0.15x$ = interés anual de la acción A

$0.10(100\,000 - x)$ = interés anual de la acción B

Al sumar el interés de ambas acciones obtenemos

$$\text{Interés anual total} = 0.15x + 0.10(100\,000 - x).$$

Simplificamos el lado derecho del signo igual y llegamos a

$$\text{Interés anual total} = 10\,000 + 0.05x. \qquad (*)$$

(continúa)

www.elsolucionario.net

a) El interés anual total es \$12 000 si

$$10\,000 + 0.05x = 12\,000 \qquad \text{de (*)}$$

$$0.05x = 2000 \qquad \text{restar } 10\,000$$

$$x = \frac{2000}{0.05} = 40\,000. \qquad \text{dividir entre } 0.05$$

Por lo tanto, deben invertirse \$40 000 en la acción A, y los \$60 000 restantes, en la acción B. Como la cantidad destinada a la acción A no es mayor de \$50 000, esta forma de invertir dinero satisface las indicaciones del cliente.

PRUEBA Si se invierten \$40 000 en la acción A y \$60 000 en la acción B, entonces el interés anual total es

$$40\,000(0.15) + 60\,000(0.10) = 6000 + 6000 = 12\,000.$$

b) El interés anual total es \$13 000 si

$$10\,000 + 0.05x = 13\,000 \qquad \text{de (*)}$$

$$0.05x = 3000 \qquad \text{restar } 10\,000$$

$$x = \frac{3000}{0.05} = 60\,000. \qquad \text{dividir entre } 0.05$$

Así pues, deben invertirse \$60 000 en la acción A y los otros \$40 000 en la B. Este plan *no* satisface las indicaciones del cliente respecto de no invertir más de \$50 000 en la acción A; en consecuencia, la empresa no puede invertir en las acciones A y B de modo tal que el interés anual total sea \$13 000.

En ciertas aplicaciones es necesario combinar dos sustancias a fin de obtener una mezcla prescrita, según se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 4 *Mezcla de sustancias químicas*

Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene un ácido al 30% de concentración. ¿Cuántos mililitros de ácido puro han de agregarse para aumentar la concentración al 50%?

Solución Puesto que la cantidad desconocida es el ácido puro por agregar, se hace

$$x = \text{número de ml de ácido puro por agregar.}$$

Para visualizar el problema hagamos un dibujo, como en la figura 3, y pongamos las leyendas apropiadas.

Dado que se puede expresar la cantidad de ácido puro de la solución final como $3 + x$ (de los dos primeros vasos) o $0.50(10 + x)$, se obtiene la ecuación

$$3 + x = 0.50(10 + x).$$

www.elsolucionario.net

	Mezcla original al 30%	Ácido puro	Nueva mezcla al 50%
Cantidad total de la solución	10 ml	x ml	$10 + x$ ml
Cantidad de ácido puro	$0.30(10) = 3$ ml	$1.00(x) = x$ ml	$0.50(10 + x)$ ml

FIGURA 3

Ahora despejamos x:

$$3 + x = 5 + 0.5x \qquad \text{multiplicar factores}$$

$$0.5x = 2 \qquad \text{restar } 0.5x \text{ y } 3$$

$$x = \frac{2}{0.5} = 4 \qquad \text{dividir entre } 0.5$$

Por lo tanto, hay que agregar 4 ml de ácido a la solución original.

PRUEBA Si se agregan 4 ml de ácido a la solución dada, la nueva solución contendrá 14 ml, 7 ml de los cuales son ácido puro. Ésta es la concentración al 50% que se deseaba.

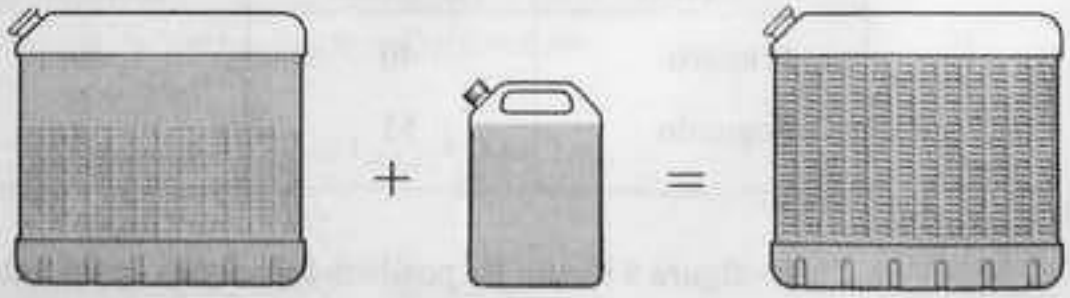
EJEMPLO 5 *Cambio de anticongelante*

Un radiador contiene 8 cuartos [1 cuarto (unidad sajona que se abrevia qt) = 0.946 l] de una mezcla de agua y anticongelante. Si el 40% de la mezcla es anticongelante, ¿cuánto de ésta debe drenarse y cambiarse por anticongelante puro para que el resultado contenga 60% de anticongelante?

Solución Sea

x = número de cuartos de la mezcla por drenar.

Como había 8 qt en la mezcla original al 40%, el problema se puede describir como en la figura 4.



	Mezcla original al 40%, menos cantidad drenada	Anticongelante puro	Nueva mezcla al 60%
Cantidad total	$(8 - x)$ qt	x qt	8 qt
Cantidad de anticongelante puro	$0.40(8 - x)$ qt	$1.00(x) = x$ qt	$0.60(8) = 4.8$ qt

FIGURA 4

www.elsolucionario.net

En vista de que el número de cuartos de anticongelante puro de la mezcla final se puede expresar como $0.40(8 - x)$ o 4.8, se obtiene la ecuación

$$0.40(8 - x) + x = 4.8.$$

Ahora despejamos x:

$$3.2 - 0.4x + x = 4.8 \qquad \text{multiplicar factores}$$

$$0.6x = 1.6 \qquad \text{combinar términos en } x \text{ y restar } 3.2$$

$$x = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \qquad \text{dividir entre } 0.6$$

En consecuencia, hay que drenar $\frac{8}{3}$ qt de la mezcla original.

PRUEBA Observemos primero que la cantidad de anticongelante de la mezcla original de 8 qt era 0.4(8), o sea 3.2 qt. Al drenar $\frac{8}{3}$ qt de la mezcla original al 40%, se pierden $0.4\left(\frac{8}{3}\right)$ qt de anticongelante y, por lo tanto, quedarán $3.2 - 0.4\left(\frac{8}{3}\right)$ qt de anticongelante después del drenado. Si agregamos $\frac{8}{3}$ qt de anticongelante puro, la cantidad de anticongelante de la mezcla final es

$$3.2 - 0.4\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{8}{3} = 4.8 \text{ qt.}$$

Este número, 4.8, es 60% de 8.

EJEMPLO 6 *Comparación de tiempos de recorrido de autos*

Dos ciudades están conectadas por una carretera. Un auto sale de la ciudad B a la 1:00 p.m. y avanza a una velocidad constante de 40 millas por hora (mph) hacia la ciudad C. Treinta minutos después, otro vehículo sale de B y avanza hacia C a una velocidad constante de 55 mph. Si despreciamos las longitudes de los autos, ¿a qué hora el segundo automóvil alcanzará al primero?

Solución Denotemos con t el número de horas de viaje del primer auto después de la 1:00 p.m. Como el segundo sale de B a la 1:30 p.m., ha viajado $\frac{1}{2}$ hora menos que el primero, lo que lleva a esta tabla.

Autos	Velocidad	Horas de viaje	Millas recorridas
Primero	40	t	$40t$
Segundo	55	$t - \frac{1}{2}$	$55\left(t - \frac{1}{2}\right)$

La figura 5 ilustra las posibles posiciones de los vehículos t horas después de la 1:00 p.m. El segundo alcanza al primero cuando el número de millas recorridas por los dos carros sea igual; esto es, cuando

$$55\left(t - \frac{1}{2}\right) = 40t.$$

www.elsolucionario.net

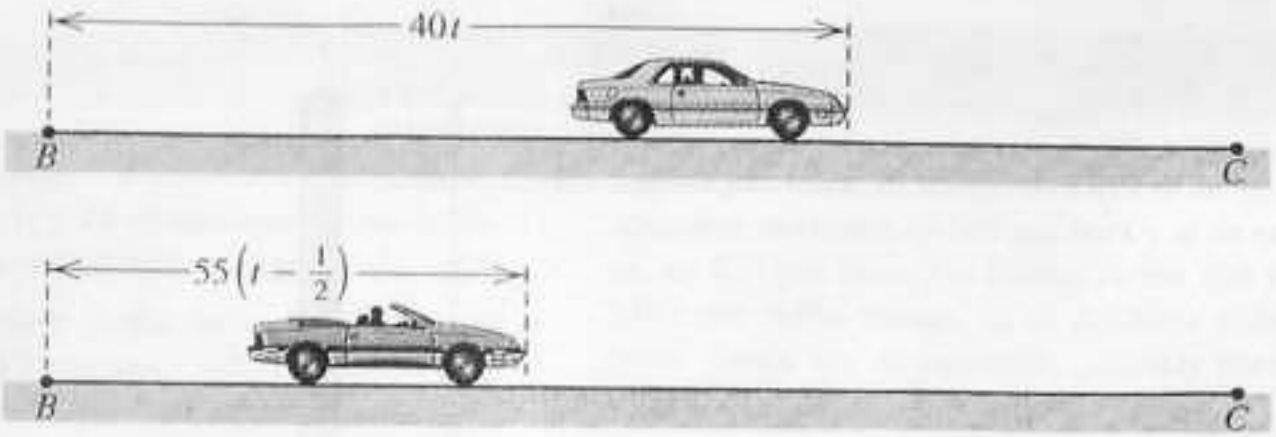


FIGURA 5

Ahora despejamos t:

$$55t - \tfrac{55}{2} = 40t \qquad \text{multiplicar factores}$$

$$15t = \tfrac{55}{2} \qquad \text{restar } 40t \text{ y sumar } \tfrac{55}{2}$$

$$t = \tfrac{55}{30} = \tfrac{11}{6} \qquad \text{dividir entre 15}$$

En consecuencia, t es $1\frac{5}{6}$ horas o, lo que es igual, 1 hora 50 minutos después de la 1:00 p.m., por lo que el segundo auto alcanza al primero a las 2:50 p.m.

PRUEBA A las 2:50 p.m. el primer auto ha viajado durante $1\frac{5}{6}$ horas, y su distancia de B es $40\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{220}{3}$ millas. A las 2:50 p.m. el segundo auto ha viajado durante $1\frac{1}{3}$ horas y está a $55\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{220}{3}$ millas de B; por lo tanto, estarán juntos a las 2:50 p.m.

EJEMPLO 7 *Construcción de una tolva elevadora de granos*

Una tolva elevadora de granos ha de construirse como se muestra en la figura 6, con un cilindro circular recto de 2 ft de radio y h ft de altura en lo alto de un cono circular recto cuya altura es la mitad de la del cilindro. ¿Qué valor de h hará que el volumen total V de la tolva sea de 500 ft^3?

Solución Si V_{cilindro} y V_{cono} denotan el volumen (en ft^3) y h_{cilindro} y h_{cono} representan las alturas (en ft) del cilindro y el cono, respectivamente, entonces, usando las fórmulas para volumen indicadas en el apéndice se obtiene:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h_{\text{cilindro}} = \pi(2)^2 h = 4\pi h$$

$$V_{\text{cono}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_{\text{cono}} = \tfrac{1}{3}\pi(2)^2\left(\tfrac{1}{2}h\right) = \tfrac{2}{3}\pi h$$

Como el volumen total V de la tolva debe ser 500 ft^3, debemos tener

$$4\pi h + \tfrac{2}{3}\pi h = 500 \qquad V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cono}} = V_{\text{total}}$$

$$12\pi h + 2\pi h = 1500 \qquad \text{multiplicar por 3}$$

www.elsolucionario.net

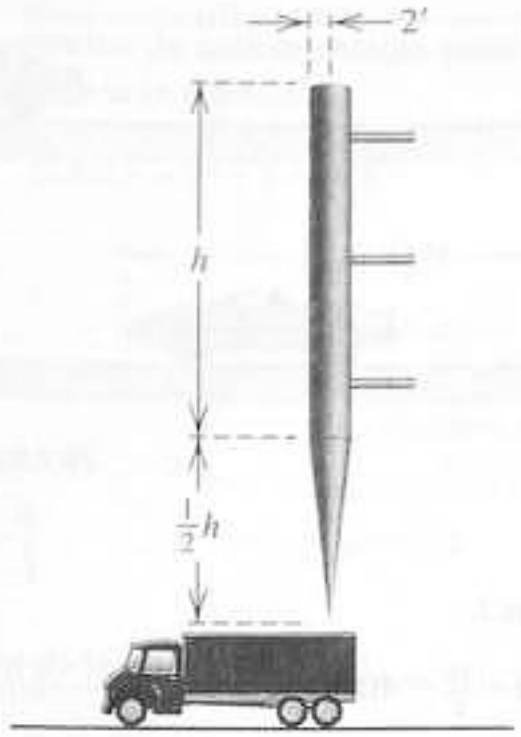


FIGURA 6

$$14\pi h = 1500 \qquad \text{combinar términos}$$

$$h = \frac{1500}{14\pi} \approx 34.1 \text{ ft} \qquad \text{dividir entre } 14\pi$$

EJEMPLO 8 *Tiempo requerido para realizar un trabajo*

Se dispone de dos bombas a fin de llenar un tanque para almacenar gasolina. La bomba A, sola, puede hacerlo en tres horas y la bomba B, en cuatro. Si se usan al mismo tiempo, ¿cuánto tardarán en llenar el tanque?

Solución Denotemos con t la cantidad de horas necesaria para que A y B llenen el tanque si se usan en forma simultánea. Es conveniente introducir la *parte* del tanque llenada en una hora (h) como sigue:

$\frac{1}{3}$ = parte del tanque llenada por A en una hora

$\frac{1}{4}$ = parte del tanque llenada por B en una hora

$\frac{1}{t}$ = parte del tanque llenada por A y B en una hora

Con el hecho de que

$$\begin{pmatrix}\text{parte llenada}\\ \text{por A en 1 h}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte llenada}\\ \text{por B en 1 h}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{parte llenada}\\ \text{por A y B en 1 h}\end{pmatrix}$$

obtenemos

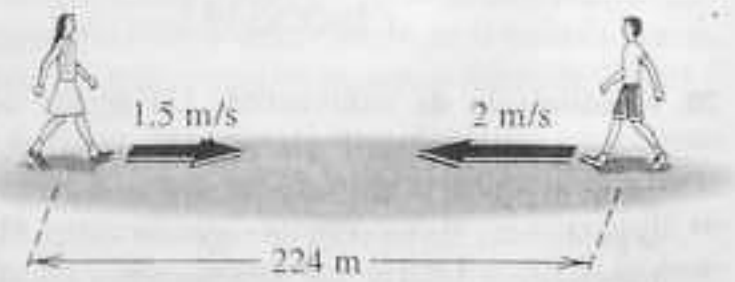
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{t}, \quad \text{o} \quad \frac{7}{12} = \frac{1}{t}.$$

Tomamos el recíproco de cada lado de la última ecuación y llegamos a $t = \frac{12}{7}$; por lo tanto, si las bombas A y B se usan al mismo tiempo, el tanque se llenará en $1\frac{5}{7}$ h, o sea alrededor de 1 hora 43 minutos.

www.elsolucionario.net

2.2 EJERCICIOS

1. **Calificaciones de examen** Un estudiante de álgebra obtiene notas de 75, 82, 71 y 84 en exámenes. ¿Qué calificación en su siguiente prueba elevará su promedio a 80?
2. **Promedio final de clase** Antes del examen final, un estudiante obtiene calificaciones de 72, 80, 65, 78 y 60 en exámenes. Si la evaluación final equivale a un tercio de la calificación final, ¿qué calificación necesita para tener un promedio final de 76?
3. **Sueldo bruto** Un trabajador percibe $492 de salario después de restar deducciones, las cuales corresponden al 40% del sueldo bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?
4. **Costo de comer fuera de casa** Una pareja desea cenar en un restaurante pero no quiere gastar más de $70. Si se agrega un impuesto de ventas de 6% a la cuenta y piensan dar una propina de 15% después de agregar el impuesto, ¿cuál es la cantidad máxima que pueden consumir?
5. **Costo del aislamiento** El costo de instalar aislamiento térmico en una casa particular de dos recámaras es de $1080. En la actualidad el promedio mensual de los costos de calefacción es de $60, pero se espera que el aislamiento los reduzca un 10 por ciento. ¿Cuántos meses tardará en recuperar el costo del aislamiento?
6. **Pago de tiempo extra** El salario básico de un trabajador es de $10 por hora, pero recibe un tanto y medio de esta cuota por cada hora que rebase las 40 horas por semana. Si el cheque de su semana es de $595, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?
7. **Cuentas de ahorros** Un estudiante de álgebra ha ganado $100 000 en una lotería y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos instituciones financieras. Una cuenta paga 8% de interés simple, pero los depósitos se aseguran sólo a $50 000. La segunda cuenta paga 6.4% de interés simple pero los depósitos se aseguran hasta por $100 000. Determina si el dinero se puede depositar de modo que esté asegurado totalmente y gane intereses anuales de $7500.
8. **Fondos municipales** Un gobierno municipal ha aprobado la construcción de un estadio deportivo de $50 millones; se captarán hasta $30 millones por la venta de bonos que pagarán interés simple a una tasa de 12% anual. Una compañía de seguros financiará la cantidad restante (hasta $40 millones) a una tasa de interés simple de 10 por ciento. Determina si el estadio es financiable de modo que los intereses anuales sean de $5.2 millones.
9. **Asistencia a un cine** Seiscientas personas asisten a presenciar el estreno de una película. Los boletos para adultos cuestan $5 y los de niños $2. Si la taquilla recibe un total de $2400, ¿cuántos niños asistieron al estreno?
10. **Sueldo por hora** El tiempo de servicio de un ingeniero consultor se factura en $60 por hora y el de su ayudante, en $20 por hora. Un cliente recibe una cuenta de $580 por cierto trabajo. Si el ayudante trabajó cinco horas menos que el ingeniero, ¿cuántas horas facturó cada uno?
11. **Preparación de una solución de glucosa** En cierta prueba médica diseñada para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto ingiere 7 onzas (oz) de una solución de glucosa al 30%; cuando la prueba se aplica a un niño, la concentración de glucosa debe disminuirse al 20 por ciento. ¿Cuánta solución de glucosa al 30% y cuánta agua se necesitan a fin de preparar 7 oz de una solución de glucosa al 20%?
12. **Preparación de gotas para los ojos** Un farmacéutico debe preparar 15 ml de gotas oftálmicas para un paciente con glaucoma. La solución ha de tener un ingrediente activo al 2%, pero el farmacéutico sólo tiene en existencia soluciones al 10 y al 1 por ciento. ¿Cuánto de cada tipo requiere la elaboración de la receta?
13. **Preparación de una aleación** La plata británica Sterling es una aleación que contiene 7.5% de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos de plata Sterling deben emplearse para preparar 200 g de una aleación de cobre-plata con 10% de cobre en peso?
14. **Concentración de medicamento** Para preparar la teofilina, un agente antiasmático, se usa un elixir con una concentración de fármaco de 5 mg/ml y un jarabe como saborizante. ¿Qué cantidad de ambos se necesita para preparar 100 ml de solución con una concentración del medicamento de 2 mg/ml?
15. **Rapidez al caminar** Dos niños, que se encuentran a 224 m entre sí, empiezan a caminar uno hacia el otro al mismo instante y a velocidades de 1.5 m/s y 2 m/s, respectivamente (ve la figura)
    a) ¿Cuándo se encontrarán?
    b) ¿Cuánto habrá caminado cada uno?



EJERCICIO 15

16. **Velocidad de carrera** Un corredor empieza a correr en cierto lugar a una velocidad constante de 6 millas por

www.elsolucionario.net

hora (mph). Cinco minutos más tarde, un segundo corredor sale del mismo sitio y hace el mismo recorrido a una velocidad de 8 mph. ¿En cuánto tiempo alcanzará al primero?

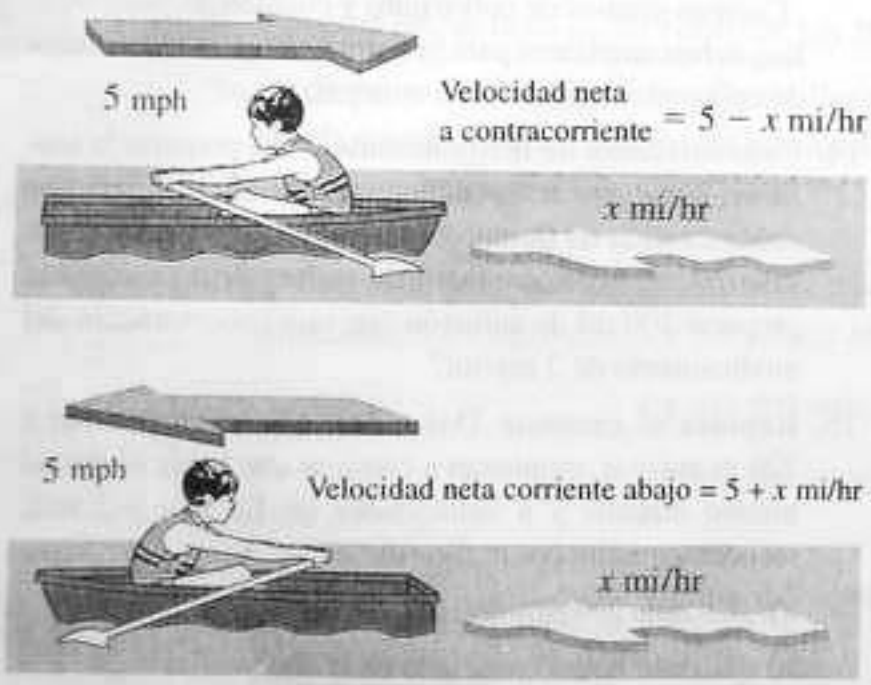
17. **Velocidad de una máquina barrenieves** A las 6:00 a.m. un barrenieves, que avanza a una velocidad constante, empieza a despejar una carretera que conduce a las afueras de la ciudad. A las 8:00 a.m., un automóvil toma esa carretera a una velocidad de 30 mph y la alcanza 30 minutos después. Encuentra la velocidad de la máquina.

18. **Alcance de radiocomunicación** Dos niños tienen aparatos de radiocomunicación cuyo alcance máximo es de dos millas. Uno de los menores empieza a caminar de cierto lugar hacia el norte, a la 1:00 p.m., a una velocidad de 4 mph. El otro pequeño sale del mismo sitio a la 1:15 p.m. y camina hacia el sur a 6 mph. ¿A qué hora ya no podrán comunicarse?

19. **Velocidad al remar** Un muchacho puede remar a una velocidad de 5 mph en aguas tranquilas (ve la figura). Si rema a contracorriente durante 15 minutos y luego corriente abajo y regresa al punto de partida en 12 minutos, encuentra

    a) La velocidad de la corriente.

    b) La distancia total que recorrió.



EJERCICIO 19

20. **Rendimiento de combustible** Un agente de ventas compró un automóvil que promediaba 25 millas por galón (mpg) en la ciudad y 40 mpg en carretera, según la publicidad. En un viaje de negocios utilizó 51 galones para recorrer 1800 millas. Si suponemos que el anuncio del rendimiento era correcto, ¿cuántas millas recorrió en la ciudad?

21. **Distancia a un blanco** Se dispara horizontalmente un proyectil hacia un blanco y el sonido del impacto se escucha 1.5 s más tarde. Si la velocidad del proyectil es de 3300 ft/s y la velocidad del sonido es de 1100 ft/s, ¿a qué distancia se halla el blanco?

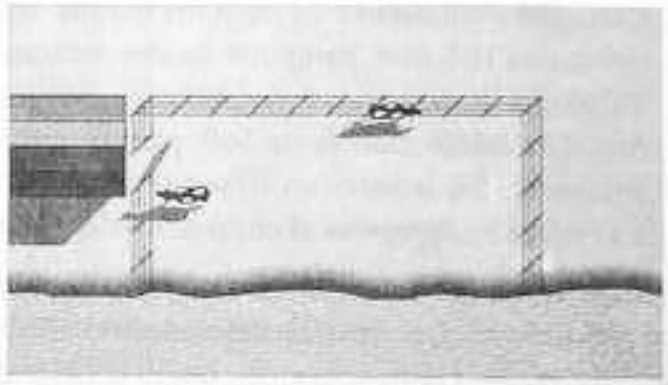
22. **Velocidad al trotar** Una corredora sale a las 3:00 p.m. y se dirige hacia el norte a una velocidad de 6 minutos por milla. Más tarde cambia de dirección y corre hacia el sur a un paso de 7 minutos por milla. Si regresa al punto de partida a las 3:45 p.m. calcula el número total de millas que corrió.

23. **Cercado de un terreno** Un campesino desea cercar un terreno rectangular y piensa usar 180 ft de alambrado y parte de la orilla de un río, en vez de cercar uno de los lados del rectángulo, como se muestra en la figura. Encuentra el área del terreno si la longitud del lado paralelo a la orilla del río es

    a) El doble de la longitud de uno de los lados adyacentes.

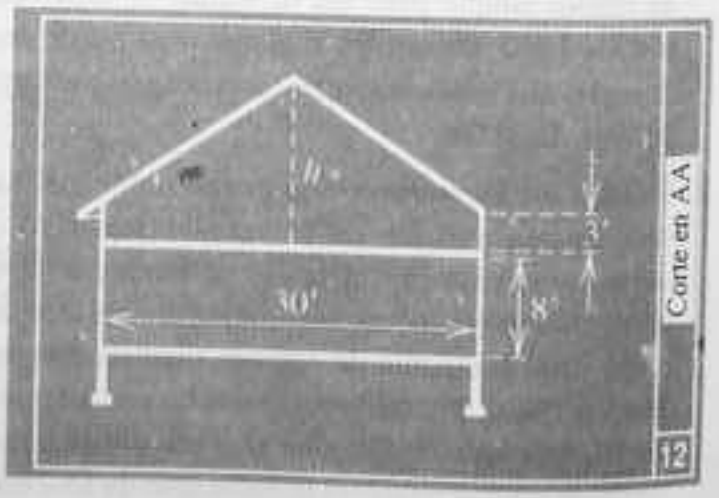
    b) La mitad de la longitud de un lado adyacente.

    c) La misma longitud de un lado adyacente.



EJERCICIO 23

24. **Dimensiones de una casa** En la figura se presenta la sección transversal de una casa de dos pisos, para la que la altura central del segundo piso, h, todavía no ha sido determinada. Encuentra h tal que el área transversal del segundo piso sea la misma que la del primero.

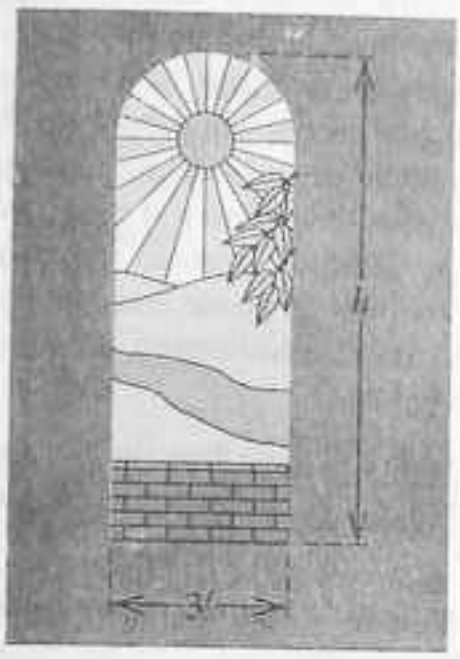


EJERCICIO 24

25. **Dimensiones de una ventana** Se diseña un vitral en forma de rectángulo bajo de un semicírculo (ve la figu-

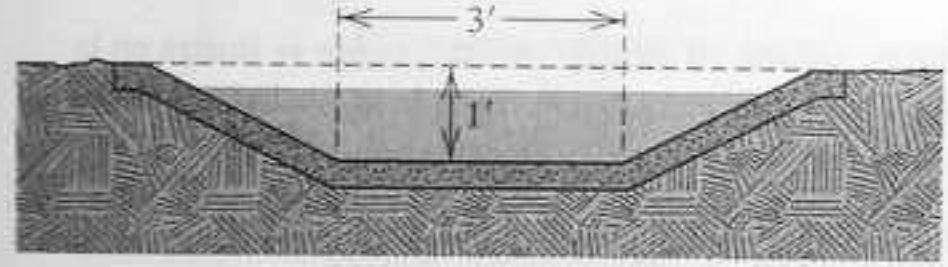
www.elsolucionario.net

ra). El ancho de la ventana es de 3 ft, pero la altura h todavía no se ha definido. Si se usan 24 ft^2 de vidrio, halla la altura h.



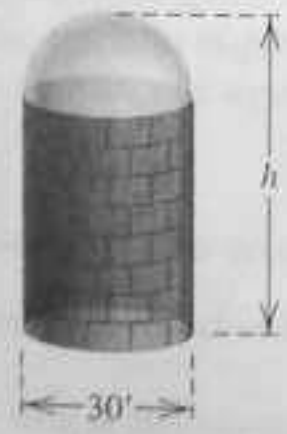
EJERCICIO 25

26. Dimensiones de un canal de drenaje La sección transversal de un canal de desagüe es un trapecio isósceles, cuya base menor es de 3 ft y una altura de 1 ft, como se ve en la figura. Determina el ancho de la base mayor para que el área transversal del canal sea de 5 ft^2.



EJERCICIO 26

27. Construcción de un silo Se desea construir un silo grande para granos en forma de cilindro circular con una semiesfera unida a la parte superior (ve la figura). El diámetro del silo debe ser de 30 ft pero la altura aún no se establece. Encuentra la altura h del silo para que su capacidad sea de $11\,250\pi$ ft^3.



EJERCICIO 27

28. Dimensiones de un cono (barquillo) El cono de la figura ha de tener una capacidad de 8 in^3 de nieve cuando se llene hasta el fondo. El diámetro del cono es de 2 in y la copa de nieve tiene forma de semiesfera. Encuentra la altura h del cono.

EJERCICIO 28

29. Rapidez para podar el césped Un muchacho tarda 90 minutos en podar un césped, pero su hermana puede hacerlo en 60 minutos. ¿Cuánto les tomará si trabajan juntos, usando dos podadoras?

30. Llenado de una piscina Una manguera llena una piscina en 8 horas y otra mayor lo hace en 5 horas. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenarla utilizando las dos mangueras simultáneamente?

31. Reparto de periódicos Una repartidora de periódicos tarda 45 minutos en entregar los diarios que le corresponden, pero si su hermano la ayuda sólo tardarán 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará su hermano en entregar él solo los periódicos?

32. Vaciado de un tanque Un tanque de agua puede vaciarse con una bomba en 5 horas, pero otra bomba más pequeña puede vaciarlo en 8 horas. Si se pone a funcionar la bomba grande a la 1:00 p.m., ¿a qué hora debe encenderse la pequeña para que el tanque quede vacío a las 5:00 p.m.?

33. Estadísticas en el beisbol Después de 100 juegos, un equipo de ligas mayores tiene un registro o índice de 0.65; es decir, ha ganado 65% de sus juegos. Si este equipo gana sólo el 50% de sus juegos en el resto de la temporada, ¿cuándo tendrá un registro o índice de 0.600?

34. Ley de Ohm En teoría eléctrica, la ley de Ohm enuncia que $I = V/R$, donde I es la corriente en amperes, V es la fuerza electromotriz en volts y R es la resistencia en ohms. En cierto circuito $V = 110$ y $R = 50$. Si se cambian V y R en la misma cantidad numérica, ¿qué alteración en ambos hará que I se duplique?

35. Temperatura del aire Bajo la base de una nube, la temperatura del aire T (en °F) a una altura h (en ft) se

www.elsolucionario.net

puede calcular mediante la ecuación $T = T_0 - \left(\frac{5.5}{1000}\right)h$, donde T_0 es la temperatura al nivel del suelo.

a) Determina la temperatura del aire a una altura de una milla si la temperatura del suelo es de 70 °F.

b) ¿A qué altitud se alcanza la temperatura de congelamiento?

36. Altura de una nube La altura h (en ft) de la base de la nube se puede calcular con la ecuación $h = 227(T - D)$, donde T es la temperatura del suelo y D es el punto de condensación.

a) Si la temperatura es de 70 °F y el punto de condensación es 55 °F, calcula la altura de la base de la nube.

b) Si el punto de condensación es 65 °F y la base de la nube está a 3500 ft, calcula la temperatura del suelo.

37. Temperatura de una nube La temperatura T dentro de una nube a una altura h (en ft) sobre la base de la nube se puede calcular usando la ecuación $T = B - \left(\frac{1}{1000}\right)h$, donde B es la temperatura de la nube en su base. Determina la temperatura a 10 000 ft en una nube con una temperatura de 55 °F en su base y una altura de 4000 ft en su base. **Nota:** para una aplicación interesante donde aparecen los tres ejemplos anteriores, consulta el ejercicio 6 en la sección de repaso al final del capítulo.

38. Relación entre huesos y estatura Los arqueólogos pueden determinar la estatura de un ser humano sin tener un esqueleto completo. Si un arqueólogo encuentra sólo un húmero, puede determinar la estatura del individuo usando una relación lineal simple (el húmero es el hueso entre el hombro y el codo). Para una mujer, si x es la longitud del húmero (en cm), entonces su estatura h (en cm) se puede encontrar con la fórmula $h = 65 + 3.14x$; para un hombre, debe usarse la fórmula $h = 73.6 + 3.0x$.

a) Se encuentra el esqueleto de una mujer que tiene un húmero de 30 cm; indica su estatura a su fallecimiento.

b) Por lo general, la estatura de una persona disminuye 0.06 cm cada año después de los 30. Se encuentra el esqueleto de un hombre con un húmero de 34 cm, y la estatura del hombre era de 174 cm. Determina la edad aproximada a su fallecimiento.

2.3 Ecuaciones cuadráticas

Desde el nivel del suelo se dispara un cohete de juguete en sentido vertical, como se ilustra en la figura 7. Si la velocidad inicial es de 120 ft/s y la única fuerza que actúa es la gravedad, entonces la altura h (en ft) del cohete sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 120t.$$

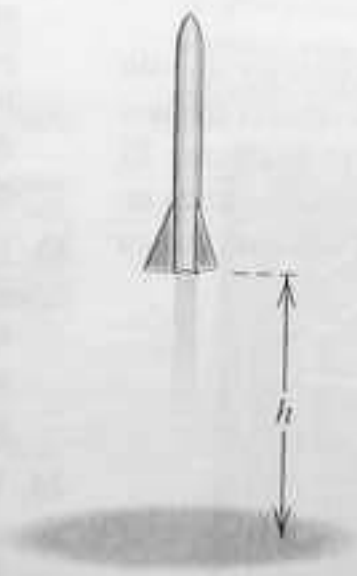


FIGURA 7

En la tabla se expresan algunos valores de h para los primeros siete segundos de vuelo.

www.elsolucionario.net

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7
h (ft)	0	104	176	216	224	200	144	56

En la tabla vemos que al ascender el cohete estaba a 180 ft sobre el suelo en algún instante entre $t = 2$ y $t = 3$. Al descender, se hallaba a 180 ft sobre el suelo en algún instante entre $t = 5$ y $t = 6$. A fin de hallar los valores exactos de t para los cuales $h = 180$ ft, debemos resolver la ecuación

$$180 = -16t^2 + 120t,$$

o bien

$$16t^2 - 120t + 180 = 0.$$

Según se indica en la tabla que sigue, una ecuación de este tipo se llama *ecuación cuadrática* en t. Tras desarrollar una fórmula para resolver estas ecuaciones, regresaremos a este problema en el ejemplo 11 y hallaremos los tiempos exactos en que el cohete estaba a 180 ft sobre el suelo.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación cuadrática en x	Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$	$4x^2 = 8 - 11x$ $x(3 + x) = 5$ $4x = x^2$

El teorema adjunto nos permite resolver muchos tipos de ecuaciones.

Teorema del factor cero

Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$pq = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o bien} \quad q = 0.$$

El teorema del factor cero se puede ampliar a cualquier número de expresiones algebraicas; esto es,

$$pqr = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0, \quad q = 0 \quad \text{o bien} \quad r = 0,$$

etc. Se deduce que si $ax^2 + bx + c$ se puede escribir como producto de dos polinomios de primer grado, entonces es posible encontrar soluciones igualando a 0 cada factor, como se ilustra en los dos ejemplos que siguen. Esta técnica se llama **método de factorización.**

EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación por factorización*

Resuelve la ecuación $3x^2 = 10 - x$.

Solución Para usar el método de factorización, *es esencial que sólo aparezca el número 0 en un lado de la ecuación.* Por lo tanto, procedemos como sigue:

www.elsolucionario.net

$$3x^2 = 10 - x \qquad \text{dado}$$

$$3x^2 + x - 10 = 0 \qquad \text{sumar } x - 10$$

$$(3x - 5)(x + 2) = 0 \qquad \text{factorizar}$$

$$3x - 5 = 0, \quad x + 2 = 0 \qquad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = \tfrac{5}{3}, \qquad x = -2 \qquad \text{despejar } x$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ y -2.

EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación por factorización*

Resuelve la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Solución Procedemos como en el ejemplo 1:

$$x^2 + 16 = 8x \qquad \text{dado}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \qquad \text{restar } 8x$$

$$(x - 4)(x - 4) = 0 \qquad \text{factorizar}$$

$$x - 4 = 0, \quad x - 4 = 0 \qquad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = 4, \qquad x = 4 \qquad \text{despejar } x$$

Por lo tanto, la ecuación cuadrática dada tiene una solución: 4.

Puesto que $x - 4$ aparece dos veces como factor en la solución previa, el 4 recibe el nombre de **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2** de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para alguna $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$ o bien, lo que es equivalente,

$$(x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0.$$

Igualar a cero cada factor nos dará las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. A menudo se usa el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (*más* o *menos* $\sqrt{d}$) para representar tanto a $\sqrt{d}$ como a $-\sqrt{d}$; por lo tanto, para $d > 0$, hemos probado este resultado (el caso $d < 0$ requiere el sistema de números complejos estudiado en la Sec. 2.4).

Una ecuación cuadrática especial

$$\text{Si } x^2 = d, \quad \text{entonces} \quad x = \pm\sqrt{d}.$$

El proceso de resolver $x^2 = d$ como se indica en el cuadro anterior puede describirse con la frase *tomar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación*. Notarás que si $d > 0$, obtenemos una raíz cuadrada positiva y una negativa, no sólo la raíz cuadrada principal definida en la sección 1.2.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3 *Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = d$*

Resuelve las ecuaciones:

a) $x^2 = 5$ **b)** $(x + 3)^2 = 5$

Solución

a) $x^2 = 5$ dado

$x = \pm\sqrt{5}$ tomar la raiz cuadrada

Por lo tanto, las soluciones son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.

b) $(x + 3)^2 = 5$ dado

$x + 3 = \pm\sqrt{5}$ tomar la raiz cuadrada

$x = -3 \pm \sqrt{5}$ restar 3

Asi pues, las soluciones son $-3 + \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$.

En el trabajo siguiente deberemos cambiar una expresión de la forma $x^2 + kx$ por $(x + d)^2$, donde k y d son números reales. Este procedimiento se conoce como **completar el cuadrado** para $x^2 + kx$ y se puede llevar a cabo al sumar $(k/2)^2$, como se describe en el siguiente cuadro (se usa el mismo procedimiento para $x^2 - kx$).

Completar el cuadrado

A fin de completar el cuadrado para $x^2 + kx$ o $x^2 - kx$, se suma $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; esto es, *se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.*

(1) $x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$

(2) $x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$

EJEMPLO 4 *Completar el cuadrado*

Completa el cuadrado para

a) $x^2 + 3x$ **b)** $x^2 - 3x$

Solución El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ (observarás que se puede despreciar el signo del coeficiente de x).

a) $x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

b) $x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

www.elsolucionario.net

En el siguiente ejemplo resolvemos una ecuación cuadrática completando el cuadrado.

EJEMPLO 5 *Solución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado*

Resuelve la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$.

Solución Es conveniente reescribir primero la ecuación de modo que sólo términos con x se encuentren a la izquierda, como sigue:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \qquad \text{dado}$$

$$x^2 - 5x = -3 \qquad \text{restar } 3$$

$$x^2 - 5x + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \qquad \text{completar el cuadrado sumando } \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \text{ a } \textit{ambos} \text{ lados}$$

$$\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{13}{4} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$x - \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{13}{4}} \qquad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \qquad \text{sumar } \tfrac{5}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son $(5 + \sqrt{13})/2 \approx 4.3$ y $(5 - \sqrt{13})/2 \approx 0.7$.

Se puede resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 1$ agregando un paso al procedimiento en el ejemplo anterior. Después de reescribir la ecuación de modo que haya sólo términos con x a la izquierda,

$$ax^2 + bx = -c,$$

dividimos ambos lados entre a y tenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Completamos el cuadrado sumando $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados. Esta técnica se usa en la prueba de la siguiente importante fórmula.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

PRUEBA Supondremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ de modo que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sea un número real (el caso en que $b^2 - 4ac < 0$ se estudiará en la Sec. 2.4). Continuemos como sigue:

www.elsolucionario.net

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{dado}$$

$$ax^2 + bx = -c \qquad \text{restar } c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{dividir entre } a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \qquad \text{completar el cuadrado}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{tomar la raiz cuadrada}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{restar } \frac{b}{2a}$$

Podemos escribir el radical de la última ecuación como

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

Dado que $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, todos los casos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Notarás que si la fórmula cuadrática se ejecuta en forma adecuada, no es necesario comprobar las soluciones.

El número $b^2 - 4ac$ bajo el signo del radical de la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante sirve para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación, como en la tabla adjunta.

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	**Naturaleza de las raíces de** $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y diferentes
Cero	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No hay raíz real

El discriminante de los próximos dos ejemplos es positivo. En el ejemplo 8 el discriminante es 0.

EJEMPLO 6 *Uso de la fórmula cuadrática*

Resuelve la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$.

www.elsolucionario.net

Solución Sea $a = 4$, $b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8}$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1.$$

El ejemplo 6 también acepta la factorización. Al escribir $(4x - 3)(x + 1) = 0$ e igualar cada factor a cero tendremos $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.

EJEMPLO 7 *Uso de la fórmula cuadrática*

Resuelve la ecuación $2x(3 - x) = 3$.

Solución Para usar la fórmula cuadrática debemos escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$2x(3 - x) = 3$	dado
$6x - 2x^2 = 3$	multiplicar factores
$-2x^2 + 6x - 3 = 0$	restar 3
$2x^2 - 6x + 3 = 0$	multiplicar por -1

Con $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}.$$

En virtud de que 2 es un factor del numerador y el denominador, la última fracción se simplifica así:

$$\frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones son $\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2.37$ y $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.63$.

El próximo ejemplo ilustra el caso de una raíz doble.

EJEMPLO 8 *Uso de la fórmula cuadrática*

Resuelve la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

www.elsolucionario.net

Solución Sea $a = 9$, $b = -30$ y $c = 25$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18}$$

$$= \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3}$$

En consecuencia, la ecuación tiene una raíz (doble), $\frac{5}{3}$.

EJEMPLO 9 ***Eliminación de las fracciones de una ecuación***

Resuelve la ecuación $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{36}{x^2-9}$.

Solución De acuerdo con las guías de la sección 2.1 para la solución de una ecuación con expresiones racionales, multiplicamos $(x + 3)(x - 3)$ por el MCDn. Pero, según la guía 2, los números (–3 y 3) que hacen cero al MCDn no pueden ser soluciones; así que procedemos como sigue:

$\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{36}{x^2-9}$	dado
$2x(x + 3) + 5(x - 3) = 36$	multiplicar $(x + 3)(x - 3)$ por el MCDn.
$2x^2 + 6x + 5x - 15 - 36 = 0$	multiplicar factores y restar 36
$2x^2 + 11x - 51 = 0$	simplificar
$(2x + 17)(x - 3) = 0$	factorizar
$2x + 17 = 0, \quad x - 3 = 0$	teorema del factor cero
$x = -\frac{17}{2}, \quad x = 3$	despejar x

Dado que $x = 3$ no puede ser solución, vemos que $x = -\frac{17}{2}$ es la única solución de la ecuación dada.

Muchos problemas aplicados llevan a ecuaciones cuadráticas. Uno está ilustrado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 ***Construcción de una caja rectangular***

Se desea construir una caja de base cuadrada y sin tapa a partir de una pieza cuadrada de lámina. Se practicará un corte de 3 in^2 en cada esquina y se doblarán los lados hacia arriba. Si la caja debe tener un volumen de 48 in^3, ¿de qué tamaño será la pieza de lámina?

www.elsolucionario.net

Solución Comencemos por hacer el dibujo de la figura 8, donde denotaremos con x la longitud desconocida del lado de la pieza de lámina. Subsecuentemente, cada lado de la base de la caja tendrá longitud de $x-3-3=x-6$.

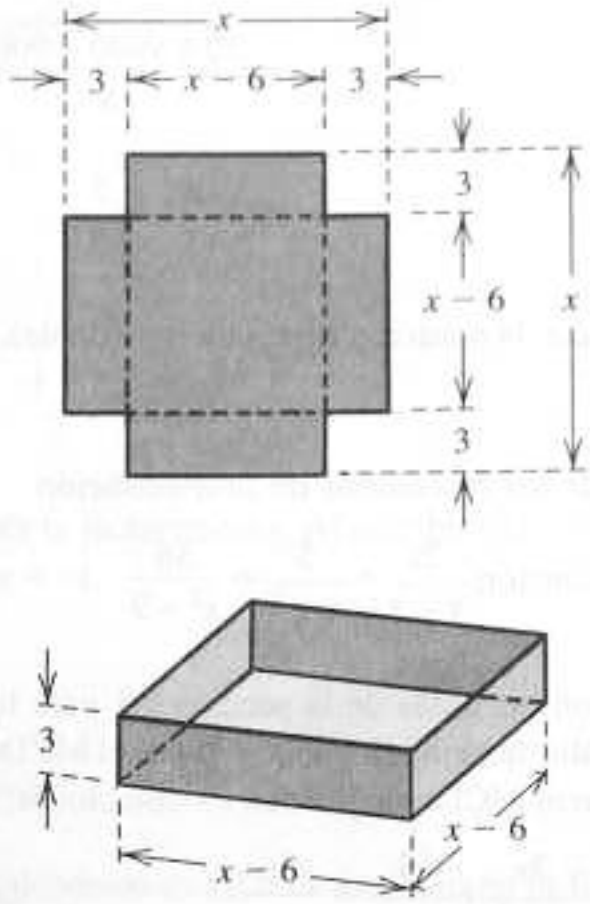


FIGURA 8

Como el área de la base de la caja es $(x-6)^2$ y la altura es 3, resulta

$$\text{volumen de la caja} = 3(x-6)^2.$$

En vista de que la caja ha de tener un volumen de 48 in^3,

$$3(x-6)^2 = 48.$$

Ahora despejamos x:

$$(x-6)^2 = 16 \qquad \text{dividir entre 3}$$

$$x-6 = \pm 4 \qquad \text{tomar la raiz cuadrada}$$

$$x = 6 \pm 4 \qquad \text{sumar 6}$$

En consecuencia,

$$x = 10 \quad \text{o} \quad x = 2.$$

PRUEBA En la figura 8 vemos que $x = 2$ es inaceptable puesto que no es posible hacer la caja en este caso; sin embargo, si comenzamos con una pieza de lámina de 10 in^2 por lado, le cortamos esquinas de 3 in y doblamos, obtenemos una caja con dimensiones de 4, 4 y 3 in; es decir tiene el volumen deseado de 48 in^3; por lo tanto, 10 in^2 es la respuesta al problema.

www.elsolucionario.net

Según se ilustra en el ejemplo 10, aunque cuando se formule correctamente una ecuación, es posible llegar a soluciones sin sentido a causa de la naturaleza física de un problema dado; dichas soluciones deben descartarse. Por ejemplo, no aceptaríamos la respuesta de –7 años para la edad de un individuo o $\sqrt{50}$ para el número de automóviles de un lote de estacionamiento.

En el siguiente ejemplo resolvemos el problema aplicado que se estudió al comienzo de esta sección.

EJEMPLO 11 *Definición de la altura de un cohete de juguete*

La altura h sobre el nivel del suelo (en ft) de un cohete de juguete, t segundos después de ser lanzado, está dada por $h = -16t^2 + 120t$. ¿Cuándo estará el cohete a 180 ft sobre el suelo?

Solución Con $h = -16t^2 + 120t$, se obtiene:

$$180 = -16t^2 + 120t \qquad \text{sea } h = 180$$

$$16t^2 - 120t + 180 = 0 \qquad \text{sumar } 16t^2 - 120t$$

$$4t^2 - 30t + 45 = 0 \qquad \text{dividir entre 4}$$

Aplicamos la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -30$ y $c = 45$, con lo cual,

$$t = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{180}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}.$$

Por lo tanto, el cohete estará a 180 ft sobre el suelo en los siguientes instantes:

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4} \approx 2.07 \text{ s}$$

$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 5.43 \text{ s}$$

2do. día

2.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 14: resuelve la ecuación por factorización

1. $6x^2 + x - 12 = 0$
2. $4x^2 + x - 14 = 0$
3. $15x^2 - 12 = -8x$
4. $15x^2 - 14 = 29x$
5. $2x(4x + 15) = 27$
6. $x(3x + 10) = 77$
7. $75x^2 + 35x - 10 = 0$
8. $48x^2 + 12x - 90 = 0$
9. $12x^2 + 60x + 75 = 0$
10. $4x^2 - 72x + 324 = 0$
11. $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{18}{x^2+3x}$
12. $\dfrac{5x}{x-2} + \dfrac{3}{x} + 2 = \dfrac{-6}{x^2-2x}$
13. $\dfrac{5x}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{90}{x^2-9}$
14. $\dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{-4}{x^2-4}$

Ejercicios 15 y 16: determina si las dos ecuaciones son equivalentes.

15. **a)** $x^2 = 16$, $x = 4$ **b)** $x = \sqrt{9}$, $x = 3$
16. **a)** $x^2 = 25$, $x = 5$ **b)** $x = \sqrt{64}$, $x = 8$

Ejercicios 17 al 24: resuelve la ecuación usando la ecuación cuadrática especial de la página 72.

www.elsolucionario.net

17. $x^2 = 169$

18. $x^2 = 361$

19. $25x^2 = 9$

20. $16x^2 = 49$

21. $(x-3)^2 = 17$

22. $(x+4)^2 = 31$

23. $4(x+2)^2 = 11$

24. $9(x-1)^2 = 7$

Ejercicios 25 y 26: determina los valores de d que completen el cuadrado para la expresión.

25. a) $x^2 + 9x + d$ **b)** $x^2 - 8x + d$

c) $x^2 + dx + 36$ **d)** $x^2 + dx + \frac{49}{4}$

26. a) $x^2 + 13x + d$ **b)** $x^2 - 6x + d$

c) $x^2 + dx + 25$ **d)** $x^2 + dx + \frac{81}{4}$

Ejercicios 27 al 30: resuelve completando el cuadrado.

27. $x^2 + 6x + 7 = 0$

28. $x^2 - 8x + 11 = 0$

29. $4x^2 - 12x - 11 = 0$

30. $4x^2 + 20x + 13 = 0$

Ejercicios 31 al 44: resuelve con la fórmula cuadrática.

31. $6x^2 - x = 2$

32. $5x^2 + 13x = 6$

33. $x^2 + 4x + 2 = 0$

34. $x^2 - 6x - 3 = 0$

35. $2x^2 - 3x - 4 = 0$

36. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

37. $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

38. $\frac{5}{3}s^2 + 3s + 1 = 0$

39. $\frac{5}{w^2} - \frac{10}{w} + 2 = 0$

40. $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$

41. $4x^2 + 81 = 36x$

42. $24x + 9 = -16x^2$

43. $\frac{5x}{x^2+9} = -1$

44. $\frac{1}{7}x^2 + 1 = \frac{4}{7}x$

Ejercicios 45 y 46: usa la fórmula cuadrática para resolver la ecuación para: a) x en términos de y y b) y en términos de x.

45. $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$

46. $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$

Ejercicios 47 al 50: despeja la variable especificada.

47. $K = \frac{1}{2}mv^2$ para v (energía cinética)

48. $F = g\frac{mM}{d^2}$ para d (ley de Newton de la gravitación)

49. $A = 2\pi r(r + h)$ para r (área de un cilindro cerrado)

50. $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ para t (distancia de caída de un objeto)

51. Velocidad de un gas Cuando un gas caliente sale de una chimenea cilíndrica, su velocidad varía en toda una sección transversal circular de la chimenea; el gas que se encuentra cerca del centro de la sección transversal tiene mayor velocidad que el cercano al perímetro. Este fenómeno se puede describir mediante la fórmula

$$V = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right],$$

donde $V_{máx}$ es la velocidad máxima del gas, r_0 es el radio de la chimenea y V es la velocidad del gas a una distancia r del centro de la sección transversal circular. De esta fórmula, despeja r.

52. Densidad de la atmósfera Para altitudes h de hasta 10 000 m, la densidad D de la atmósfera de la Tierra (en kg/m^3) se puede calcular mediante la fórmula

$$D = 1.225 - (1.12 \times 10^{-4})h + (3.24 \times 10^{-9})h^2.$$

Determina la altitud si la densidad de la atmósfera es $0.74\ kg/m^3$.

53. Dimensiones de una lata Un fabricante de latas desea construir una lata cilíndrica circular recta de 20 cm de altura y un volumen de $3000\ cm^3$ (ve la figura). Encuentra el radio interior r de la lata.

EJERCICIO 53

54. Construcción de una caja rectangular Consulta el ejemplo 10. Hay que elaborar una caja sin tapa cortando cuadrados de 3 in de una pieza rectangular de hojalata, cuya longitud es el doble de su ancho. ¿De qué tamaño debe ser una pieza de hojalata para hacer una caja que tenga un volumen de $60\ in^3$?

55. Pelota de beisbol Una bola de beisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 ft/s. El número de pies s sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $s = -16t^2 + 64t$.

a) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de 48 ft sobre el suelo?

b) ¿Cuándo regresará al piso?

56. Distancia de frenado La distancia que recorre un automóvil desde el momento en que el conductor decide aplicar los frenos y el instante en que se detiene, se conoce como distancia de frenado. Para cierto automóvil que avanza a v (en mph), la distancia de frenado d (en ft) está dada por $d = v + (v^2/20)$.

www.elsolucionario.net

a) Calcula la distancia de frenado cuando la velocidad es de 55 mph.

b) Si el conductor decide aplicar los frenos a 120 ft de una señal de alto, ¿cuál será la velocidad en ese momento para tener oportunidad de detenerse al llegar a la señal?

57. Temperatura de ebullición del agua La temperatura T (en °C) a la que hierve el agua está relacionada con la elevación h (en m) sobre el nivel del mar por la fórmula

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

para $95 \le T \le 100$

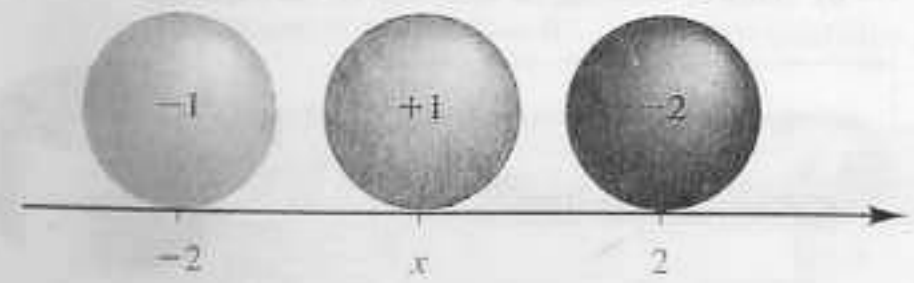
a) ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de 98 °C?

b) La altitud del Monte Everest es de alrededor de 8840 m. Calcula la temperatura a la que hierve el agua en la cima de esta montaña. (*Sugerencia:* usa la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$.)

58. Ley de Coulomb Una partícula de carga −1 está en una recta coordenada en $x = -2$ y una partícula de carga −2 está en $x = 2$ (ve la figura). Si una partícula de carga +1 está en la posición x entre −2 y 2, la ley de Coulomb en teoría eléctrica enuncia que la fuerza neta F que actúa sobre esta partícula está dada por

$$F = \frac{-k}{(x+2)^2} + \frac{2k}{(2-x)^2}$$

para alguna constante $k > 0$. Proporciona la posición en que la fuerza neta es cero.



EJERCICIO 58

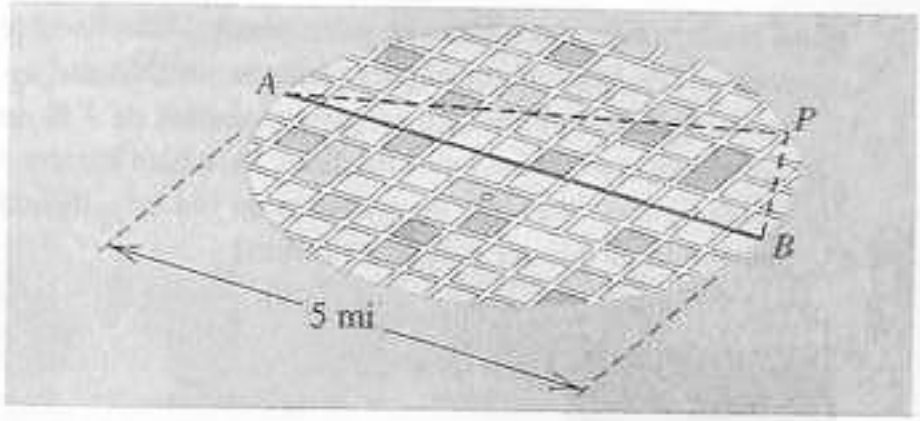
59. Dimensiones de una banqueta Un terreno rectangular de 26 por 30 ft está rodeado por una banqueta de ancho uniforme. Si el área de la banqueta es de 240 ft^2, ¿cuál es su ancho?

60. Diseño de un cartel En una hoja de papel de 24×36 in se ha de imprimir una fotografía, con el lado menor en la parte de abajo. Los márgenes laterales y superior han de tener el mismo ancho, pero el margen de abajo tendrá el doble de los otros. Encuentra el ancho de los márgenes si el área por imprimir es de 661.5 in^2.

61. Cercado de una huerta Hay que cercar una huerta cuadrada con un alambrado. Si la cerca cuesta $1 por pie y el costo de preparar el terrero es de $0.50 por pie cuadrado, determina el tamaño de la huerta que pueda cercarse a un costo de $120.

62. Cercado de un terreno Un campesino planea cercar un terreno rectangular, utilizando parte de su granero para un lado y alambrado para los otros tres lados. Si desea que el lado paralelo al granero sea el doble de un lado adyacente y que el área del terreno sea de 128 ft^2, ¿cuántos metros de alambrado debe comprar?

63. Planeación de una autopista Los límites de una ciudad están formados por un círculo de 5 millas de diámetro. Como se muestra en la figura, una carretera recta atraviesa el centro de la ciudad de A a B. El Departamento de Carreteras piensa construir una autopista de 6 millas de largo de A al punto P en las afueras y luego a B. Encuentra la distancia de A a P (*Sugerencia:* APB es un triángulo rectángulo.)



EJERCICIO 63

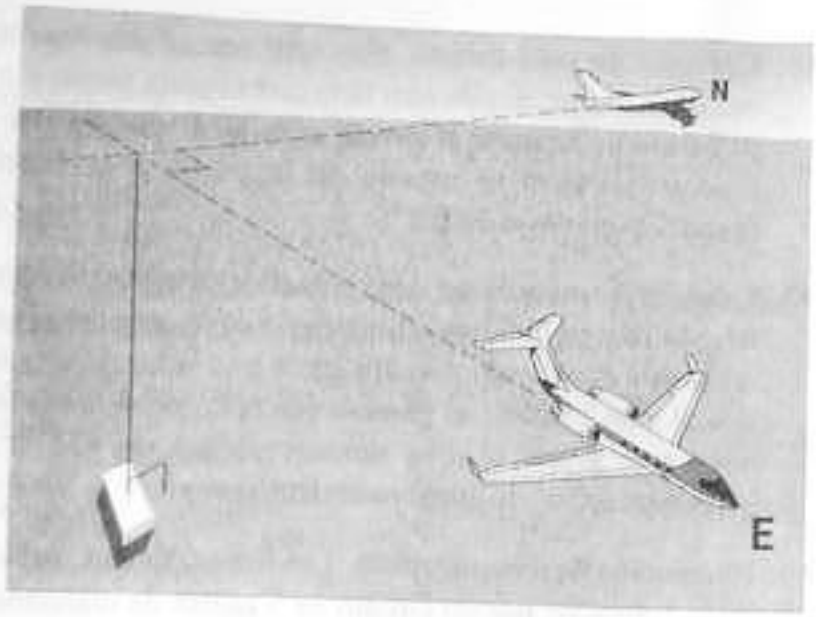
64. Expansión de la ciudad Los límites de una ciudad están formados por un círculo de 10 millas de diámetro. En la última década, la ciudad ha crecido en una superficie de unos 16π mi^2 (alrededor de 50 mi^2). Supón que la ciudad ha tenido siempre forma circular y encuentra el cambio correspondiente en distancia desde el centro a los límites.

65. Distancia entre aviones Un aeroplano vuela al norte a 200 mph y pasa sobre cierto lugar a las 2:00 p.m. Otra aeronave, que vuela hacia el este a la misma altitud y a 400 mph, pasa sobre el mismo lugar a las 2:30 p.m. (ve la figura).

a) Si t denota el tiempo en horas después de las 2:30 p.m., expresa la distancia d entre los aviones, en términos de t.

b) ¿A qué hora, después de las 2:30 p.m., estaban los aviones a 500 millas uno de otro?

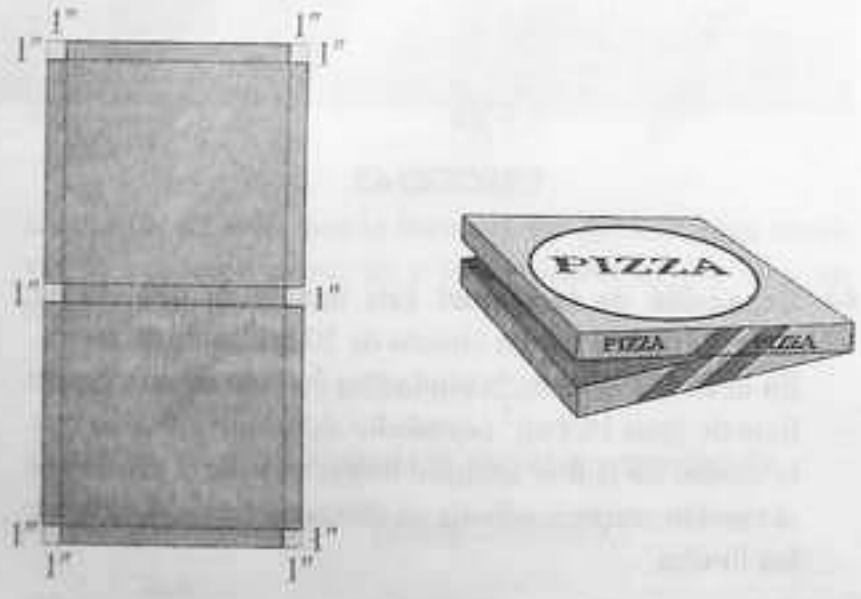
www.elsolucionario.net



EJERCICIO 65

66. Alcance de radiocomunicación Dos topógrafos que llevan aparatos de radiocomunicación salen del mismo punto a las 9:00 p.m. Uno camina hacia el sur a 4 mph y el otro hacia el oeste a 3 mph. ¿Durante cuánto tiempo se pueden comunicar si cada radio tiene un alcance máximo de 2 millas?

67. Construcción de una caja para pizza Debe hacerse una caja de base cuadrada para pizza de una hoja rectangular de cartón. Para esto se cortan cuadros de 1 in de las esquinas a las secciones medias y se doblan los lados (ve la figura). Si el área de la base es de 144 in^2, ¿de qué tamaño tiene que ser la hoja de cartón?



EJERCICIO 67

68. Construcción de marcos de alambre Dos marcos de alambre cuadrados deben construirse con un alambre de 100 in de largo. Si el área encerrada por un marco es la mitad del área encerrada por el otro, encuentra las dimensiones de cada marco (desprecia el grueso del alambre).

69. Velocidad de canotaje La velocidad de la corriente de un arroyo es de 5 mph. Un canoero tarda 30 minutos más en remar 1.2 millas río arriba que remar la misma distancia en favor de la corriente. ¿Cuál es la velocidad del remero en aguas tranquilas?

70. Altura de un risco Si una piedra se deja caer desde un risco hasta el mar, recorre alrededor de $16t^2$ ft en t segundos. Si 4 s después se escucha su impacto en el agua y la velocidad del sonido es de 1100 ft/s, calcula la altura del risco.

71. Descuentos Una compañía vende tenis a $40 el par en pedidos de menos de 50 pares; si se piden más de 50 pares (hasta 600), el precio por par se reduce a razón de $0.04 por el número de pares pedidos. ¿Cuántos pares puede comprar un distribuidor por $8400?

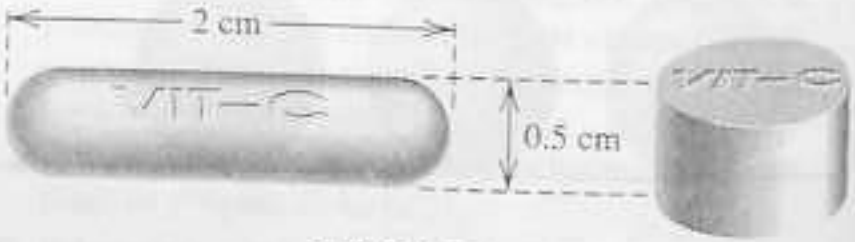
72. Precio de un reproductor de CD Cuando una tienda vende un reproductor de discos compactos de conocida marca en $300 por unidad, desplaza 15 unidades por semana. Sin embargo, cada que reduce el precio $10 hay dos ventas más por semana. ¿Qué precio de venta producirá en ingresos semanales de $7000?

73. Dimensiones de un barril de petróleo Debe construirse un barril cerrado de petróleo, cilíndrico y de 4 ft de altura, de modo que su superficie total sea de 10π ft^2. Encuentra el diámetro del barril.

74. Dimensiones de una pastilla de vitaminas La rapidez con que una pastilla de vitamina C empieza a disolverse depende de su área. Una marca de pastillas mide 2 cm de largo y tiene la forma de un cilindro de 0.5 cm de diámetro con extremos redondeados, como se muestra en la figura. Se piensa fabricar otras tabletas en forma de cilindro circular recto de 0.5 cm de altura.

a) Encuentra el diámetro de la segunda tableta, de modo que su área sea igual a la de la primera tableta.

b) Halla el volumen de cada una de las pastillas.



EJERCICIO 74

Ejercicios 75 y 76: durante una explosión nuclear se produce una bola de fuego cuyo volumen máximo es V_0. Para temperaturas abajo de 2000 K y una fuerza explosiva dada, el volumen V de la bola de fuego, t segundos después de la explosión, se puede calcular con una fórmula dada. (El kelvin se abrevia como K, y no °K.) Calcula t cuando V sea 95% de V_0.

75. $V/V_0 = 0.8197 + 0.007752t + 0.0000281t^2$
(explosión de 20 kilotones)

76. $V/V_0 = 0.831 + 0.00598t + 0.0000919t^2$
(explosión de 10 megatones)

www.elsolucionario.net

Ejercicios 77 y 78: cuando se elaboran cálculos en una calculadora, la fórmula cuadrática no siempre da resultados precisos si b^2 es grande en comparación con ac, debido a que una de las raíces estará cerca de cero y será difícil de calcular.

a) Usa la fórmula cuadrática para calcular las raíces de una ecuación dada.

b) Racionaliza el numerador que debes cambiar a fin de obtener un mejor cálculo de la raíz cercana a cero

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{a} \quad x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

y usa la segunda fórmula.

77. $x^2 + 4\,500\,000x - 0.96 = 0$

78. $x^2 - 73\,000\,000x + 2.01 = 0$

79. Relaciones de temperatura-latitud La tabla que sigue contiene promedios de temperaturas anuales para los hemisferios norte y sur en varias latitudes.

Latitud	Hem. N	Hem. S
85°	–8 °F	–5 °F
75°	13 °F	10 °F
65°	30 °F	27 °F
55°	41 °F	42 °F
45°	57 °F	53 °F
35°	68 °F	65 °F
25°	78 °F	73 °F
15°	80 °F	78 °F
5°	79 °F	79 °F

a) De las siguientes ecuaciones, ¿cuál pronostica con más exactitud el promedio de temperatura anual en el hemisferio sur en latitudes L?

(1) $T_1 = -1.09L + 96.01$

(2) $T_2 = -0.011L^2 - 0.126L + 81.45$

b) Calcula el promedio de temperatura anual en el hemisferio sur a 50° de latitud.

2.4 Números complejos

Los *números complejos* se necesitan para hallar soluciones de ecuaciones que no se pueden resolver usando sólo el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales. La tabla adjunta ilustra varias ecuaciones cuadráticas simples y los tipos de números requeridos para sus soluciones.

Ecuación	Soluciones	Tipo requerido de números
$x^2 = 9$	$3, -3$	Enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$	Números irracionales
$x^2 = -9$	?	Números complejos

Las soluciones de las primeras tres ecuaciones de la tabla están en $\mathbb{R}$, pero como los cuadrados de números reales nunca son negativos, $\mathbb{R}$ no contiene las soluciones de $x^2 = -9$. A fin de resolver esta ecuación se precisa el **sistema de números complejos** $\mathbb{C}$, que contiene tanto a $\mathbb{R}$ como a los números cuyos cuadrados son negativos.

Comencemos por introducir una **unidad imaginaria,** denotada por i, que tiene las siguientes propiedades.

www.elsolucionario.net

Propiedades de i

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

Debido a que su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real. Es una nueva entidad matemática que hace posible obtener $\mathbb{C}$. Puesto que i, junto con $\mathbb{R}$, ha de estar contenida en $\mathbb{C}$, debemos considerar productos de la forma bi para un número real b y también expresiones de la forma $a + bi$ para números reales a y b. La próxima tabla proporciona definiciones que usaremos.

Terminología	Definición	Ejemplo(s)
Números complejos	$a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$	$3, 2 + i, 2i$
Números imaginarios	$a + bi$ con $b \neq 0$	$3 + 2i, -4i$
Número imaginario puro	bi con $b \neq 0$	$-4i, i\sqrt{3}\,i, i$
Igualdad	$a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$	$x + yi = 3 + 4i$ si $x = 3$ y $y = 4$
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	ve ejemplo 1a)
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	ve ejemplo 1b)

Observarás que los números imaginarios puros son un subconjunto de los números imaginarios y éstos, a su vez, un subconjunto de los números complejos. Usamos indistintamente las frases *número complejo no real* y *número imaginario.*

No es necesario aprender de memoria las difiniciones de suma y multiplicación de números complejos dadas en la tabla anterior. En lugar de ello, *podemos tratar todos los símbolos como si tuvieran propiedades de números reales, con una excepción: sustituimos* i^2 con -1; por lo tanto, para el produco $(a + bi)(c + di)$ basta usar las leyes distributivas y

$$(bi)(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd.$$

EJEMPLO 1 *Suma y multiplicación de números complejos*

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ **b)** $(3 + 4i)(2 + 5i)$

Solución

a) $(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$

b) $(3 + 4i)(2 + 5i) = (3 + 4i)2 + (3 + 4i)(5i)$

$$= 6 + 8i + 15i + 20i^2$$

$$= 6 + 23i + 20(-1)$$

$$= -14 + 23i$$

www.elsolucionario.net

El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales se puede identificar con el conjunto de números complejos de la forma $a + 0i$. También es conveniente denotar el número complejo $0 + bi$ con bi. De esta forma,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

En consecuencia, es posible considerar $a + bi$ como la suma de dos números complejos a y bi (esto es, $a + 0i$ y $0 + bi$). En el número complejo $a + bi$, llamamos a a la **parte real** y b a la **parte imaginaria.**

Ahora podemos resolver una ecuación como $x^2 = -9$. En particular, dado que

$$(3i)(3i) = 3^2i^2 = 9(-1) = -9,$$

vemos que una solución es $3i$ y otra es $-3i$.

En la tabla que sigue definimos la diferencia de números complejos y la multiplicación de un número complejo por un número real.

Terminología	Definición
Diferencia	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Multiplicación por un número real k	$k(a + bi) = ka + (kb)i$

Si se nos solicita escribir una expresión de la forma $a + bi$, también aceptaremos la forma $a - di$, ya que $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 2 *Operaciones con números complejos*

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ **b)** $(4 - 3i)(2 + i)$

c) $i(3 - 2i)^2$ **d)** i^{51}

Solución

a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$

b) $(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$

c) $i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

d) Tomamos potencias sucesivas de i, y obtenemos

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

y luego el ciclo comienza de nuevo

$$i^5 = i, \ i^6 = i^2 = -1, \quad \text{etcétera.}$$

En particular,

$$i^{51} = i^{48}i^3 = (i^4)^{12}i^3 = (1)^{12}i^3 = (1)(-i) = -i.$$

www.elsolucionario.net

El siguiente concepto tiene importantes usos al trabajar con números complejos.

Definición del conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **conjugado**, denotado por $\bar{z}$, es $a - bi$.

En virtud de que $a - bi = a + (-bi)$, se deduce que el conjugado de $a - bi$ es

$$a - (-bi) = a + bi.$$

Por lo tanto, $a + bi$ y $a - bi$ *son conjugados entre sí*. En los ejercicios 55 al 60 se dan algunas propiedades de los conjugados.

ILUSTRACIÓN

Conjugados

Número complejo	Conjugado
$5 + 7i$	$5 - 7i$
$5 - 7i$	$5 + 7i$
$4i$	$-4i$
3	3

Las dos propiedades que siguen son consecuencias de las definiciones de la suma y el producto de números complejos.

Propiedades de conjugados	Ejemplo
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$	$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 4 + 4 = 2 \cdot 4$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$	$(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 4^2 - 3^2 i^2 = 4^2 + 3^2$

Observarás que *la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales*. Los conjugados son útiles para hallar el **inverso multiplicativo** de $a + bi$, $1/(a + bi)$, o simplificar el cociente de dos números complejos. Según se expone en el siguiente ejemplo, es posible considerar estos tipos de simplificaciones como simplemente *racionalizar el denominador*, ya que multiplicamos el cociente por el conjugado del denominador dividido entre sí mismo.

EJEMPLO 3 *Cocientes de números complejos*

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $\dfrac{1}{9 + 2i}$ **b)** $\dfrac{7 - i}{3 - 5i}$

www.elsolucionario.net

Solución

a) $$\frac{1}{9+2i} = \frac{1}{9+2i} \cdot \frac{9-2i}{9-2i} = \frac{9-2i}{81+4} = \frac{9}{85} - \frac{2}{85}i$$

b) $$\frac{7-i}{3-5i} = \frac{7-i}{3-5i} \cdot \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{21+35i-3i-5i^2}{9+25}$$

$$= \frac{26+32i}{34} = \frac{13}{17} + \frac{16}{17}i$$

Si p es el número real positivo, entonces la ecuación $x^2 = -p$ tiene soluciones en $\mathbb{C}$. Una solución es $\sqrt{p}\, i$, porque

$$(\sqrt{p}\, i)^2 = (\sqrt{p}\,)^2 i^2 = p(-1) = -p.$$

En forma análoga, $-\sqrt{p}\, i$ también es una solución.

La definición de $\sqrt{-r}$ de la siguiente tabla está motivada por $(\sqrt{r}\, i)^2 = -r$ para $r > 0$. Cuando uses esta definición, ten cuidado de *no* escribir $\sqrt{ri}$, lo que buscas es $\sqrt{r}\, i$.

Terminología	Definición	Ejemplo
Raíz cuadrada principal $\sqrt{-r}$ para $r > 0$	$\sqrt{-r} = \sqrt{r}\, i$	$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\, i = 3i$ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\, i$ $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\, i = i$

El signo de radical debe usarse con precaución cuando el radicando sea negativo; por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que se cumple para números reales positivos, *no es* cierta cuando a y b son ambos negativos, como se muestra enseguida:

$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-3} = (\sqrt{3}\, i)(\sqrt{3}\, i) = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

Pero $$\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3.$$

Por lo tanto, $$\sqrt{-3}\,\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}.$$

Si sólo *uno* de a o b es negativo, entonces $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no aplicaremos leyes de radicales si los radicandos son negativos; en cambio, codificaremos la forma de radicales antes de efectuar cualquier operación, según se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 ***Trabajo con raíces cuadradas de números negativos***

Expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

$$(5 - \sqrt{-9})\,(-1 + \sqrt{-4})$$

Solución Primero usamos la definición $\sqrt{-r} = \sqrt{r}\, i$, y luego simplificamos:

$$(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) = (5 - \sqrt{9}\, i)(-1 + \sqrt{4}\, i)$$

$$= (5 - 3i)(-1 + 2i)$$

$$= -5 + 10i + 3i - 6i^2$$

$$= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i$$

www.elsolucionario.net

En la sección 2.3 establecimos que si el discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo, entonces no hay raíces reales de la ecuación. De hecho, las soluciones de la ecuación son dos números *imaginarios*. Además, las soluciones son conjugadas una de otra, como se presenta en este ejemplo.

EJEMPLO 5 *Una ecuación cuadrática con soluciones complejas*

Resuelve la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$

Solución Al aplicar la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$, tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5} = -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

EJEMPLO 6 *Una ecuación con soluciones complejas*

Resuelve la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

Solución Usamos la fórmula de factorización de la diferencia de dos cubos de la sección 1.3 y escribimos $x^3 - 1 = 0$ como

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Igualamos a cero cada factor, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos las soluciones

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

o, lo que es equivalente,

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

ya que el número 1 se llama **número real unitario** y la ecuación dada se puede escribir como $x^3 = 1$, llamaremos **raíces cúbicas de la unidad** a estas tres soluciones.

En la sección 1.3 mencionamos que $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números *reales*. Sin embargo, si factorizamos sobre los números *complejos*, entonces $x^2 + 1$ se puede factorizar como sigue:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

2.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 34: escribe la expresión en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1. $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$

2. $(-5 + 7i) + (4 + 9i)$

3. $(7 - 6i) - (-11 - 3i)$

4. $(-3 + 8i) - (2 + 3i)$

5. $(3 + 5i)(2 - 7i)$

6. $(-2 + 6i)(8 - i)$

7. $(1 - 3i)(2 + 5i)$

8. $(8 + 2i)(7 - 3i)$

www.elsolucionario.net

9. $(5-2i)^2$ **10.** $(6+7i)^2$

11. $i(3+4i)$ **12.** $i(2-7i)^2$

13. $(3+4i)(3-4i)$ **14.** $(4+9i)(4-9i)$

15. i^{43} **16.** i^{92}

17. i^{73} **18.** i^{66}

19. $\dfrac{3}{2+4i}$ **20.** $\dfrac{5}{2-7i}$

21. $\dfrac{1-7i}{6-2i}$ **22.** $\dfrac{2+9i}{-3-i}$

23. $\dfrac{-4+6i}{2+7i}$ **24.** $\dfrac{-3-2i}{5+2i}$

25. $\dfrac{4-2i}{-5i}$ **26.** $\dfrac{-2+6i}{3i}$

27. $(2+5i)^3$ **28.** $(3-2i)^3$

29. $(2-\sqrt{-4})(3-\sqrt{16})$

30. $(-3+\sqrt{-25})(8-\sqrt{-36})$

31. $\dfrac{4+\sqrt{-81}}{7-\sqrt{-64}}$ **32.** $\dfrac{5-\sqrt{-121}}{1+\sqrt{-25}}$

33. $\dfrac{\sqrt{-36}\,\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}\,\sqrt{-81}}$

Ejercicios 35 al 38: encuentra los valores de x y y, donde x y y son números reales.

35. $8+(3x+y)i=2x-4i$ **36.** $(x-y)+3i=7+yi$

37. $(3x+2y)-y^3i=9-27i$

38. $x^3+(2x-y)i=-8-3i$

Ejercicios 39 al 54: halla las soluciones de la ecuación.

39. $x^2-6x+13=0$ **40.** $x^2-2x+26=0$

41. $x^2+4x+13=0$ **42.** $x^2+8x+17=0$

43. $x^2-5x+20=0$ **44.** $x^2+3x+6=0$

45. $4x^2+x+3=0$ **46.** $-3x^2+x-5=0$

47. $x^3+125=0$ **48.** $x^3-27=0$

49. $x^4=256$ **50.** $x^4=81$

51. $4x^4+25x^2+36=0$ **52.** $27x^4+21x^2+4=0$

53. $x^3+3x^2+4x=0$

54. $8x^3-12x^2+2x-3=0$

Ejercicios 55 al 60: verifica la propiedad.

55. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ **56.** $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

57. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ **58.** $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$

59. $\overline{z}=z$ si y sólo si z es real.

60. $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$

2.5 Otros tipos de ecuaciones

Las ecuaciones consideradas en las secciones anteriores son inadecuadas para muchos problemas; por ejemplo, en la práctica con frecuencia es necesario considerar potencias x^k con $k>2$. En algunas ecuaciones aparecen valores absolutos o radicales. En esta sección damos ejemplos de ecuaciones de estos tipos, que se pueden resolver usando métodos elementales.

EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación con un valor absoluto*

Resuelve la ecuación $|x-5|=3$.

Solución Si a y b son números reales con $b>0$, entonces $|a|=b$ si y sólo si $a=b$ o bien $a=-b$, por lo tanto, si $|x-5|=3$,

$$x-5=3 \quad \text{o} \quad x-5=-3.$$

Se resuelve para x

$$x=5+3=8 \quad \text{o} \quad x=5-3=2.$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene dos soluciones, 8 y 2.

www.elsolucionario.net

Para una ecuación como

$$2|x-5|+3=11,$$

primero aislamos la expresión del valor absoluto al restar 3 y dividir entre 2 para obtener

$$|x-5|=\frac{11-3}{2}=4,$$

y luego procedemos como en el ejemplo 1.

Si una ecuación está en forma factorizada *con cero en un lado*, se pueden obtener soluciones igualando cada factor a cero. Por ejemplo, si p, q y r son expresiones en x y si $pqr = 0$, entonces $p = 0$, $q = 0$ o $r = 0$. En el próximo ejemplo factorizamos por agrupación de términos.

EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación por agrupación*

Resuelve la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Solución

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$	dado
$x^2(x+2) - 1(x+2) = 0$	agrupar términos
$(x^2 - 1)(x+2) = 0$	factorizar $x+2$
$(x+1)(x-1)(x+2) = 0$	factorizar x^2-1
$x+1=0, \quad x-1=0, \quad x+2=0$	teorema del factor cero
$x=-1, \quad x=1, \quad x=-2$	despejar x

EJEMPLO 3 *Solución de una ecuación con exponentes racionales*

Resuelve la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$.

Solución

$x^{3/2} = x^{1/2}$	dado
$x^{3/2} - x^{1/2} = 0$	restar $x^{1/2}$
$x^{1/2}(x-1) = 0$	factorizar $x^{1/2}$
$x^{1/2}=0, \quad x-1=0$	teorema del factor cero
$x=0, \quad x=1$	despejar x

En el ejemplo 3 habría sido incorrecto dividir ambos lados de la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$ entre $x^{1/2}$ y obtener $x = 1$ porque se perdería la solución $x = 0$. En general, *evitemos dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión que contenga variables*; en lugar de esto, siempre *factoricemos*.

www.elsolucionario.net

Si en una ecuación hay radicales o exponentes fraccionarios, a menudo elevamos ambos lados a una potencia positiva. Las soluciones de la nueva ecuación siempre contienen las soluciones de la ecuación dada; por ejemplo, las soluciones de

$$2x - 3 = \sqrt{x+6}$$

también son soluciones de

$$(2x-3)^2 = (\sqrt{x+6})^2.$$

En algunos casos la nueva ecuación tiene *más* soluciones que la ecuación dada. Para ilustrar lo anterior, si nos dan la ecuación $x = 3$ y elevamos al cuadrado ambos lados obtendremos $x^2 = 9$. Observa que la ecuación dada $x = 3$ tiene sólo una solución, 3, y la nueva ($x^2 = 9$) tiene dos soluciones, 3 y –3. Cualquier solución de la nueva ecuación, que no sea una solución de la ecuación dada, es una solución extraña. Puesto que pueden presentarse soluciones extrañas, *es indispensable comprobar todas las soluciones obtenidas después de elevar ambos lados de una ecuación a una potencia par.* Tales comprobaciones no son necesarias si ambos lados se elevan a una potencia *non*, pues en este caso las soluciones extrañas (números reales) no se introducen.

EJEMPLO 4 *Solución de una ecuación con un radical*

Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{x^2-1} = 2$.

Solución

$\sqrt[3]{x^2-1} = 2$	dado
$(\sqrt[3]{x^2-1})^3 = 2^3$	elevar al cubo ambos lados
$x^2 - 1 = 8$	propiedad de $\sqrt[n]{}$
$x^2 = 9$	sumar 1
$x = \pm 3$	tomar raíz cuadrada

Así pues, la ecuación dada tiene dos soluciones, 3 y –3. Excepto para detectar errores algebraicos, la comprobación es innecesaria porque elevamos ambos lados a una potencia non.

En la última solución usamos la frase *elevar al cubo ambos lados* de $\sqrt[3]{x^2-1} = 2$. En general, para la ecuación $x^{m/n} = a$, elevamos ambos lados a la potencia n/m (recíproca de m/n) para despejar x. Si m es non resulta $x = a^{n/m}$, pero si m es par tendremos $x = \pm a^{n/m}$. Si n es par se pueden presentar soluciones extrañas.

En los siguientes dos ejemplos, antes de elevar ambos lados de la ecuación a una potencia *aislaremos un radical*; es decir, consideraremos una ecuación equivalente en que sólo aparezca el radical en un lado.

EJEMPLO 5 *Solución de una ecuación con un radical*

Resuelve la ecuación $3 + \sqrt{3x+1} = x$.

www.elsolucionario.net

Solución

$$3 + \sqrt{3x+1} = x \qquad \text{dado}$$

$$\sqrt{3x+1} = x - 3 \qquad \text{aislar el radical}$$

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-3)^2 \qquad \text{elevar al cuadrado ambos lados}$$

$$3x + 1 = x^2 - 6x + 9 \qquad \text{simplificar}$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0 \qquad \text{restar } 3x + 1$$

$$(x-1)(x-8) = 0 \qquad \text{factorizar}$$

$$x - 1 = 0, \quad x - 8 = 0 \qquad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = 1, \quad x = 8 \qquad \text{despejar } x$$

Elevamos ambos lados a una potencia par, de modo que se requieren comprobaciones.

PRUEBA $x = 1$ LI: $3 + \sqrt{3(1)+1} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$
LD: 1

Como $5 \neq 1$, $x = 1$ no es una solución.

PRUEBA $x = 8$ LI: $3 + \sqrt{(8)+1} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$
LD: 8

Dado que $8 = 8$ es una expresión cierta, $x = 8$ es una solución.

Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución: $x = 8$.

Para resolver una ecuación con varios radicales, puede ser preciso elevar ambos lados a potencias dos o más veces, como en este ejemplo.

EJEMPLO 6 *Solución de una ecuación con radicales*

Resuelve la ecuación $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$

Solución

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0 \qquad \text{dado}$$

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+7} - 2 \qquad \text{aislar } \sqrt{2x-3}$$

$$2x - 3 = (x+7) - 4\sqrt{x+7} + 4 \qquad \text{elevar al cuadrado ambos lados}$$

$$x - 14 = -4\sqrt{x+7} \qquad \text{aislar el término radical}$$

www.elsolucionario.net

$$x^2 - 28x + 196 = 16(x + 7)$$ elevar al cuadrado ambos lados

$$x^2 - 28x + 196 = 16x + 112$$ multiplicar factores

$$x^2 - 44x + 84 = 0$$ restar $16x + 112$

$$(x - 42)(x - 2) = 0$$ factorizar

$$x - 42 = 0, \quad x - 2 = 0$$ teorema del factor cero

$$x = 42, \quad x = 2$$ despejar x

Se requiere prueba, ya que ambos lados se elevaron a una potencia par.

PRUEBA $x = 42$ LI: $\sqrt{84 - 3} - \sqrt{42 + 7} + 2 = 9 - 7 + 2 = 4$
LD: 0

Como $4 \neq 0$, $x = 42$ no es solución.

PRUEBA $x = 2$ LI: $\sqrt{4 - 3} - \sqrt{2 + 7} + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
LD: 0

Puesto que $0 = 0$ es una expresión cierta, $x = 2$ es solución.

Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución: $x = 2$.

Una ecuación es de **tipo cuadrático** si puede escribirse de la forma

$$au^2 + bu + c = 0,$$

donde $a \neq 0$ y u es una expresión en alguna variable. Si encontramos las soluciones en términos de u, entonces las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener al consultar la forma específica de u.

EJEMPLO 7 *Solución de una ecuación de tipo cuadrático*

Resuelve la ecuación $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$.

Solución Como $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^{1/3}$, como en el segundo renglón siguiente:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$$ dado

$$u^2 + u - 6 = 0$$ sea $u = x^{1/3}$

$$(u + 3)(u - 2) = 0$$ factorizar

$$u + 3 = 0, \quad u - 2 = 0$$ teorema del factor cero

$$u = -3, \quad u = 2$$ despejar u *(continúa)*

www.elsolucionario.net

$$x^{1/3} = -3, \quad x^{1/3} = 2 \qquad u = x^{1/3}$$

$$x = -27, \quad x = 8 \qquad \text{elevar al cubo ambos lados}$$

No es necesaria una prueba, puesto que no elevamos ambos lados a una potencia par; así pues, la ecuación dada tiene dos soluciones: -27 y 8.

Un método alterno es factorizar el lado izquierdo de la ecuación dada como sigue:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = (x^{1/3} + 3)(x^{1/3} - 2)$$

Al igualar cada factor a cero, obtenemos las soluciones.

EJEMPLO 8 *Solución de una ecuación de tipo cuadrático*

Resuelve la ecuación $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Solución Como $x^4 = (x^2)^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^2$ como en el renglón 2 de abajo:

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \qquad \text{dado}$$

$$u^2 - 3u + 1 = 0 \qquad \text{sea } u = x^2$$

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad u = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \qquad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Con calculadora obtenemos las aproximaciones ± 1.62 y ± 0.62. No requerimos una prueba porque no elevamos ambos lados de una ecuación a una potencia par.

EJEMPLO 9 *Determinación de la ruta de un transbordador*

Un transbordador para pasajeros viaja desde una población hasta una isla a 7 millas de la población y a 3 millas en línea recta de la playa. Según se muestra en la figura 9, el transbordador navega a lo largo de la playa hasta algún punto y luego avanza directamente hacia la isla. Si el transbordador navega a 12 mph a lo largo de la playa y a 10 mph cuando avanza hacia el mar, determina las rutas que tengan un tiempo de recorrido de 45 minutos.

www.elsolucionario.net

FIGURA 9

Solución Denotemos con x la distancia recorrida a lo largo de la playa. Esto lleva al dibujo de la figura 10, donde d es la distancia de un punto en la playa hasta la isla. Consultemos el triángulo recto indicado:

$$d^2 = (7 - x)^2 + 3^2 \qquad \text{teorema de Pitágoras}$$

$$= 49 - 14x + x^2 + 9 \qquad \text{elevar al cuadrado los términos}$$

$$= x^2 - 14x + 58 \qquad \text{simplificar}$$

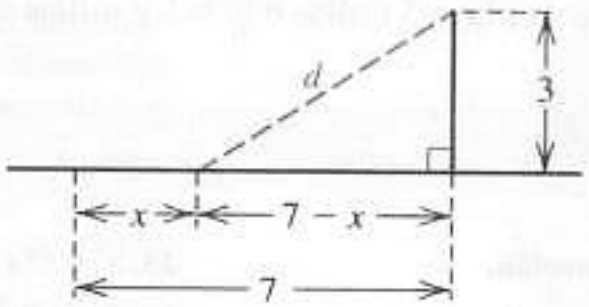


FIGURA 10

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados, observamos que $d > 0$ y obtenemos

$$d = \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

Con distancia = (velocidad)(tiempo) o, lo que es lo mismo, tiempo = (distancia)/(velocidad) obtenemos esta tabla.

	A lo largo de la playa	**Mar adentro**
Distancia (mi)	x	$\sqrt{x^2 - 14x + 58}$
Velocidad (mph)	12	10
Tiempo (h)	$\frac{x}{12}$	$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10}$

El tiempo para el viaje completo es la suma de las dos expresiones del último renglón de la tabla. Como la velocidad está en millas por hora, por consistencia debemos expresar este tiempo (45 min) como $\frac{3}{4}$ de hora. Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{x}{12} + \frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} = \frac{3}{4} \qquad \text{tiempo total de viaje}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} = \frac{3}{4} - \frac{x}{12} \qquad \text{restar } \frac{x}{12}$$

(continúa)

www.elsolucionario.net

$$6\sqrt{x^2-14x+58} = 45-5x \qquad \text{multiplicar 60 por el MCDn}$$

$$6\sqrt{x^2-14x+58} = 5(9-x) \qquad \text{factorizar}$$

$$36(x^2-14x+58) = 25(9-x)^2 \qquad \text{elevar al cuadrado ambos lados}$$

$$36x^2-504x+2088 = 2025-450x+25x^2 \qquad \text{multiplicar términos}$$

$$11x^2-54x+63 = 0 \qquad \text{simplificar}$$

$$(x-3)(11x-21) = 0 \qquad \text{factorizar}$$

$$x-3=0, \qquad 11x-21=0 \qquad \text{teorema del factor cero}$$

$$x=3, \qquad x=\frac{21}{11} \qquad \text{despejar } x$$

Una prueba verifica que estos números también son soluciones de la ecuación original; por lo tanto, hay dos posibles rutas con un tiempo de recorrido de 45 minutos: el transbordador puede viajar a lo largo de la playa 3 millas o $\frac{21}{11} \approx 1.9$ millas antes de avanzar a la isla.

2.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 50: resuelve la ecuación.

1. $|x+4| = 11$

2. $|x-5| = 2$

3. $|3x-2|+3 = 7$

4. $2|5x+2|-1 = 5$

5. $3|x+1|-2 = -11$

6. $|x-2|+5 = 5$

7. $9x^3-18x^2-4x+8 = 0$

8. $3x^3-4x^2-27x+36 = 0$

9. $4x^4+10x^3 = 6x^2+15x$

10. $15x^5-20x^4 = 6x^3-8x^2$

11. $y^{3/2} = 5y$

12. $y^{4/3} = -3y$

13. $\sqrt{7-5x} = 8$

14. $\sqrt{2x-9} = \frac{1}{x}$

15. $2+\sqrt[3]{1-5t} = 0$

16. $\sqrt[3]{6-s^2}+5 = 0$

17. $\sqrt[5]{2x^2+1}-2 = 0$

18. $\sqrt[4]{2x^2-1} = x$

19. $\sqrt{7-x} = x-5$

20. $\sqrt{3-x}-x = 3$

21. $3\sqrt{2x-3}+2\sqrt{7-x} = 11$

22. $\sqrt{2x+15}-2 = \sqrt{6x+1}$

23. $x = 4+\sqrt{4x-19}$

24. $x = 3+\sqrt{5x-9}$

25. $x+\sqrt{5x+19} = -1$

26. $x-\sqrt{-7x-24} = -2$

27. $\sqrt{7-2x}-\sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

28. $4\sqrt{1+3x}+\sqrt{6x+3} = \sqrt{-6x-1}$

29. $\sqrt{11+8x}+1 = \sqrt{9+4x}$

30. $2\sqrt{x}-\sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

31. $\sqrt{2\sqrt{x}+1} = \sqrt{3x-5}$

32. $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$

33. $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x}+1$

34. $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$

35. $x^4-25x^2+144 = 0$

36. $2x^4-10x^2+8 = 0$

37. $5y^4-7y^2+1 = 0$

38. $3y^4-5y^2+1 = 0$

39. $36x^{-4}-13x^{-2}+1 = 0$

40. $x^{-2}-2x^{-1}-35 = 0$

41. $3x^{2/3}+4x^{1/3}-4 = 0$

42. $2y^{1/3}-3y^{1/6}+1 = 0$

43. $6w-23w^{1/2}+20 = 0$

44. $2x^{-2/3}-7x^{-1/3}-15 = 0$

45. $\left(\frac{t}{t+1}\right)^2-\frac{2t}{t+1}-8 = 0$

46. $6u^{-1/2}-13u^{-1/4}+6 = 0$

47. $27x^3 = (x+5)^3$

48. $16x^4 = (x-4)^4$

49. $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[4]{x}$ (*Sugerencia:* eleva ambos lados al mínimo común múltiplo de 3 y 4.)

50. $\sqrt{x+3} = \sqrt[4]{2x+6}$

Ejercicios 51 y 52: encuentra las soluciones reales de la ecuación.

51. a) $x^{5/3} = 32$

b) $x^{4/3} = 16$

c) $x^{2/3} = -36$

d) $x^{3/4} = 125$

e) $x^{3/2} = -27$

52. a) $x^{3/5} = -27$

b) $x^{2/3} = 25$

c) $x^{4/3} = -49$

d) $x^{3/2} = 27$

e) $x^{3/4} = -8$

www.elsolucionario.net

Ejercicios 53 al 55: despeja la variable especificada.

53. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para l (periodo de un péndulo)

54. $d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$ para C (segmentos de círculos)

55. $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ para h (área de un cono)

56. Experimentos nucleares Los experimentos nucleares efectuados en los océanos vaporizan grandes cantidades de agua salada. La sal hierve y se convierte en vapor a los 1738 K. Después de ser vaporizada por una fuerza de 10 megatones, la sal tarda al menos de 8 a 10 s en enfriarse lo suficiente para cristalizarse. La cantidad de sal A, que se ha cristalizado en t segundos después de un experimento, se calcula a veces con $A = k\sqrt{t/T}$, donde k y T son constantes. Despeja t de esta ecuación.

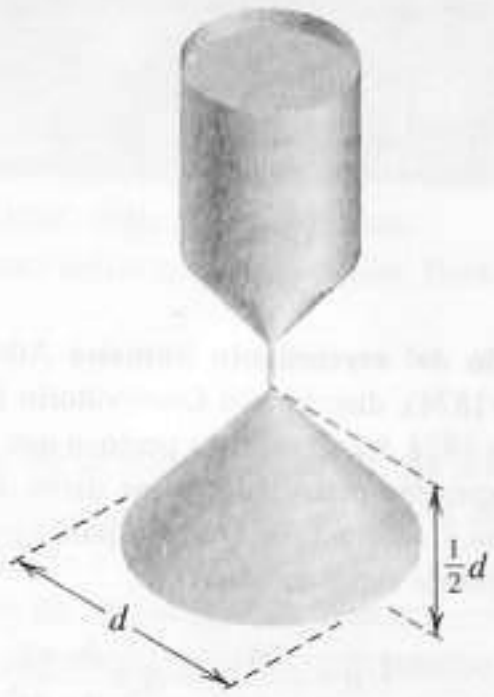
57. Potencia eléctrica de los molinos de viento La potencia P (en watts) generada por un molino de viento que tiene una eficiencia E está dada por la fórmula $P = 0.31ED^2V^3$, donde D es el diámetro (en ft) de las aspas y V es la velocidad del viento (en pies por segundo: ft/s). Calcula la velocidad del viento necesaria para generar 10 000 watts (W) si $E = 42\%$ y $D = 10$.

58. Resistencia de extracción de clavos La *resistencia de extracción* de un clavo indica su fuerza de sostén en madera. Una fórmula que se usa para clavos comunes es $P = 15\,700S^{5/2}RD$, donde P es la resistencia máxima de extracción (en lb), S es la gravedad específica de la madera al 12% de contenido de humedad, R es el radio del clavo (en in) y D es la profundidad (en in) que el clavo ha penetrado en la madera. Un clavo común de ¢6, de 2 in de longitud y 0.113 de diámetro es clavado por completo en una pieza de abeto Douglas. Si se requiere una fuerza máxima de 380 lb para sacarlo, calcula la gravedad específica del abeto Douglas.

59. Efecto del precio sobre la demanda Por lo general, la demanda de un artículo depende de su precio. Si otros factores no afectan la demanda, la cantidad Q comprada a un precio P (en centavos) está dada por $Q = kP^{-c}$, donde k y c son constantes positivas. Si $k = 10^5$ y $c = 1/2$, encuentra el precio que generará en la compra de 5000 piezas.

60. Isla de calor urbano Las zonas urbanas tienen promedios más altos de temperaturas del aire que las rurales, por la presencia de edificios, asfalto y concreto. Este fenómeno se conoce como *isla de calor urbano*. La diferencia de temperatura T (en °C) entre zonas urbanas y rurales cerca de Montreal, con una población P entre 1000 y 1 000 000, se puede describir mediante la fórmula $T = 0.25P^{1/4}/\sqrt{v}$, donde v es el promedio de velocidad del viento (mph) y $v \geq 1$. Si $T = 3$ y $v = 5$, encuentra P.

61. Dimensiones de un cúmulo de arena Cuando se fuga arena de un recipiente, forma un cúmulo con forma de cono circular recto; cuya altitud es siempre la mitad del diámetro d de la base. ¿Cuál será d en el momento en que se han fugado 144 cm^3 de arena?



EJERCICIO 61

62. Inflado de un globo meteorológico El volumen de un globo esférico es de $10\frac{2}{3}$ ft^3. Para levantar un equipo trasmisor y meteorológico, el globo es inflado con $25\frac{1}{3}$ ft^3 de helio adicionales. ¿Cuánto aumenta su diámetro?

63. Regla del cubo en ciencias políticas La regla del cubo en ciencias políticas es una fórmula empírica, para pronosticar (en teoria) el porcentaje y de escaños en la Cámara Estadounidense del Senado que un partido político obtendrá como consecuencia del voto popular para su candidato presidencial. Si x denota el porcentaje de dicho voto popular, la regla del cubo expresa que

$$y = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3}.$$

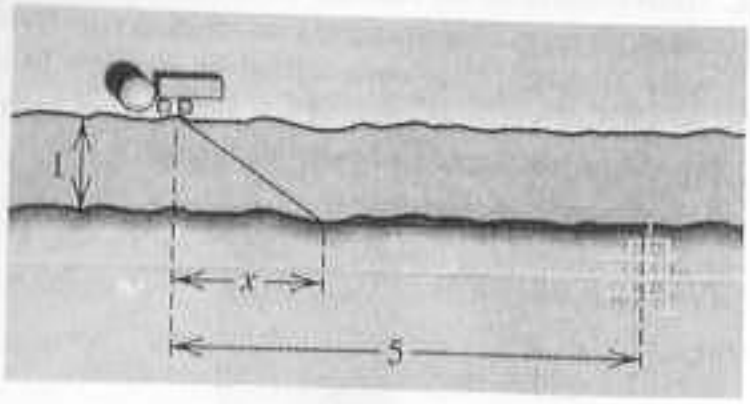
¿Qué porcentaje del voto popular necesitará el candidato para que su partido gane el 60% de los escaños?

64. Dimensiones de un vaso cónico Un vaso cónico de papel debe tener una altura de 3 in. Encuentra el radio del cono que resultará en una superfice de 6π in^2.

65. Instalación de una línea eléctrica Se piensa instalar una línea eléctrica a través de un río de una milla de ancho, hasta una población que está a cinco millas corriente abajo (ve la figura). El tendido de un cable bajo el agua cuesta $7500 por milla y en tierra, $6000 por

www.elsolucionario.net

milla. Determina cómo debe instalarse el cable si se dispone de $35 000 para este proyecto.



EJERCICIO 65

66. **Cálculo del crecimiento humano** Adolphe Quetelet (1796-1874), director del Observatorio de Bruselas de 1832 a 1874, fue la primera persona que intentó ajustar una expresión matemática a los datos del crecimiento humano. La fórmula de Quetelet para varones en Bruselas se puede expresar como

$$h + \frac{h}{h_M - h} = at + \frac{h_0 + t}{1 + \frac{5}{3}t},$$

donde $h_0 = 0.5$ es la estatura al nacimiento, $h_M = 1.684$ es la estatura final de un adulto y $a = 0.545$.

a) Indica la estatura esperada de un niño de 12 años de edad.

b) ¿A qué edad se alcanza el 50% de la estatura de la edad adulta?

C 67. **Relaciones luz solar-latitud** La próxima tabla proporciona el número de minutos de luz solar que hay en varias latitudes del hemisferio norte en los solsticios de verano e invierno.

Latitud	Verano	Invierno
0°	720	720
10°	755	685
20°	792	648
30°	836	604
40°	892	548
50°	978	462
60°	1107	333

a) De las siguientes ecuaciones, ¿cuál predice con más precisión la duración del día en el solsticio de verano en la latitud L?

1) $D_1 = 6.096L + 685.7$

2) $D_2 = 0.00178L^3 - 0.072L^2 + 4.37L + 719$

b) Calcula la duración de la luz solar a una latitud de 35° durante el solsticio de verano.

C 68. **Volumen de una caja** Hay que elaborar una caja abierta a partir de una pieza metálica rectangular de 24 × 36 in, cortando de cada esquina un cuadrado idéntico de área x^2 y volteando los lados hacia arriba.

a) Halla una ecuación para establecer el volumen V de la caja en términos de x.

b) Usa una tabla práctica a fin de calcular el valor de x dentro de ±0.1 in para obtener el volumen máximo.

C 69. **Construcción de una caja** Una caja de cartón con tapa abierta y fondo cuadrado debe tener un volumen de 25 ft^3. Usa una tabla práctica para definir las dimensiones de la caja al 0.1 de pie más cercano que reduzca al mínimo la cantidad de cartón empleado en la elaboración de la caja.

2.6 Desigualdades

Una **desigualdad** es el enunciado de que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser el caso que una cantidad sea menor que (<), menor o igual a (≤), mayor que (>) o mayor o igual que (≥) otra cantidad. Consideremos la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

en donde x es una variable. Según se expone en la tabla adjunta, ciertos números llevan a expresiones verdaderas cuando se sustituyen con x, pero otros llevan a expresiones falsas.

www.elsolucionario.net

x	$2x + 3 > 11$	Conclusión
3	$9 > 11$	Expresión falsa
4	$11 > 11$	Expresión falsa
5	$13 > 11$	Expresión verdadera
6	$15 > 11$	Expresión verdadera

Si se obtiene una expresión verdadera cuando se sustituye un número b con x, entonces b es la **solución** de la desigualdad; por lo tanto, $x = 5$ es una solución de $2x + 3 > 11$ porque $13 > 11$, pero $x = 3$ no es una solución pues $9 > 11$ es falso. **Resolver** una desigualdad quiere decir encontrar *todas* sus soluciones. Dos desigualdades **equivalen** si tienen soluciones idénticas.

La mayor parte de las desigualdades posee un número infinito de soluciones. Para ilustrar lo anterior, las soluciones de la desigualdad

$$2 < x < 5$$

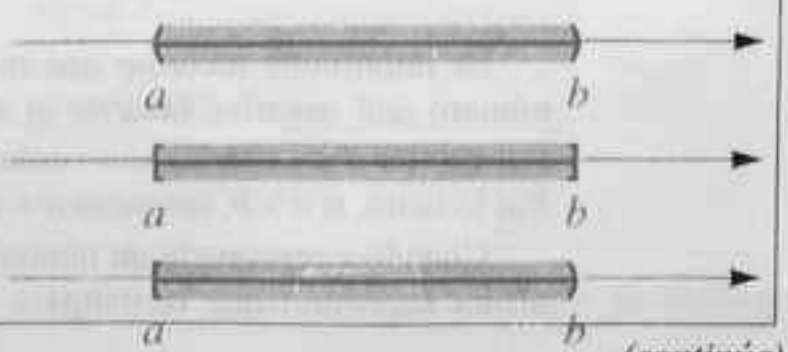
abarcan *todo* número real x entre 2 y 5. Este conjunto recibe el nombre de **intervalo abierto** y se denota con $(2, 5)$. La **gráfica** del intervalo abierto $(2, 5)$ es el conjunto de todos los puntos de una recta coordenada que se encuentra entre los puntos correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$ (pero sin incluirlos). La gráfica se representa sombreando la parte apropiada del eje (Fig. 11). Nos referimos a este proceso como el **trazado de la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se llaman **puntos extremos** del intervalo $(2, 5)$. Los paréntesis de la notación $(2, 5)$ y la figura 11 indican que los puntos extremos del intervalo no están incluidos.

FIGURA 11

Si deseamos abarcar un punto extremo, usamos corchetes en lugar de paréntesis; por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \le x \le 5$ se denotan con $[2, 5]$ y se conocen como **intervalo cerrado.** La gráfica de $[2, 5]$ aparece en la figura 12, donde los corchetes indican que se incluyen los puntos extremos. También consideraremos **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$ e **intervalos infinitos,** como se describe en la siguiente tabla. El símbolo ∞ (se lee "infinito") que se usa para intervalos infinitos sólo es un medio de notación y *no* representa un número real.

FIGURA 12

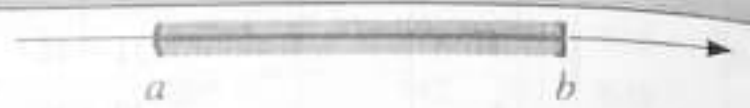
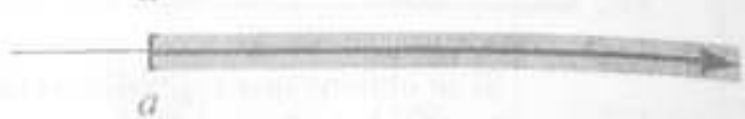
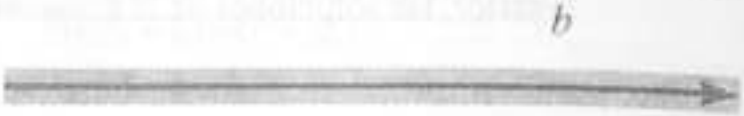
Intervalos

Notación	Desigualdad	Gráfica
(1) (a, b)	$a < x < b$	
(2) $[a, b]$	$a \le x \le b$	
(3) $[a, b)$	$a \le x < b$	

(continúa)

www.elsolucionario.net

Intervalos *(cont.)*

Notación	Desigualdad	Gráfica
(4) $(a, b]$	$a < x \leq b$	
(5) (a, ∞)	$x > a$	
(6) $[a, \infty)$	$x \geq a$	
(7) $(-\infty, b)$	$x < b$	
(8) $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
(9) $(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a los que se utilizan en la solución de ecuaciones. A menudo usamos las propiedades de desigualdades a fin de sustituir una desigualdad con una lista de desigualdades equivalentes, hasta terminar con una desigualdad que permita obtener soluciones con facilidad. Las propiedades de la tabla adjunta se pueden demostrar para los números reales a, b, c y d.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad	Ejemplos
(1) Si $a < b$ y $b < c$, luego $a < c$.	$2 < 5$ y $5 < 9$, así que $2 < 9$.
(2) Si $a < b$, luego	$2 < 7$, así que
$a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	$2 + 3 < 7 + 3$ y $2 - 3 < 7 - 3$.
(3) Si $a < b$ y $c > 0$, luego	$2 < 5$ y $3 > 0$, así que
$ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.
(4) Si $a < b$ y $c < 0$, luego	$2 < 5$ y $-3 < 0$, así que
$ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$2(-3) > 5(-3)$ y $\frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$.

Es importante recordar que multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número real negativo *invierte* el signo de desigualdad [ve la propiedad (4)]. Las propiedades semejantes a las citadas son verdaderas para otras desigualdades, ya sea para $\leq$ como para $\geq$. Por lo tanto, si $a > b$, entonces $a + c > b$; si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $ac \leq bc$; y así sucesivamente.

Cuando x representa un número real —de acuerdo con la propiedad (2)— sumar o restar la misma expresión que contenga x en ambos lados de una desigualdad dará una desigualdad

www.elsolucionario.net

equivalente. Según la propiedad (3), es posible multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por una expresión que contenga x si estamos seguros de que la expresión es positiva para todos los valores de x considerados. A fin de ilustrar lo anterior, la multiplicación o la división entre $x^4 + 3x^2 + 5$ sería permisible porque esta expresión es siempre positiva. Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad entre una expresión que siempre es negativa, como $-7 - x^2$, entonces, por la propiedad (4), la desigualdad se invierte.

En los próximos ejemplos describiremos soluciones de desigualdades por medio de intervalos y también los representaremos en forma gráfica.

EJEMPLO 1 *Solución de una desigualdad*

Resuelve la desigualdad $-3x + 4 < 11$.

Solución

$-3x + 4 < 11$	dado
$(-3x + 4) - 4 < 11 - 4$	restar 4
$-3x < 7$	simplificar
$\frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3}$	dividir entre -3; invertir signo de desigualdad
$x > -\frac{7}{3}$	simplificar

FIGURA 13

Por lo tanto, las soluciones de $-3x + 4 < 11$ están formadas en todos los números reales x tales que $x > -\frac{7}{3}$. Éste es el intervalo $\left(-\frac{7}{3}, \infty\right)$ trazado en la figura 13.

EJEMPLO 2 *Solución de una desigualdad*

Resuelve la desigualdad $4x - 3 < 2x + 5$.

Solución

$4x - 3 < 2x + 5$	dado
$(4x - 3) + 3 < (2x + 5) + 3$	sumar 3
$4x < 2x + 8$	simplificar
$4x - 2x < (2x - 8) - 2x$	restar $2x$
$2x < 8$	simplificar

(continúa)

www.elsolucionario.net

$$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \qquad \text{divide entre 2}$$

$$x < 4 \qquad \text{simplificar}$$

FIGURA 14

Por lo consiguiente, las soluciones de la desigualdad dada están formadas de todos los números reales x tales que $x < 4$. Éste es el intervalo $(-\infty, 4)$ de la figura 14.

EJEMPLO 3 *Solución de una desigualdad*

Resuelve la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$.

Solución Un número real x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si es una solución de ambas desigualdades

$$-6 < 2x - 4 \quad \text{y} \quad 2x - 4 < 2.$$

La primera desigualdad se resuelve como sigue:

$$-6 < 2x - 4 \qquad \text{dado}$$

$$-6 + 4 < (2x - 4) + 4 \qquad \text{sumar 4}$$

$$-2 < 2x \qquad \text{simplificar}$$

$$\frac{-2}{2} < \frac{2x}{2} \qquad \text{dividir entre 2}$$

$$-1 < x \qquad \text{simplificar}$$

$$x > -1 \qquad \text{desigualdad equivalente}$$

La segunda desigualdad se resuelve entonces:

$$2x - 4 < 2 \qquad \text{dado}$$

$$2x < 6 \qquad \text{sumar 4}$$

$$x < 3 \qquad \text{dividir entre 2}$$

Por lo tanto, x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si ambos

$$x > -1 \quad \text{y} \quad x < 3;$$

esto es,

$$-1 < x < 3.$$

Así pues, las soluciones son todos los números del intervalo abierto $(-1, 3)$, trazado en la figura 15.

FIGURA 15

www.elsolucionario.net

Un método alterno (y más corto) consiste en resolver ambas desigualdades simultáneamente; es decir, resolver la desigualdad continua:

$$-6 < 2x - 4 < 2 \qquad \text{dado}$$

$$-6 + 4 < 2x < 2 + 4 \qquad \text{sumar 4}$$

$$-2 < 2x < 6 \qquad \text{simplificar}$$

$$-1 < x < 3 \qquad \text{dividir entre 2}$$

EJEMPLO 4 *Solución de una desigualdad continua*

Resuelve la desigualdad continua $-5 \le \dfrac{4 - 3x}{2} < 1$.

Solución Un número x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$-5 \le \frac{4 - 3x}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{4 - 3x}{2} < 1.$$

Es posible trabajar con cada una de las desigualdades por separado o resolverlos al mismo tiempo (recordemos que nuestra meta es aislar x) de esta forma:

$$-5 \le \frac{4 - 3x}{2} < 1 \qquad \text{dado}$$

$$-10 \le 4 - 3x < 2 \qquad \text{multiplicar por 2}$$

$$-10 - 4 \le -3x < 2 - 4 \qquad \text{restar 4}$$

$$-14 \le -3x < -2 \qquad \text{simplificar}$$

$$\frac{-14}{-3} \ge \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \qquad \text{dividir entre } -3\text{; invertir los signos de desigualdad}$$

$$\tfrac{14}{3} \ge x > \tfrac{2}{3} \qquad \text{simplificar}$$

$$\tfrac{2}{3} < x \le \tfrac{14}{3} \qquad \text{desigualdad equivalente}$$

Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo semiabierto $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$ que aparece en la figura 16.

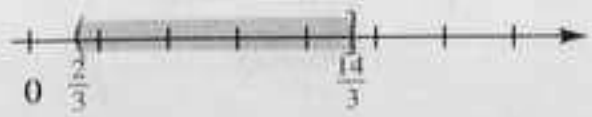


FIGURA 16

EJEMPLO 5 *Solución de una desigualdad racional*

Resuelve la desigualdad $\dfrac{1}{x - 2} > 0$.

www.elsolucionario.net

Solución Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x-2$, también es positivo; en consecuencia, $x-2>0$, o bien, lo que es igual, $x>2$, y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ dibujado en la figura 17.

FIGURA 17

EJEMPLO 6 *Uso de una fórmula para lentes*

Según se ilustra en la figura 18, si una lente convexa tiene una longitud focal de f centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p>f$, entonces la distancia q desde la lente a la imagen está relacionada con p y f por la fórmula

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}.$$

Si $f=5$ cm, ¿cuán cerca debe estar el objeto de la lente para que la imagen quede a más de 12 cm de la lente?

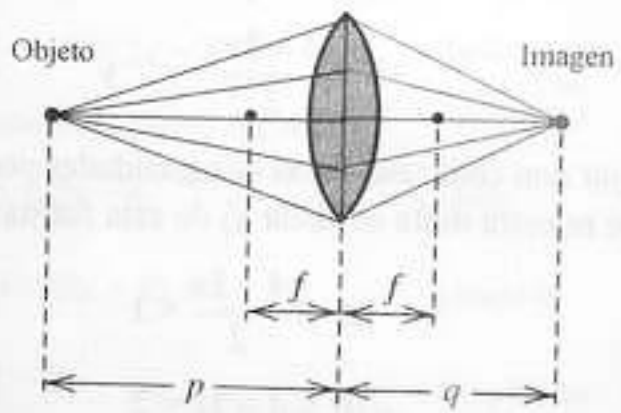


FIGURA 18

Solución Como $f=5$ cm, la fórmula dada se puede escribir como

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{5}.$$

Deseamos determinar los valores de q tales que $q>12$. Primero despejamos q de la ecuación:

$5q+5p=pq$ multiplicar por el MCDn, $5pq$

$q(5-p)=-5p$ reunir términos en q en un lado y factorizar

$q=-\dfrac{5p}{5-p}=\dfrac{5p}{p-5}$ dividir entre $5-p$

Para resolver la desigualdad $q>12$, procedemos como sigue:

$\dfrac{5p}{5-p}>12$ $\quad q=\dfrac{5p}{p-5}$

$5p>12(p-5)$ permisible, pues $p>f$ significa que $p-5>0$

$-7p>-60$ multiplicar factores y reunir términos en p en un lado

$p<\frac{60}{7}$ dividir entre -7; invertir la desigualdad

www.elsolucionario.net

Al combinar la última desigualdad con el hecho de que p es mayor que 5, se obtiene la solución

$$5 < p < \tfrac{60}{7}.$$

Si un punto X sobre una recta coordenada tiene una coordenada x, como se exhibe en la figura 19, entonces X está a la derecha del origen O si $x > 0$ y a la izquierda de O si $x < 0$. Con base en la sección 1.1, la distancia $d(O, X)$ entre O y X es el número real *no negativo* dado por

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|.$$

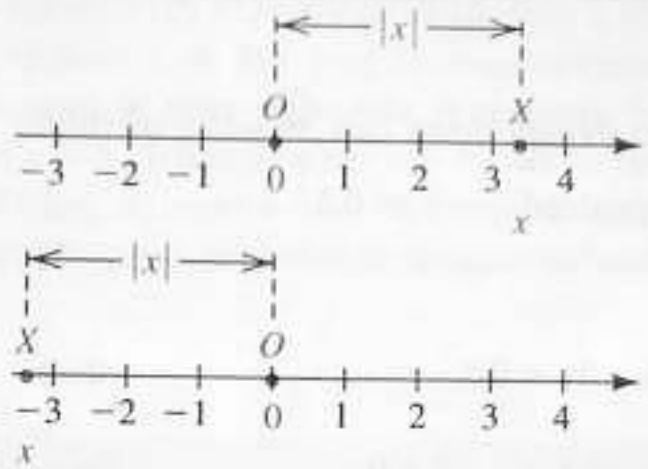


FIGURA 19

Se deduce que las soluciones de una desigualdad como $|x| < 3$ constan de las coordenadas de todos los puntos cuya distancia desde O es menor que 3. Éste es el intervalo abierto $(-3, 3)$ trazado en la figura 20; por lo tanto,

$$|x| < 3 \text{ equivale a } -3 < x < 3.$$

FIGURA 20

En forma análoga, para $|x| > 3$, la distancia entre O y un punto con coordenada x es mayor que 3; esto es,

$$|x| > 3 \text{ equivale a } x < -3 \text{ o bien } x > 3.$$

La gráfica de las soluciones a $|x| > 3$ está trazada en la figura 21. Con frecuencia usamos el **símbolo de unión** $\cup$ y escribimos

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

para denotar todos los números reales que están en $(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$.

FIGURA 21

El **símbolo de intersección** $\cap$ denota los elementos *comunes* a los dos conjuntos; por ejemplo,

$$(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3),$$

ya que la intersección de $(-\infty, 3)$ y $(-3, \infty)$ consta de todos los números reales x tales que $x < 3$ y $x > -3$.

www.elsolucionario.net

El análisis anterior se puede generalizar para obtener lo siguiente.

Propiedades de los valores absolutos ($b > 0$)

(1) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$.

(2) $|a| > b$ equivale a $a < -b$ o $a > b$.

En el próximo ejemplo utilizamos la propiedad 1 con $a = x - 3$ y $b = 0.5$.

EJEMPLO 7 *Solución de una desigualdad con un valor absoluto*

Resuelve la desigualdad $|x - 3| < 0.5$.

Solución

$$|x - 3| < 0.5 \qquad \text{dado}$$

$$-0.5 < x - 3 < 0.5 \qquad \text{propiedad 1}$$

$$-0.5 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.5 + 3 \qquad \text{aislar } x \text{ sumando 3}$$

$$2.5 < x < 3.5 \qquad \text{simplificar}$$

Por lo tanto, las soluciones son los números reales del intervalo abierto (2.5, 3.5). La gráfica aparece en la figura 22.

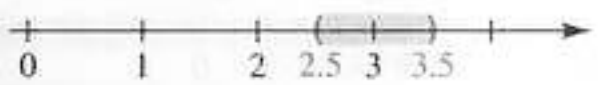


FIGURA 22

En el ejemplo 8 aplicaremos la propiedad (2) con $a = 2x + 3$ y $b = 9$.

EJEMPLO 8 *Solución de una desigualdad con un valor absoluto*

Resuelve la desigualdad $|2x + 3| > 9$.

Solución

$$|2x + 3| > 9 \qquad \text{dado}$$

$$2x + 3 < -9 \quad \text{o} \quad 2x + 3 > 9 \qquad \text{propiedad 2}$$

$$2x < -12 \quad \text{o} \quad 2x > 6 \qquad \text{restar 3}$$

$$x < -6 \quad \text{o} \quad x > 3 \qquad \text{dividir entre 2}$$

En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ están formadas en los números $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. La gráfica está en la figura 23.

www.elsolucionario.net

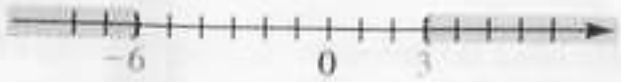


FIGURA 23

La ley de la tricotomía de la sección 1.1 expresa que para cualesquier números reales a y b, una de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a > b, \qquad a < b, \qquad \text{o bien} \qquad a = b$$

Por lo tanto, en seguida de resolver $|2x + 3| > 9$ en el ejemplo 8 obtenemos las soluciones para $|2x + 3| < 9$ y $|2x + 3| = 9$; es decir, $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Notarás que la unión de estos tres conjuntos de soluciones es, necesariamente, el conjunto de números reales ℝ.

Al usar la notación $a < x < b$, debemos tener $a < b$. Por lo tanto, *es incorrecto escribir la solución* $x < -6$ *o* $x > 3$ (en el Ejem. 8) *como* $3 < x < -6$. Otro mal uso de la notación de desigualdad es $a < x > b$, ya que cuando se usan varios símbolos de desigualdad en una expresión, *deben apuntar en la misma dirección*.

2.6 EJERCICIOS

1. Dados $-7 < -3$, determina la desigualdad obtenida si
   a) Se suma 5 a ambos lados
   b) Se resta 4 de ambos lados
   c) Ambos lados se multiplican por $\frac{1}{3}$
   d) Ambos lados se multiplican por $-\frac{1}{3}$
2. Dados $4 > -5$, encuentra la desigualdad obtenida si
   a) Se suma 7 a ambos lados
   b) Se resta -5 de ambos lados
   c) Ambos lados se dividen entre 6
   d) Ambos lados se dividen entre -6

Ejercicios 3 al 12: expresa la desigualdad como intervalo y traza su gráfica.

3. $x < -2$
4. $x \leq 5$
5. $x \geq 4$
6. $x > -3$
7. $-2 < x \leq 4$
8. $-3 \leq x < 5$
9. $3 \leq x \leq 7$
10. $-3 < x < -1$
11. $5 > x \geq -2$
12. $-3 \geq x > -5$

Ejercicios 13 al 20: expresa el intervalo como desigualdad en la variable x.

13. $(-5, 8]$
14. $[0, 4)$
15. $[-4, -1]$
16. $(3, 7)$
17. $[4, \infty)$
18. $(-3, \infty)$
19. $(-\infty, -5)$
20. $(-\infty, 2]$

Ejercicios 21 al 70: resuelve la desigualdad y expresa las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

21. $3x - 2 > 14$
22. $2x + 5 \leq 7$
23. $-2 - 3x \geq 2$
24. $3 - 5x < 11$
25. $2x + 5 < 3x - 7$
26. $x - 8 > 5x + 3$
27. $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$
28. $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{3} - 2$
29. $-3 < 2x - 5 < 7$
30. $4 \geq 3x + 5 > -1$
31. $3 \leq \dfrac{2x - 3}{5} < 7$
32. $-2 < \dfrac{4x + 1}{3} \leq 0$
33. $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} \geq -2$
34. $5 \geq \dfrac{6 - 5x}{3} > 2$
35. $0 \leq 4 - \frac{1}{3}x < 2$
36. $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$
37. $(2x - 3)(4x + 5) \leq (8x + 1)(x - 7)$
38. $(x - 3)(x + 3) \geq (x + 5)^2$
39. $(x - 4)^2 > x(x + 12)$
40. $2x(6x + 5) < (3x - 2)(4x + 1)$
41. $\dfrac{4}{3x + 2} \geq 0$
42. $\dfrac{3}{2x + 5} \leq 0$
43. $\dfrac{-2}{4 - 3x} > 0$
44. $\dfrac{-3}{2 - x} < 0$
45. $\dfrac{2}{(1 - x)^2} > 0$
46. $\dfrac{4}{x^2 + 4} < 0$
47. $|x| < 3$
48. $|x| \leq 7$
49. $|x| \geq 5$
50. $|-x| > 2$

www.elsolucionario.net

51. $|x+3|<0.01$ **52.** $|x-4|\le 0.03$

53. $|x+2|+0.1\ge 0.2$ **54.** $|x-3|-0.3>0.1$

55. $|2x+5|<4$ **56.** $|3x-7|\ge 5$

57. $-\frac{1}{3}|6-5x|+2\ge 1$

58. $2|-11-7x|-2>10$

59. $|7x+2|>-2$ **60.** $|6x-5|\le -2$

61. $|3x-9|>0$ **62.** $|5x+2|\le 0$

63. $\left|\frac{2-3x}{5}\right|\ge 2$ **64.** $\left|\frac{2x+5}{3}\right|<1$

65. $\frac{3}{|5-2x|}<2$ **66.** $\frac{2}{|2x+3|}\ge 5$

67. $-2\le|x|<4$ **68.** $1<|x|<5$

69. $1<|x-2|<4$ **70.** $2<|2x-1|<3$

Ejercicios 71 y 72: resuelve la parte a) y determina las respuestas a las partes b) y c) con la respuesta.

71. a) $|x+5|=3$ **b)** $|x+5|<3$

c) $|x+5|>3$

72. a) $|x-3|<2$ **b)** $|x-3|=2$

c) $|x-3|>2$

Ejercicios 73 y 76: expresa el enunciado en términos de una desigualdad con un valor absoluto.

73. El peso w de un luchador no ha de variar más de 2 lb de 148 lb.

74. El radio r de un cojinete no debe variar más de 0.01 cm de 1 cm.

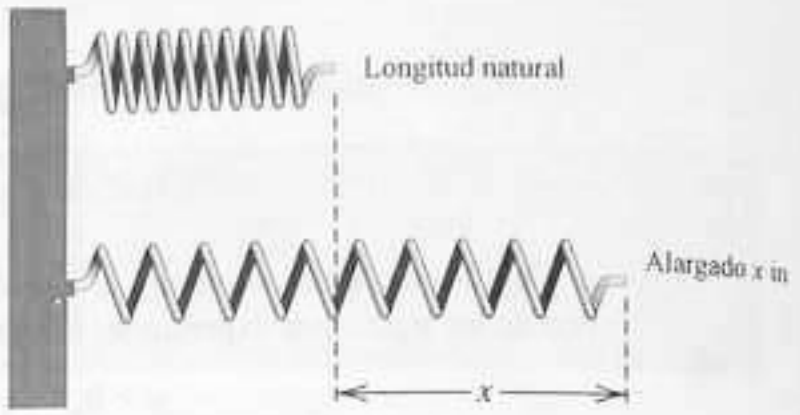
75. La diferencia de dos temperaturas T_1 y T_2 de una mezcla química tiene que estar entre 5 °C y 10 °C.

76. El tiempo de arribo t del tren B será al menos 5 minutos diferente de las 4:00 p.m., que es el momento de llegada del tren A.

77. Escalas de temperatura La fórmula $C=\frac{5}{9}(F-32)$ relaciona las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius. ¿Qué valores de F corresponden a los valores de C tales que $30\le C\le 40$?

78. Ley de Hooke De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza F (en lb) requerida para estirar cierto resorte x pulgadas, más allá de su longitud natural, está dada por $F=(4.5)x$ —ve la figura—. Si $10\le F\le 18$, ¿cuáles son los valores correspondientes de x?

79. Ley de Ohm La ley de Ohm en teoría eléctrica señala que si R denota la resistencia de un objeto (en ohms), V es la diferencia de potencial (en volts: V) conectada al objeto, e I es la corriente (en amperes: A) que circula por el objeto, entonces $R=V/I$. Si el voltaje es 110, ¿qué



EJERCICIO 78

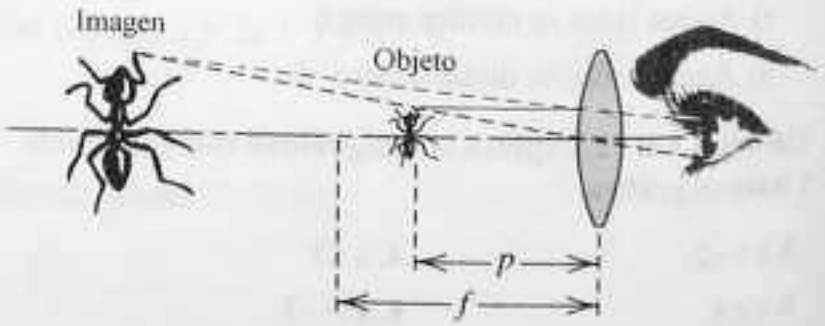
valores de resistencia producirán una corriente que no exceda de 10 A?

80. Resistencia eléctrica Si los resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta R está dada por

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

Si R_1 = 10 ohms: Ω, ¿qué valores de R_2 darán una resistencia neta de menos de 5 Ω?

81. Amplificación lineal En la figura se muestra un lente de aumento. El objeto que se amplificará se coloca de modo que la distancia p desde la lente sea menor que la longitud focal f. La amplificación lineal M es el cociente entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. En física se demuestra que $M=f/(f-p)$. Si $f=6$ cm, ¿a qué distancia de la lente hay que colocar el objeto para que su imagen aparezca amplificada al menos tres veces? (Compara con el Ejem. 6.)



EJERCICIO 81

82. Concentración de medicamento Para tratar la arritmia cardiaca, se aplica un medicamento al torrente sanguíneo en forma intravenosa. Supón que la concentración c del fármaco después de t horas está dada por $c=3.5t/(t+1)$ mg/l. Si el nivel terapéutico mínimo es 1.5 mg/l, indica cuándo se rebasa este nivel.

83. Gastos en un empresa Una constructora está tratando de decidir cuál grúa comprar. El modelo A cuesta $50 000 y requiere $4000 anuales de mantenimiento; el

www.elsolucionario.net

modelo B tiene un precio de $40 000 y un costo de mantenimiento de $5500 al año. ¿Durante cuántos años se usará el modelo A antes de que sea más económico que el B?

84. Compra de un auto Un consumidor se muestra indeciso ante cual vehículo adquirir. El auto A cuesta $10 000 con un rendimiento de 30 millas por galón (mpg) y un seguro de $550 por año; el B cuesta $12 000, con un rendimiento de 50 mpg y un seguro de $600 por año. Considera que el comprador recorre 15 000 millas al año y que el precio de la gasolina permanece constante en $1.25 por galón. Con base en estos datos, señala cuánto tardará para que el costo total del carro B sea menor que el del A.

85. Estatura decreciente La estatura de una persona disminuye por lo general 0.024 in. por año después de los 30 años de edad.

a) Si una mujer mide 5 ft 9 in a los 30 años, predice la estatura que tendrá a los 70 años.

b) Un hombre de 50 años mide 5 ft 6 in. Encuentra una desigualdad para los límites en estatura (en in) que experimentará entre los 30 y 70 años.

2.7 Más sobre desigualdades

Para resolver una desigualdad con polinomios de grado mayor de 1, expresaremos cada polinomio como el producto de factores lineales $ax + b$, factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$ o ambos. Si alguno de dichos factores no es cero en un intervalo, entonces es positivo o negativo en todo el intervalo; por lo tanto, si escogemos cualquier k del intervalo y si el factor es positivo (o negativo) para $x = k$, entonces es positivo (o negativo) en todo el intervalo. El valor del factor en $x = k$ se llama **valor de prueba** en el número de prueba k. Este concepto se expone en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 *Solución de una desigualdad cuadrática*

Resuelve la desigualdad $2x^2 - x < 3$.

Solución Para usar valores de prueba, *es esencial tener 0 en un lado del signo de desigualdad;* por lo tanto, procedemos como sigue:

$$2x^2 - x < 3 \qquad \text{dado}$$

$$2x^2 - x - 3 < 0 \qquad \text{igualar un lado a 0}$$

$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \qquad \text{factorizar}$$

FIGURA 24

Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero en -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes sobre una recta coordenada (Fig. 24) fijan los intervalos donde no hay intersección.

$$(-\infty, -1), \quad \left(-1, \tfrac{3}{2}\right), \quad \text{y} \quad \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right).$$

Podemos encontrar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ de cada intervalo con un valor de prueba. Para ilustrar lo anterior, si escogemos $k = -10$ en $(-\infty, -1)$, los valores tanto de $x + 1$ como de $2x - 3$

son negativos y, en consecuencia, lo serán en todo el intervalo $(-\infty, -1)$. Un procedimiento similar para los otros dos intervalos nos dará la siguiente *tabla de signos*, donde el término *signo resultante* del último renglón se refiere al signo obtenido al aplicar las leyes de los signos al producto de los factores. Observarás que el signo resultante es positivo o negativo según si el número de signos negativos de los factores es par o non, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $2x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$

En ocasiones conviene representar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ con una recta coordenada y un *diagrama de signo* (Fig. 25). Las líneas verticales indican los lugares en que los factores son cero, y los signos de factores aparecen arriba de la recta coordenada. Los signos resultantes se muestran en color.

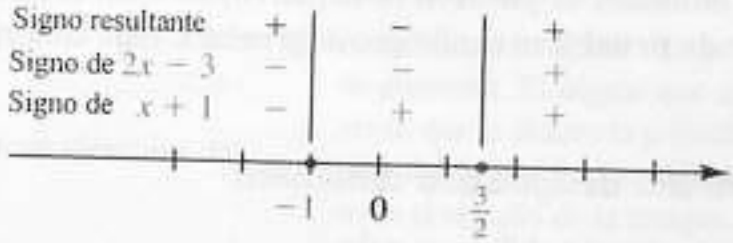


FIGURA 25

Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los que el producto de los factores es *negativo;* esto es, donde el signo resultante sea negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

Ya en la página 71 estudiamos el teorema del factor cero, que se refería a las *igualdades*. Es un error común ampliar este teorema a las *desigualdades*. La siguiente advertencia muestra esta incorrecta extensión aplicada a la desigualdad del ejemplo 1.

Precaución

$(x + 1)(2x - 3) < 0$ *no equivale a* $x + 1 < 0$ o $2x - 3 < 0$

En ejemplos posteriores usaremos una tabla de signos o un diagrama de signos, pero no ambos. Al trabajar los ejercicios, escoge el método de solución con que te sientas mejor.

EJEMPLO 2 *Solución de una desigualdad cuadrática*

Resuelve la desigualdad $x^2 > 7x - 10$.

Solución

$$x^2 > 7x - 10 \qquad \text{dados}$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0 \qquad \text{igualar un lado a 0}$$

$$(x-2)(x-5) > 0 \qquad \text{factorizar}$$

Los factores son cero en 2 y 5. Los puntos correspondientes de una recta coordenada (Fig. 26) establecen los intervalos donde no hay intersección.

$$(-\infty, 2), \quad (2, 5), \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

FIGURA 26

Al igual que en el ejemplo 1, es posible usar valores de prueba a fin de obtener esta tabla de signos.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $x-2$	−	+	+
Signo de $x-5$	−	−	+
Signo resultante	+	−	+

Las soluciones de $(x-2)(x-5) > 0$ son los valores de x para los que el signo resultante es *positivo;* por lo tanto, la solución de la desigualdad dada es la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

EJEMPLO 3 *Uso de un diagrama de signo en la solución de una desigualdad*

Resuelve la desigualdad $\dfrac{(x+2)(3-x)}{(x+1)(x^2+1)} \leq 0$.

Solución Dado que 0 ya está en el lado derecho de la desigualdad y el lado izquierdo está factorizado, se puede seguir directamente al diagrama de signo de la figura 27, donde las líneas verticales indican los ceros (−2, −1 y 3) de los factores. En vista de que el factor cuadrático $x^2 + 1$ siempre es positivo, no afecta el signo del cociente y se puede omitir del diagrama.

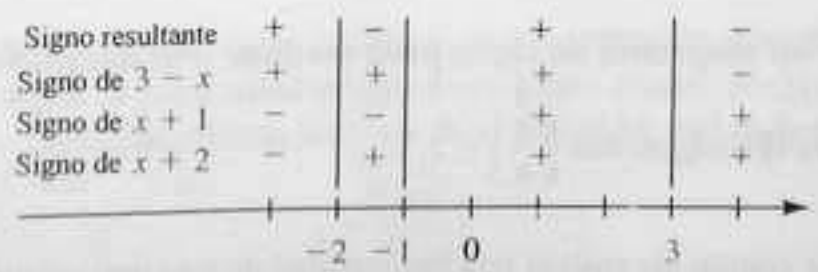


FIGURA 27

Los diversos signos de los factores se pueden encontrar usando valores de prueba. Como alternativa, baste recordar que a medida que x aumenta, el signo de un factor lineal $ax + b$ pasa de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo, y de positivo a negativo si a es negativo.

Para hallar en dónde el cociente es menor o igual a 0, a partir del diagrama de signos observamos primero que sea *negativo* para números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 en $x = -2$ y $x = 3$, los números -2 y 3 también son soluciones y debemos *incluirlos* en la respuesta. Por último, el cociente es *indefinido* en $x = -1$, así que *excluiremos* -1 de nuestra solución; por lo tanto, las soluciones de la desigualdad dada están dadas por

$$[-2, -1) \cup [3, \infty).$$

EJEMPLO 4 *Uso de un diagrama de signo para resolver una desigualdad*

Resuelve la desigualdad $\dfrac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x^2-1)} \geq 0$.

Solución Al reescribir la desigualdad como

$$\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0,$$

vemos que $x - 1$ es un factor tanto del numerador como del denominador. En consecuencia, *suponiendo que* $x - 1 \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), podemos cancelar este factor y reducir nuestra búsqueda de soluciones al caso

$$\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x \neq 1.$$

A continuación observamos que este cociente es 0 si $2x + 1 = 0$ (o sea, si $x = -\frac{1}{2}$). En consecuencia, $-\frac{1}{2}$ es una solución. Para hallar las soluciones restantes, construimos el diagrama de signo de la figura 28. No incluimos $(2x + 1)^2$ porque esta expresión siempre es positiva si $x \neq -\frac{1}{2}$ y por ello no afecta el signo del cociente. Luego consultamos el signo resultante, recordamos que $-\frac{1}{2}$ es una solución pero 1 *no lo es* y vemos que las soluciones de la desigualdad dada están expresadas por

$$(-\infty, -1) \cup \left[-\tfrac{1}{2}\right] \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

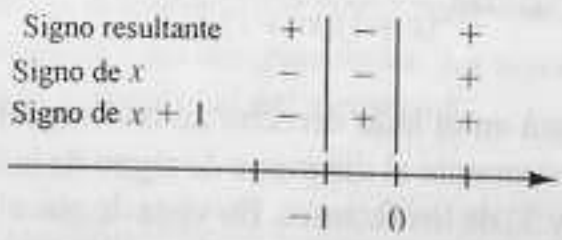


FIGURA 28

EJEMPLO 5 *Uso de un diagrama de signo para resolver una desigualdad*

Resuelve la desigualdad $\dfrac{x+1}{x+3} \leq 2$.

Solución Un error común al resolver una desigualdad de este tipo es multiplicar primero ambos lados por $x + 3$. Si lo hiciéramos así tendríamos que considerar dos casos, ya que $x + 3$ puede ser positivo o

www.elsolucionario.net

negativo (suponiendo $x + 3 \neq 0$) y tendríamos que invertir la desigualdad. Un método más sencillo es obtener primero una desigualdad equivalente que tenga 0 en el lado derecho y proseguir desde ahí:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \qquad \text{dado}$$

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \qquad \text{igualar un lado a 0}$$

$$\frac{x+1-2(x+3)}{x+3} \leq 0 \qquad \text{combinar en una fracción}$$

$$\frac{-x-5}{x+3} \leq 0 \qquad \text{simplificar}$$

$$\frac{x+5}{x+3} \geq 0 \qquad \text{multiplicar por } -1$$

Observarás que la dirección de la desigualdad cambia en el último paso, ya que multiplicamos por un número negativo. Efectuaremos esta multiplicación por conveniencia, a fin de que todos los factores tengan coeficientes positivos de x.

Los factores $x + 5$ y $x + 3$ son 0 en $x = -5$ y $x = -3$, respectivamente. Esto lleva al diagrama de signo de la figura 29, donde los signos están determinados como en ejemplos previos. A partir del diagrama vemos que el signo resultante y, por lo tanto el signo del cociente, es positivo en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. El cociente es 0 en $x = -5$ (incluye -5) y no definido en $x = -3$ (excluye -3). Así pues, la solución de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ es $(-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$.

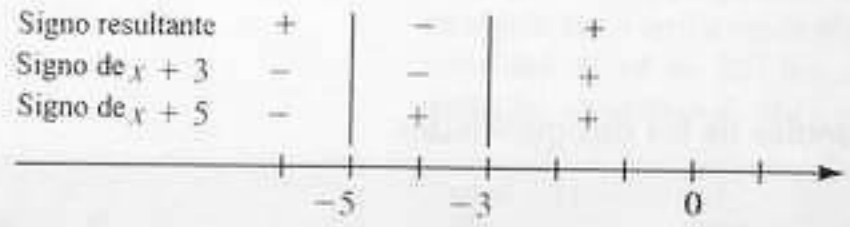


FIGURA 29

Otra opción es comenzar por multiplicar por $(x + 3)^2$ ambos lados de la desigualdad dada, *suponiendo que* $x \neq -3$. En este caso, $(x + 3)^2 > 0$ y la multiplicación es permisible; sin embargo, después de resolver la desigualdad resultante, excluimos el valor $x = -3$.

EJEMPLO 6 *Determinación de niveles terapéuticos mínimos*

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración sanguínea debe ser mayor que cierto valor, mismo que se llama *nivel terapéutico mínimo*. Supón que la concentración c (mg/l) de un fármaco en particular, t horas después de su ingestión, está dada por

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si el nivel terapéutico mínimo es 4 mg/l, indica cuándo se rebasa este nivel.

Solución El nivel terapéutico mínimo, 4 mg/l, se rebasa si $c > 4$; por lo tanto, debemos resolver la desigualdad

$$\frac{20t}{t^2+4} > 4.$$

Como $t^2 + 4 > 0$ para toda t, multiplicamos ambos lados por $t + 4$ y procedemos como sigue:

$20t > 4t^2 + 16$	permisible, ya que $t^2 + 4 > 0$
$-4t^2 + 20t - 16 > 0$	igualar un lado a 0
$t^2 - 5t + 4 < 0$	dividir entre el factor común -4
$(t-1)(t-4) < 0$	factorizar

Los factores de la última desigualdad son 0 cuando $t = 1$ y $t = 4$. Éstos son los tiempos en que c es *igual a* 4. Al igual que en ejemplos anteriores, utilizamos una tabla de signo o diagrama de signo (con $t \geq 0$) con el fin de mostrar que $(t-1)(t-4) < 0$ para toda t en el intervalo $(1, 4)$. En consecuencia, el nivel terapéutico mínimo se rebasa si $1 < t < 4$.

Puesto que las gráficas de un plano coordenado se introducen en el siguiente capítulo, sería prematuro demostrar aquí el uso de una calculadora graficadora o programa de computadora para resolver desigualdades en x. Dichos métodos se consideran más adelante.

Dimos algunas propiedades básicas de las desigualdades al comienzo de la última sección. Las siguientes propiedades adicionales son útiles para resolver desigualdades verdaderas. Las pruebas de las propiedades aparecen después de la tabla.

Propiedades adicionales de las desigualdades

Propiedad	Ejemplo
(1) Si $0 < a < b$, luego $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.	Si $< \frac{1}{x} < 4$, luego $\frac{1}{1/x} > \frac{1}{4}$, o $x > \frac{1}{4}$.
(2) Si $0 < a < b$, luego $0 < a^2 < b^2$.	Si $0 < \sqrt{x} < 4$, luego $0 < (\sqrt{x})^2 < 4^2$, o bien $0 < x < 16$.
(3) Si $0 < a < b$, luego $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Si $0 < x^2 < 4$, luego $0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$, o bien $0 < \lvert x \rvert < 2$.

PRUEBAS

(1) Si $0 < a < b$, al multiplicar por $1/(ab)$ obtenemos

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}; \quad \text{esto es,} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

(2) Si $0 < a < b$, al multiplicar por a resulta $a \cdot a < a \cdot b$ y al multiplicar por b tenemos $b \cdot a < b \cdot b$, así que $a^2 < ab < b^2$ y por lo tanto $a^2 < b^2$.

www.elsolucionario.net

(3) Si $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$ o bien, lo que es equivalente,

$$(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0.$$

Al dividir ambos lados de la última desigualdad entre $\sqrt{b} + \sqrt{a}$, tenemos $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$; o sea, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$.

2.7 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 40: resuelve la desigualdad y expresa las soluciones en términos de intervalos, siempre que sea posible.

1. $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$
2. $(2 - 3x)(4x - 7) \geq 0$
3. $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$
4. $(x - 5)(x + 3)(-2 - x) < 0$
5. $x^2 - x - 6 < 0$
6. $x^2 + 4x + 3 \geq 0$
7. $x^2 - 2x - 5 > 3$
8. $x^2 - 4x - 17 \leq 4$
9. $x(2x + 3) \geq 5$
10. $x(3x - 1) \leq 4$
11. $6x - 8 > x^2$
12. $x + 12 \leq x^2$
13. $x^2 < 16$
14. $x^2 > 9$
15. $25x^2 - 9 < 0$
16. $25x^2 - 9x < 0$
17. $16x^2 \geq 9x$
18. $16x^2 > 9$
19. $x^4 + 5x^2 \geq 36$
20. $x^4 + 15x^2 < 16$
21. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$
22. $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$
23. $\dfrac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$
24. $\dfrac{(x^2+1)(x-3)}{x^2-9} \geq 0$
25. $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \geq 0$
26. $\dfrac{(x+3)^2(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$
27. $\dfrac{x-2}{x^2-3x-10} \geq 0$
28. $\dfrac{x+5}{x^2-7x+12} \leq 0$
29. $\dfrac{-3x}{x^2-9} > 0$
30. $\dfrac{2x}{16-x^2} < 0$
31. $\dfrac{x+1}{2x-3} > 2$
32. $\dfrac{x-2}{3x+5} \leq 4$
33. $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{3}{x+1}$
34. $\dfrac{2}{2x+3} \leq \dfrac{2}{x-5}$
35. $\dfrac{4}{3x-2} \leq \dfrac{2}{x+1}$
36. $\dfrac{3}{5x+1} \geq \dfrac{1}{x-3}$
37. $\dfrac{x}{3x-5} \leq \dfrac{2}{x-1}$
38. $\dfrac{x}{2x-1} \geq \dfrac{3}{x+2}$
39. $x^3 > x$
40. $x^4 \geq x^2$

Ejercicios 41 y 42: a medida que una particula se desplaza a lo largo de una trayectoria recta, su velocidad v (en cm/s) en el tiempo t (en s) está dada por la ecuación. ¿Para qué subintervalos del intervalo dado $[a, b]$ su velocidad será al menos k cm/s?

41. $v = t^3 - 3t^2 - 4t + 20$; $[0, 5]$; $k = 8$
42. $v = t^4 - 4t^2 + 10$; $[1, 6]$; $k = 10$

43. **Marca de salto vertical** El *Libro Guinness de Récords Mundiales* reporta que los perros pastor alemán pueden saltar verticalmente más de 10 ft al trepar por paredes. Si la distancia s (en ft) que saltan del suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos el animal se mantiene a más de 9 ft del suelo?

44. **Altura de un objeto lanzado** Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 ft/s, entonces su distancia s arriba del suelo después de t s está dada por $s = -16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1536 ft sobre el suelo?

45. **Distancia de frenado** La distancia de frenado d (en ft) de un auto que se desplaza a v mph está dada por $d = v + (v^2/20)$. Encuentra las velocidades que den distancias de frenado de menos de 75 ft.

46. **Rendimiento de combustible** El número de millas M que cierto auto compacto puede recorrer con un galón de gasolina está relacionado con su velocidad v (en mph) por

$$M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \quad \text{para} \quad 0 < v < 70.$$

¿A qué velocidades será M al menos 45?

47. **Propagación del salmón** Para una población particular de salmones, la relación entre el número S de ponedoras y el número R de hijuelos que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula $R = 4500S/(S + 500)$. ¿En qué condiciones es $R > S$?

48. **Densidad de población** La densidad de población D (en personas/mi^2) de una gran ciudad está relacionada

www.elsolucionario.net

con la distancia x desde el centro de la ciudad por $D = 5000x/(x^2 + 36)$. ¿En qué partes de la ciudad la densidad de población rebasará las 400 personas/mi^2?

49. Peso en el espacio Después que un astronauta es lanzado al espacio, su peso disminuye hasta que alcanza un estado de ingravidez. El peso de un astronauta de 125 lb a una altitud de x km sobre el nivel del mar está dado por

$$W = 125\left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2.$$

¿A qué altitudes será menor de 5 lb?

50. Fórmula de contracción de Lorentz La fórmula de contracción de Lorentz, en teoría de la relatividad, relaciona la longitud L de un objeto que se mueve a una velocidad de v mps (millas por segundo) con respecto a un observador con su longitud L_0 en reposo. Si c es la velocidad de la luz, entonces

$$L^2 = L_0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

¿Para qué velocidades L será menor de $\frac{1}{2}L_0$? Anota la respuesta en términos de c.

51. Velocidad de aterrizaje de aviones En el diseño de un pequeño avión de turbohélices, la velocidad V de aterrizaje (en ft/s) está determinada por la fórmula $W = 0.00334V^2S$, donde W es el peso bruto (en lb) del avión y S es la superficie (en ft^2) de las alas. Si el peso bruto de la nave es entre 7500 y 10 000 lb y $S = 210$ ft^2, halla los límites de velocidad de aterrizaje en millas por hora.

Ejercicios 52 y 53: usa una tabla para ayudarte a resolver la desigualdad en el intervalo dado.

52. $\dfrac{(2-x)(3x-9)}{(1-x)(x+1)} > 0$, $[-2, 3.5]$

53. $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 < 0$, $[-3.5, 5]$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

Ejercicios 1 al 24: resuelve la ecuación

1. $\dfrac{3x+1}{5x+7} = \dfrac{6x+11}{10x-3}$

2. $2 - \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{4}{x}$

3. $\dfrac{2}{x+5} - \dfrac{3}{2x+1} = \dfrac{5}{6x+3}$

4. $\dfrac{7}{x-2} - \dfrac{6}{x^2-4} = \dfrac{3}{2x+4}$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

6. $2x^2 + 5x - 12 = 0$

7. $x(3x + 4) = 5$

8. $\dfrac{x}{3x+1} = \dfrac{x-1}{2x+3}$

9. $(x - 2)(x + 1) = 3$

10. $4x^4 - 33x^2 + 50 = 0$

11. $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 15 = 0$

12. $20x^3 + 8x^2 - 35x - 14 = 0$

13. $5x^2 = 2x - 3$

14. $x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

15. $6x^4 + 29x^2 + 28 = 0$

16. $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

17. $|4x - 1| = 7$

18. $2|2x + 1| + 1 = 19$

19. $\dfrac{1}{x} + 6 = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

20. $\sqrt[3]{4x - 5} - 2 = 0$

21. $\sqrt{7x + 2} + x = 6$

22. $\sqrt{x + 4} = \sqrt[4]{6x + 19}$

23. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$

24. $x^{4/3} = 16$

Ejercicios 25 y 26: resuelve completando el cuadrado.

25. $3x^2 - 12x + 3 = 0$

26. $x^2 + 10x + 38 = 0$

Ejercicios 27 al 44: resuelve la desigualdad y escribe las soluciones en términos de intervalos, siempre que sea posible.

27. $(x - 3)^2 \le 0$

28. $10 - 7x < 4 + 2x$

29. $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2x+3}{5} < \dfrac{3}{2}$

30. $(3x - 1)(10x + 4) \ge (6x - 5)(5x - 7)$

31. $\dfrac{6}{10x+3} < 0$

32. $|4x + 7| < 21$

33. $2|3 - x| + 1 > 5$

34. $-2|x - 3| + 1 \ge -5$

35. $|16 - 3x| \ge 5$

36. $2 < |x - 6| < 4$

37. $10x^2 + 11x > 6$

38. $x(x - 3) \le 10$

39. $\dfrac{x^2(3-x)}{x+2} \le 0$

40. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} \le 0$

41. $\dfrac{3}{2x+3} < \dfrac{1}{x-2}$

42. $\dfrac{x+1}{x^2-25} \le 0$

43. $x^3 > x^2$

44. $(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) < 0$

Ejercicios 45 al 48: despeja para la variable especificada en la expresión dada.

45. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para r (volumen de una esfera)

46. $F = \frac{\pi P R^4}{8VL}$ para R (ley de Poiseuille para fluidos)

47. $c = \sqrt{4h(2R - h)}$ para h (base de un segmento circular)

48. $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$ para r (volumen del tronco de un cono)

Ejercicios 49 al 54: expresa en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

49. $(7 + 5i) - (-8 + 3i)$

50. $(4 + 2i)(-5 + 4i)$

51. $(3 + 8i)^2$

52. $\dfrac{1}{9 - \sqrt{-4}}$

53. $\dfrac{6 - 3i}{2 + 7i}$

54. $\dfrac{20 - 8i}{4i}$

55. Resistencia eléctrica Cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo, la resistencia neta R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si $R_1 = 5\ \Omega$ ¿qué valor de R_2 hará que la resistencia neta sea $2\ \Omega$?

56. Ingreso por inversiones Un inversionista tiene la opción de realizar dos inversiones: un fondo de bonos y un fondo de acciones. El primero produce 7.186% de interés anual, que es libre de impuestos a nivel federal y estatal. Supón que el inversionista paga el 35% de ISR. Encuentra el interés anual en el fondo de acciones impositivo para que los dos fondos rindan la misma cantidad de ingreso por interés neto.

57. Mezcla de oro y plata Un anillo que pesa 80 g está hecho de oro y plata. Al medir el desplazamiento del anillo en agua, se ha determinado que el anillo tiene un volumen de 5 cm^3. El oro pesa 19.3 g/cm^3 y la plata, 10.5 g/cm^3. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

58. Preparación de alimentos en un hospital El dietista de un hospital desea preparar un platillo de 10 onzas (oz) de carne y verduras que proporciona siete gramos de proteína. Si el contenido de una onza de la porción de verduras es un gramo de proteína y el de una onza de carne es de un gramo de proteína, ¿cuánto de cada uno debe emplear?

59. Preparación de un bactericida Se utilizará como bactericida una solución de alcohol etílico que es 75% de alcohol por peso; la solución se elabora añadiendo agua a una solución de alcohol etílico al 95 por ciento. Ahora bien ¿cuántos gramos de cada uno se requieren para preparar 400 gramos del bactericida?

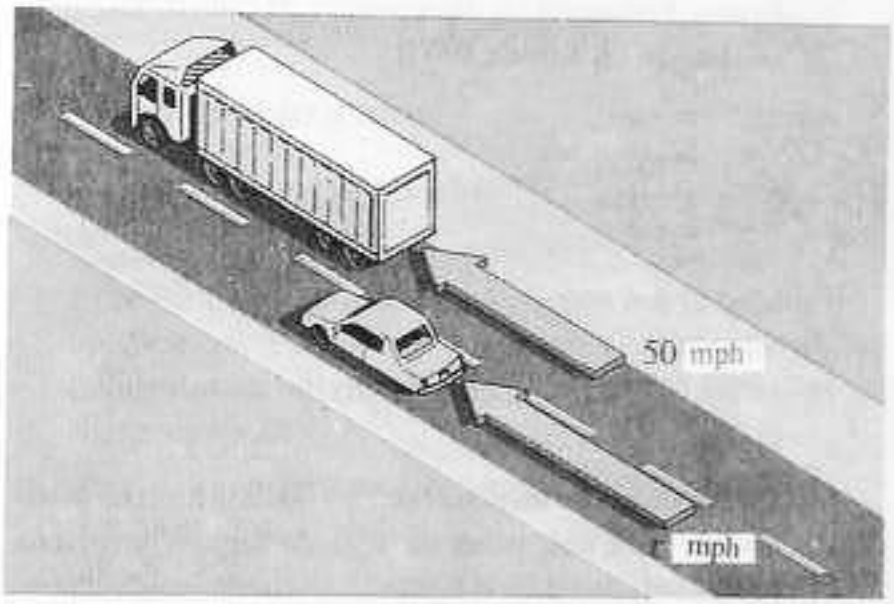
60. Calefacción solar Un panel grande para calefacción solar necesita 120 galones de un fluido que es 30% anticongelante. El fluido se vende en solución al 50 o al 20 por ciento. ¿Cuántos galones de cada uno se precisan para preparar la solución de 120 galones?

61. Consumo de combustible Una lancha tiene un tanque de gasolina de 10 gal y se desplaza a 20 millas por hora (mph), con un consumo de combustible de 16 millas por galón (mpg), cuando es acelerada a plena potencia en aguas tranquilas. La lancha avanza aguas arriba en una corriente de 5 mph. Ahora bien, digamos que tiene el tanque lleno, ¿qué distancia aguas arriba puede viajar y volver si es acelerada a plena potencia durante todo el viaje?

62. Viaje en tren Un tren de alta velocidad recorre 400 mi en $5\frac{1}{2}$ h, sin escalas, entre dos grandes ciudades. El convoy avanza a 100 mph entre las ciudades, pero el reglamento de seguridad exige que avance a sólo 25 mph al cruzar ciudades intermedias pequeñas. ¿Cuántas horas se emplean al pasar por estas últimas?

63. Velocidad del viento Un avión voló a favor del viento durante 30 min y regresó la misma distancia en 45 min. Si la velocidad de crucero era de 320 mph, ¿cuál era la velocidad del viento?

64. Velocidad al rebasar Un automóvil de 20 ft de largo alcanza a un camión de 40 ft que avanza a 50 mph (ve la figura). ¿A qué velocidad constante debe viajar el auto para pasar al camión en 5 s?



EJERCICIO 64

65. Llenado de una tolva Un aparato puede llenar una tolva vacía en 2 h y unos trabajadores pueden vaciarla en 5 h. Si la tolva está a la mitad de su capacidad cuando un aparato empieza a llenarla y unos trabajadores comienzan a vaciarla, ¿cuánto tardará en llenarse?

66. Rendimiento de gasolina El representante de una compañía estima que el rendimiento promedio de gasolina de su automóvil es de 28 millas por galón (mpg) en carretera y 22 mpg en la ciudad. En un viaje reciente recorrió 627 mi y utilizó 24 gal de gasolina. ¿Cuántas millas recorrió en la ciudad?

67. Expansión de una ciudad El recorrido más largo al centro de una ciudad de forma cuadrada, desde las afue-

www.elsolucionario.net

ras de la misma, es de 10 mi. En la última década la ciudad ha crecido en una superficie de 50 mi^2. Imagina que la ciudad siempre ha sido cuadrada y encuentra el cambio correspondiente en el recorrido más largo al centro.

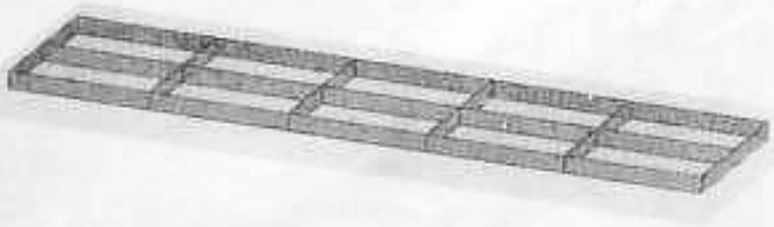
68. Dimensiones de una membrana celular La membrana de una célula es una esfera de 6 micrones de radio. ¿Qué cambio en el radio hará aumentar 25% la superficie de la membrana?

69. Viaje por carretera En el punto P una carretera que va de norte a sur cruza otra que va de este a oeste. Un automóvil pasa por P a las 10:00 a.m. cuando se dirige al este a una velocidad constante de 20 mph. Al mismo tiempo otro vehículo se encuentra a 2 mi al norte de P cuando se dirige hacia al sur a 50 mph.

a) Encuentra una fórmula para la distancia d entre los automóviles t horas después de las 10:00 a.m.

b) ¿Aproximadamente a qué hora se encontrarán los autos a 104 mi uno de otro?

70. Cercado de una perrera El dueño de una perrera tiene 270 ft de alambrado para dividir una superficie rectangular en 10 perreras iguales (como se muestra en la figura). Encuentra las dimensiones de cada perrera para que tengan un área de 100 ft^2.

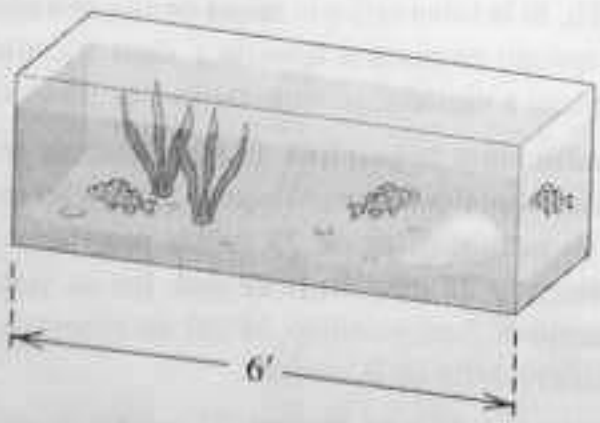


EJERCICIO 70

71. Dimensiones de un acuario Hay que construir un acuario sin tapa con lados de 6 ft de largo y extremos cuadrados, como en la figura.

a) Encuentra la altura del acuario si el volumen ha de ser de 48 ft^3.

b) Halla la altura si se han de usar 44 ft^2 de vidrio.



EJERCICIO 71

72. Dimensiones de una piscina La longitud de una alberca rectangular debe ser cuatro veces su ancho, y a su alrededor se hará una banqueta de 6 ft de ancho. Si se dispone de 1440 ft^2 para su construcción, ¿cuáles serán las dimensiones de la piscina?

73. Dimensiones de un baño Un contratista diseña un baño rectangular hundido, con 40 ft^2 de área para bañarse; alrededor de ésta ha de instalarse un franja de losetas de 1 ft de ancho. La longitud total de la superficie enlosada debe ser el doble de su ancho. Encuentra las dimensiones del área para bañarse.

74. Crecimiento poblacional Se espera que la población P (en miles) de una pequeña ciudad crezca según la fórmula

$$P = 15 + \sqrt{3t + 2},$$

donde t es el tiempo en años. ¿Cuándo tendrá 20 000 habitantes?

75. Ley de Boyle La ley de Boyle para cierto gas señala que si la temperatura es constante, entonces $pv = 200$, donde p es la presión (en lb/in^2) y v es el volumen (en in^3). Si $25 \le v \le 50$, ¿cuál es el intervalo correspondiente para p?

76. Comisión en ventas Un universitario recién egresado tiene dos ofertas de trabajo como vendedor en una empresa de computadoras. Para el puesto A ofrecen $25 000 por año, más 5% de comisión; el puesto B le representa sólo $20 000 por año, y una comision de 10 por ciento. ¿Cuánto debe vender para que el segundo puesto sea más lucrativo?

77. Velocidad del sonido La velocidad del sonido en aire a 0 °C (o 273 K) es 1087 ft/s, pero esta velocidad aumenta a medida que sube la temperatura. La velocidad v del sonido a una temperatura T en K está dada por $v = 1087\sqrt{T/273}$. ¿A qué temperaturas rebasará los 1100 ft/s?

78. Periodo de un péndulo Si la longitud del péndulo del reloj de un abuelo es l cm, entonces su periodo T (en s) está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es una constante gravitacional. Si, en ciertas condiciones, $g = 980$ y $98 \le l \le 100$, ¿cuál es el intervalo correspondiente para T?

79. Órbita de un satélite Para que un satélite conserve una órbita de altitud h km, su velocidad (en km/s) debe ser igual a $626.4/\sqrt{h + R}$, donde $R = 6372$ km es el radio de la Tierra. ¿Qué velocidades producirán órbitas con una altitud de más de 100 km de la superficie de la Tierra?

80. Cercado de un terreno Se dispone de 100 m de alambrado a fin de cercar un terreno rectangular. ¿Cuáles

www.elsolucionario.net

serán el largo y el ancho de un terreno cercado de al menos 600 ft^2?

81. Plantación de una huerta de manzanos El propietario de una huerta estima que si se plantan 24 árboles (palo) por acre, cada árbol maduro producirá unas 600 manzanas por año. Por cada palo adicional por acre, cada árbol da 12 manzanas menos por año. ¿Cuántos manzanos debe plantar por acre para obtener al menos 16 416 manzanas por año?

82. Renta de departamentos Una inmobiliaria es dueña de 180 departamentos, que están todos ocupados cuando la renta es de $300 por mes. La compañía estima que por cada $10 de aumento en la renta, se desocuparán cinco departamentos. ¿Qué renta debe cobrar para pagar las cuentas mensuales, que suman $54 400?

C **83.** Escoge la ecuación que mejor describa la tabla de datos.

x	y
1	2.1213
2	3.6742
3	4.7434
4	5.6125
5	6.3640

(1) $y = 1.5529x + 0.5684$

(2) $y = \frac{3}{x} + x^2 - 1$

(3) $y = 3\sqrt{x - 0.5}$

(4) $y = 3x^{1/3} + 1.1213$

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 2

1. Cuando factorizamos la suma o diferencia de cubos, $x^3 \pm y^3$, ¿siempre será factorizable ($x^2 \mp xy + y^2$) sobre todos los números reales?

2. ¿Cuál es el promedio de las dos soluciones de la ecuación cuadrática arbitraria $ax^2 + bx + c = 0$? Analiza la forma en que este conocimiento te puede ayudar a comprobar fácilmente las soluciones de una ecuación cuadrática.

3. a) Encuentra una expresión de la forma $p + qi$ para el inverso multiplicativo de $\frac{a+bi}{c+di}$, donde a, b, c y d son números reales.

b) ¿Esta expresión se aplica a números reales de la forma a/c?

c) ¿Hay alguna restricción en tu respuesta para la parte a)?

4. Al resolver la desigualdad $\frac{x-1}{x-2} \geq 3$, ¿qué hay de malo al emplear $x - 1 \geq 3(x - 2)$ como primer paso?

5. Considera la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$, donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$. Supón que la igualdad asociada $ax^2 + bx + c = 0$ tiene un discriminante D. Categoriza las soluciones de la desigualdad según los signos de a y D.

6. Nivel de congelación en una nube Consulta los ejercicios 35 al 37 de la sección 2.2.

a) Calcula la altura del nivel de congelación en una nube si la temperatura del suelo es 80 °F y el punto de condensación es 68 °F.

b) Encuentra una fórmula para la altura h del nivel de congelación en una nube para una temperatura del suelo igual a G y un punto de condensación D.

www.elsolucionario.net

3 Funciones y gráficas

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

3.2 Gráficas de ecuaciones

3.3 Rectas

3.4 Definición de función

3.5 Gráficas de funciones

3.6 Funciones cuadráticas

3.7 Operaciones sobre funciones

3.8 Funciones inversas

3.9 Variación

www.elsolucionario.net

El término matemático de *función* (o su equivalente latino) data desde fines del siglo XVII, cuando el cálculo estaba en sus primeras etapas de desarrollo. Este importante concepto es ahora la espina dorsal de cursos avanzados de matemáticas y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

En este capítulo estudiamos las propiedades de funciones, para lo cual usamos métodos algebraicos y gráficos que incluyen localización de puntos, determinación de simetrías y desplazamientos horizontales y verticales. Ahora bien, aunque estas técnicas sirven para obtener bocetos de las gráficas que nos ayudan a entender las propiedades de las funciones, los métodos modernos emplean refinados programas de computadora y matemáticas avanzadas a fin de generar representaciones gráficas extremadamente precisas de las funciones.

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

En la sección 1.1 estudiamos cómo asignar un número real (coordenada) a cada punto de una recta. Ahora demostraremos la forma de asignar un **par ordenado** (a, b) de números reales a cada punto de un plano. Aun cuando también hemos usado la notación (a, b) para denotar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión porque en nuestro análisis siempre debe estar claro si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Introducimos un **sistema de coordenadas rectangulares** o **cartesianas*** en un plano por medio de dos rectas coordenadas perpendiculares llamadas **ejes coordenados,** que se cortan en el **origen** O (Fig. 1). La recta horizontal recibe el nombre de **eje** x y la vertical el de **eje** y; se indican con x y y, respectivamente. Con lo anterior, se trata de un **plano coordenado** o **plano** xy. Los ejes coordenados lo dividen en cuatro partes llamadas **primero, segundo, tercero** y **cuarto cuadrantes** (Fig. 1: I, II, III y IV). Los puntos de los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.

A cada punto P de un plano x se le puede asignar un par ordenado (a, b), según se aprecia en la figura 1; a es la **coordenada** x (o **abscisa**) de P y b, la **coordenada** y (u **ordenada**). Decimos que P *tiene coordenadas* (a, b) y nos referimos al *punto* (a, b) o al punto $P(a, b)$. A la inversa, todo par ordenado (a, b) determina al punto P con coordenadas a y b. Se **traza un punto** mediante un punto como el que se presenta en la figura 2.

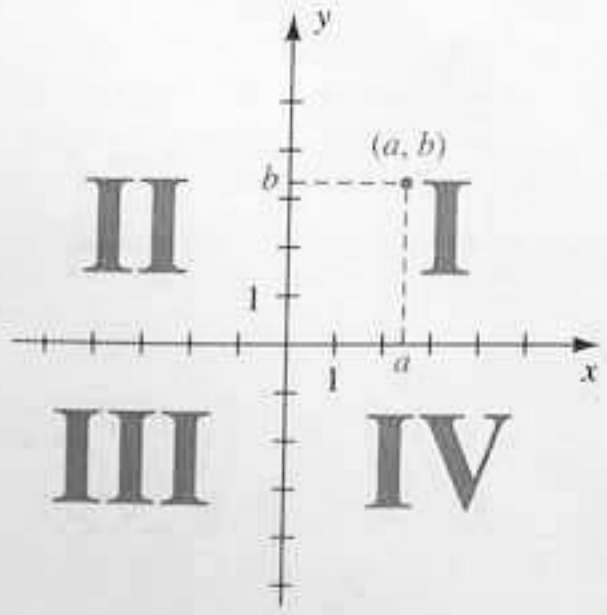


FIGURA 1

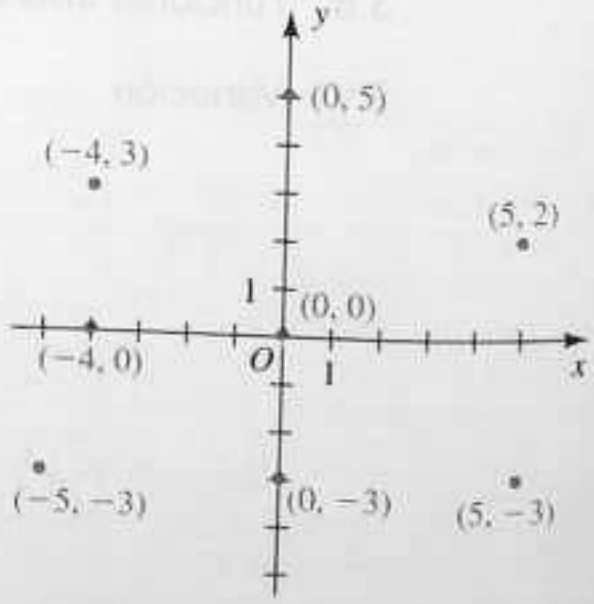


FIGURA 2

*El término *cartesiano* se usa en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), quien fue el primero en emplear dicho sistema de coordenadas.

www.elsolucionario.net

La fórmula que sigue sirve para hallar la distancia entre dos puntos de un plano coordenado.

Fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

PRUEBA Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, según se ve en la figura 3, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

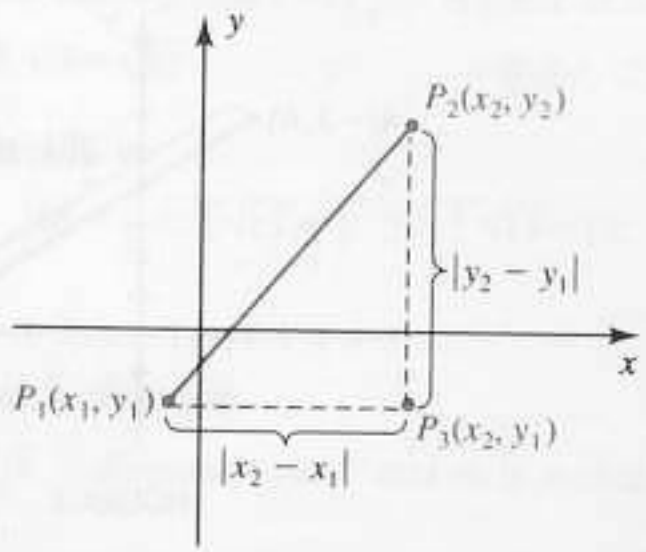


FIGURA 3

De la figura tenemos que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Puesto que $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, podemos escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Tomamos la raíz cuadrada de cada lado de la última ecuación, y aplicamos $d(P_1, P_2) \geq 0$ y llegamos a la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos están en la misma línea horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma línea vertical y

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Éstos son casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aun cuando nos referimos a los puntos mostrados en la figura 3, nuestra prueba es independiente de la posición de P_1 y P_2.

www.elsolucionario.net

Cuando apliques la fórmula de la distancia, notarás que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$; por lo tanto, no importa el orden en que restes las coordenadas x y las y de los puntos. Cabe considerar la distancia entre dos puntos como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 1 *Localización de la distancia entre puntos*

Localiza los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$ y encuentra la distancia $d(A, B)$.

Solución Los puntos están en la figura 4. Por la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5-(-3)]^2 + (1-6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43. \end{aligned}$$

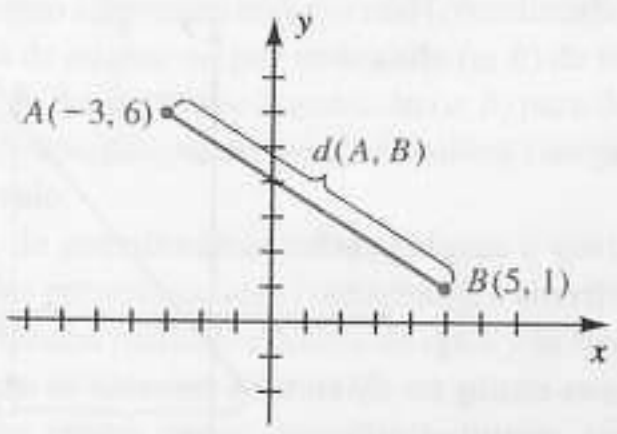


FIGURA 4

EJEMPLO 2 *Demostración de que un triángulo es triángulo rectángulo*

a) Localiza $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$, y prueba que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.
b) Encuentra el área del triángulo ABC.

Solución **a)** Los puntos se localizan en la figura 5. Por geometría, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia,

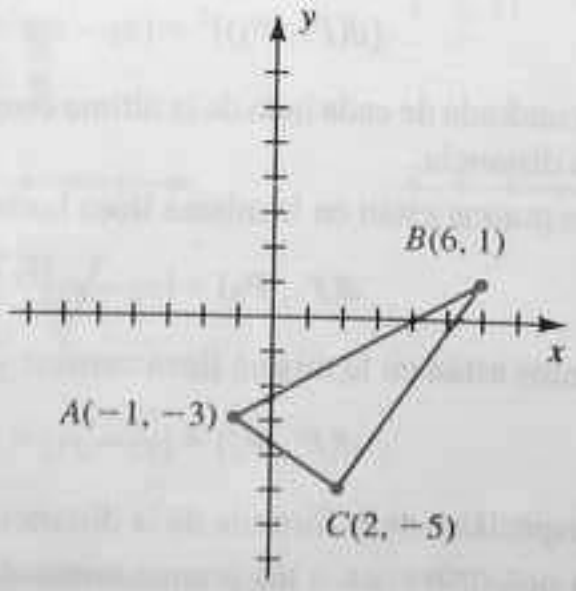


FIGURA 5

www.elsolucionario.net

$$d(A, B) = \sqrt{(6+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$
$$d(B, C) = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(2+1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

En virtud de que $d(A, B) = \sqrt{65}$ es el mayor de los tres valores, la condición por satisfacer es

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2.$$

Al sustituir los valores encontrados con la fórmula de la distancia, obtenemos

$$[d(A, B)]^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$$

y

$$[d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65.$$

Por lo tanto, el triángulo es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB.

b) El área de un triángulo con base b y altura h es $\frac{1}{2}bh$. A partir de la figura 5,

$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \qquad \text{y} \qquad h = d(A, C) = \sqrt{13}.$$

Así pues el área del triángulo ABC es

$$\tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\sqrt{52}\,\sqrt{13} = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\,\sqrt{13} = 13.$$

EJEMPLO 3 *Aplicación de la fórmula de la distancia*

Dados $A(1, 7)$, $B(-3, 2)$ y $C\left(4, \frac{1}{2}\right)$, demuestra que C está en la mediatriz o bisectriz perpendicular del segmento AB.

Solución Los puntos A, B y C y la *mediatriz* l se presentan en la figura 6. Por geometría plana, cualquiera de estas condiciones caracteriza a l:

(1) l es la línea perpendicular al segmento AB en su punto medio.

(2) l es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos extremos del segmento AB.

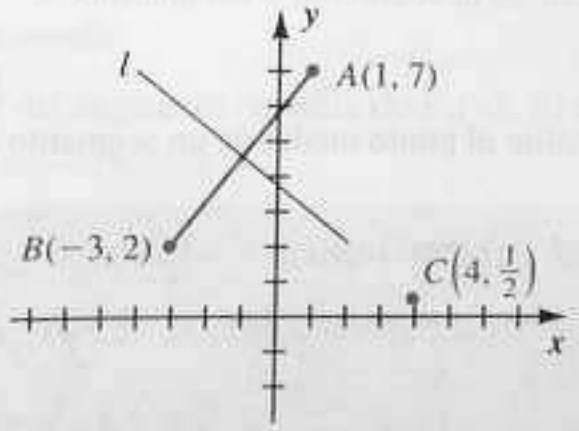


FIGURA 6

Con la condición (2) demostraremos que C está en l al comprobar que

$$d(A, C) = d(B, C).$$

www.elsolucionario

Aplicamos la fórmula de la distancia:

$$d(A, C) = \sqrt{(4-1)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 7\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(-\tfrac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{169}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

$$d(B, C) = \sqrt{[4-(-3)]^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{7^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{49 + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

Por lo tanto, C es equidistante de A y B, y la verificación está completa.

EJEMPLO 4 *Determinación de una fórmula que describa a una mediatriz*

Dados $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$, encuentra una fórmula que indique que un punto arbitrario $P(x, y)$ está en la mediatriz l del segmento AB.

Solución Por la condición (2) del ejemplo 3, $P(x, y)$ está en l si y sólo si $d(A, P) = d(B, P)$; esto es,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2}.$$

Para obtener una fórmula más sencilla, elevemos al cuadrado ambos lados y simplifiquemos términos de la ecuación resultante:

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = [x-(-3)]^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$-2x + 1 - 14y + 49 = 6x + 9 - 4y + 4$$

$$-8x - 10y = -37$$

$$8x + 10y = 37$$

En particular, nota que la última fórmula es verdadera para las coordenadas del punto $C\left(4, \tfrac{1}{2}\right)$ del ejemplo 3, ya que si $x = 4$ y $y = \tfrac{1}{2}$, la sustitución en $8x + 10y$ dará

$$8 \cdot 4 + 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 37.$$

En el ejemplo 9 de la sección 3.3 hallaremos la fórmula correspondiente a la mediatriz de un segmento, a partir de la condición 1 del ejemplo 3.

Podemos hallar el punto medio de un segmento de recta con esta fórmula.

Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

PRUEBA Las rectas que pasan por P_1 y P_2 paralelas al eje y cortan al eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. Por geometría plana, la recta que cruza por el punto medio M paralela al eje y bisecta al segmento A_1A_2 en el punto M_1 (Fig. 7). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por lo tanto, $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$.

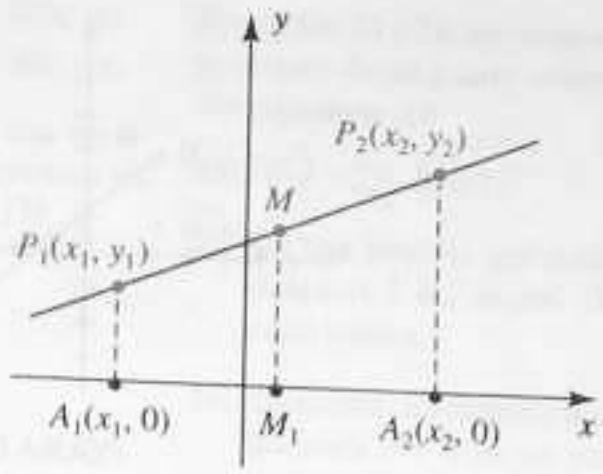


FIGURA 7

Puesto que M_1 está a la mitad entre A_1 y A_2, la coordenada x de M_1 es igual a la coordenada x de A_1, más la mitad de la distancia de A_1 a A_2; esto es,

$$\text{la coordenada } x \text{ de } M_1 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

La expresión del lado derecho de la última ecuación se simplifica a

$$\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Este cociente es el *promedio* de los números x_1 y x_2. Se deduce que la coordenada x de M es también $(x_1 + x_2)/2$. En forma análoga, la coordenada y de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas se cumplen para todas las posiciones de P_1 y P_2.

En la aplicación de la fórmula del punto medio, basta recordar que

$$\text{la coordenada } x \text{ del punto medio} = \textit{promedio} \text{ de las coordenadas } x$$

y que

$$\text{la coordenada } y \text{ del punto medio} = \textit{promedio} \text{ de las coordenadas } y$$

EJEMPLO 5 *Determinación de un punto medio*

Encuentra el punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$, y comprueba que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

Solución Por la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right), \quad \text{o} \quad \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Los tres puntos P_1, P_2 y M se localizan en la figura 8. Por la fórmula de la distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1+2)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}.$$

Así pues, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

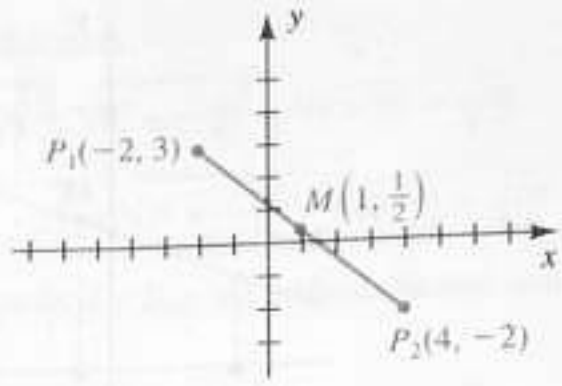


FIGURA 8

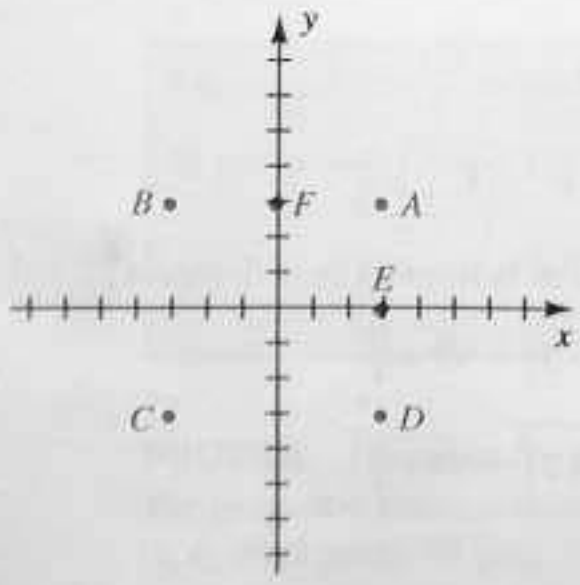
El término **graficador** se refiere a una calculadora graficadora o a una computadora con el software adecuado. La **pantalla (o rectángulo de visión)** de una graficadora es la porción del plano xy que se visualiza. Las fronteras (lados) de la pantalla se ajustan manualmente asignando valores máximos y mínimos a x y y (Xmáx), (Xmín), (Ymáx) y (Ymín). En los ejemplos solemos optar por los valores estándares (predeterminados, predefinidos o "por omisión"), que dependen de las dimensiones (medidas en pixeles) de la pantalla de la graficadora. Si deseamos otra vista de la gráfica, usaremos la frase "emplea [Xmín, Xmáx] por [Ymín, Ymáx]" para indicar la modificación de la pantalla.

3.1 EJERCICIOS

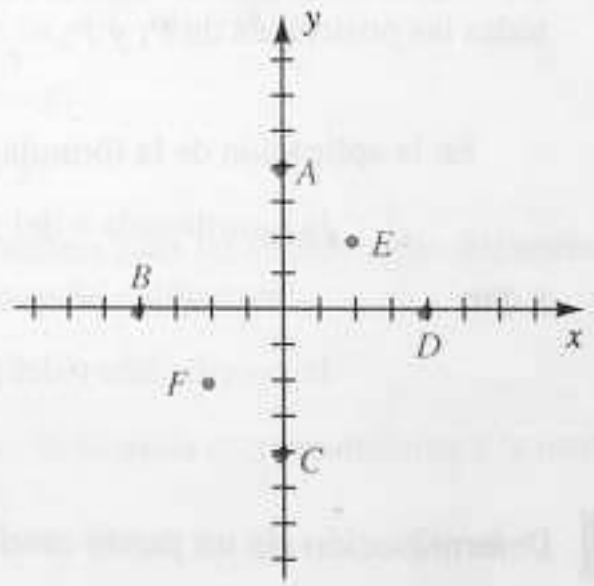
1. Grafica los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$ en un plano coordenado.
2. Localiza los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$, y $E(2, -3)$ en un plano coordenado. Dibuja los segmentos de recta AB, BC, CD, DE y EA.
3. Ubica los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$ y $E(-2, -2)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a), donde a es un número real.
4. Encuentra los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$ y $E(-3, 3)$. Describe el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, donde a es un número real.

Ejercicios 5 y 6: halla las coordenadas de los puntos A al F.

5.



6.



Ejercicios 7 y 8: describe el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en un plano coordenado que satisfaga la condición dada.

7. **a)** $x = -2$ **b)** $y = 3$ **c)** $x \geq 0$
   d) $xy > 0$ **e)** $y < 0$ **f)** $x = 0$
8. **a)** $y = -2$ **b)** $x = -4$ **c)** $x/y < 0$
   d) $xy = 0$ **e)** $y > 1$ **f)** $y = 0$

Ejercicios 9 al 14: a) encuentra la distancia $d(A, B)$ entre A y B. b) Halla el punto medio del segmento AB.

9. $A(4, -3)$, $B(6, 2)$ **10.** $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$

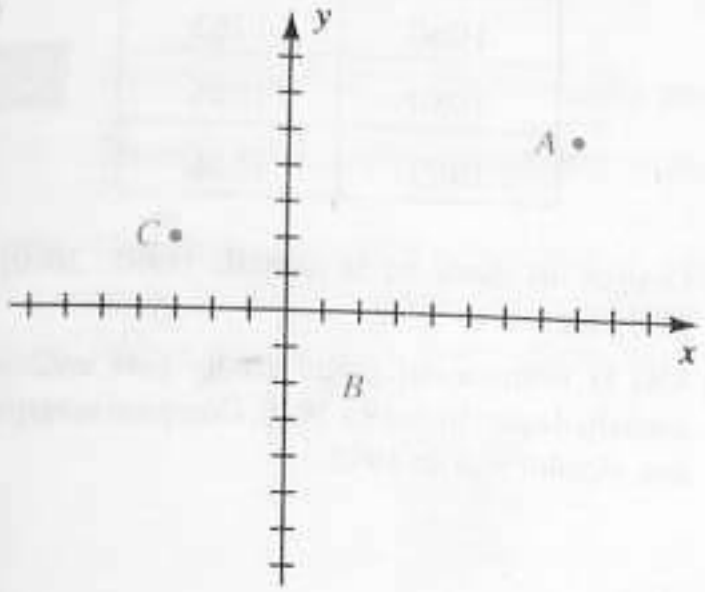
www.elsolucionario.net

11. $A(-5, 0)$, $B(-2, -2)$ **12.** $A(6, 2)$, $B(6, -2)$

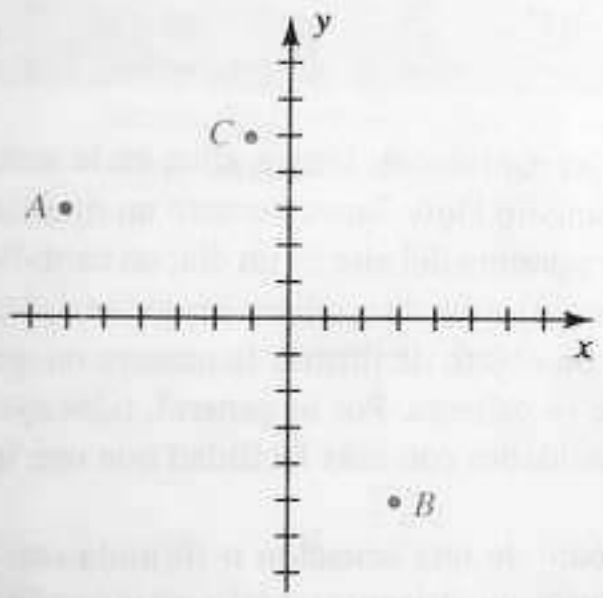
13. $A(7, -3)$, $B(3, -3)$ **14.** $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

Ejercicios 15 y 16: demuestra que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo y encuentra su área.

15.



16.



17. Demuestra que $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(-2, -3)$ son vértices de un cuadrado.

18. Prueba que $A(-4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$ y $D(2, 2)$ son vértices de un paralelogramo.

19. Dado $A(-3, 8)$, encuentra las coordenadas del punto B tal que $C(5, -10)$ es el punto medio del segmento AB.

20. Dados $A(5, -8)$ y $B(-6, 2)$, halla el punto del segmento AB que se localice a tres cuartas partes del recorrido de A a B.

Ejercicios 21 y 22: demuestra que C está en la mediatriz del segmento AB.

21. $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$, $C(5, -11)$

22. $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$, $C(7, 7)$

Ejercicios 23 y 24: encuentra una fórmula que exprese la presencia de un punto arbitrario $P(x, y)$ en la mediatriz l del segmento AB.

23. $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$ **24.** $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

25. Da una fórmula que manifieste que $P(x, y)$ está a una distancia 5 del origen. Describe el conjunto de todos estos puntos.

26. Encuentra una fórmula que exprese que $P(x, y)$ está a una distancia $r > 0$ de un punto fijo $C(h, k)$. Describe el conjunto de todos estos puntos.

27. Halla todos los puntos del eje y que estén a una distancia 6 de $P(5, 3)$.

28. Localiza todos los puntos del eje x que estén a una distancia 5 de $P(-2, 4)$.

29. Encuentra el punto con coordenadas de la forma $(2a, a)$ localizado en el tercer cuadrante y a una distancia 5 de $P(1, 3)$

30. Encuentra todos los puntos con coordenadas de la forma (a, a) ubicados a una distancia 3 de $P(-2, 1)$.

31. ¿Para cuáles valores de a la distancia entre $P(a, 3)$ y $Q(5, 2a)$ es mayor que $\sqrt{26}$?

32. Dados $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$, encuentra una fórmula que no contenga radicales y que manifieste que la suma de las distancias de $P(x, y)$ a A y a B, respectivamente, es 5.

33. Prueba que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es equidistante de los vértices. [*Sugerencia:* marca los vértices del triángulo como $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.]

34. Demuestra que las diagonales de cualquier paralelogramo se cortan entre sí. [*Sugerencia:* señala tres de los vértices del paralelogramo como $O(0, 0)$, $A(a, b)$ y $C(0, c)$.]

C **Ejercicios 35 y 36: localiza los puntos en la pantalla dada.**

35. $A(-5, -3.5)$, $B(-2, 2)$, $C(1, 0.5)$, $D(4, 1)$ y $E(7, 2.5)$ en $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$.

36. $A(-10, 4)$, $B(-7, -1.1)$, $C(0, -6)$, $D(3, -5.1)$ y $E(9, 2.1)$ en $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$.

C **37. Abonados a cable** La tabla que sigue especifica la cantidad de abonados básicos y de pago de 1990 a 1994. Algunas secuencias concretas de tecleo para la graficadora TI-82 se dan en el ejemplo 2 del apéndice I.

www.elsolucionario.net

Año	Abonados
1990	54 871 330
1991	55 786 390
1992	57 211 600
1993	58 834 440
1994	59 332 200

a) Gráfica los datos en la pantalla [1988, 1996] por $[54 \times 10^6, 61 \times 10^6]$.

b) Analiza la forma en que el número de abonados está cambiando.

38. Periódicos publicados La tabla adjunta indica el número de diarios publicados en Estados Unidos para varios años.

Año	Periódicos
1900	2226
1920	2042
1940	1878
1960	1763
1980	1745
1993	1556

a) Grafica los datos en la pantalla [1895, 2000] por [0, 3000].

b) Usa la fórmula del punto medio para calcular el número de periódicos en 1930. Compara tu respuesta con el valor real de 1942.

3.2 Gráficas de ecuaciones

Con frecuencia, las gráficas ilustran las variaciones en las cantidades. Una gráfica en la sección financiera de un periódico exhibe la fluctuación del promedio Dow-Jones durante un mes dado; un meteorólogo las usa para indicar los cambios de la temperatura del aire en un día; un cardiólogo las emplea (en este caso se denominan electrocardiogramas) a fin de analizar irregularidades en el ritmo cardiaco; un ingeniero o físico recurre a ellas con objeto de ilustrar la manera en que la presión de un gas confinado aumenta a medida que éste se calienta. Por lo general, tales ayudas visuales permiten apreciar el comportamiento de las cantidades con más facilidad que una larga tabla de valores numéricos.

En ocasiones dos cantidades se relacionan por medio de una ecuación o fórmula con dos variables. En esta sección analizaremos cómo representar geométricamente tal ecuación con una gráfica en un plano coordenado. A continuación la gráfica puede servir para descubrir propiedades de las cantidades que no eran evidentes en la simple ecuación. La próxima tabla introduce el concepto gráfico de la gráfica de una ecuación con las variables x y y; también son válidas otras letras.

Terminología	Definición	Ejemplo
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado (a, b) que lleva a una expresión verdadera si $x = a$ y $y = b$	$(2, 3)$ es una solución de $y^2 = 5x - 1$, ya que al sustituir $x = 2$ y $y = 3$ resulta LI: $3^2 = 9$ LD: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$

Cada solución (a, b) de una ecuación en x y y tiene un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos estos números es la **gráfica** de la ecuación. Para *trazar la gráfica de*

www.elsolucionario.net

una ecuación, ilustramos las características relevantes de la gráfica en un plano coordenado. En casos sencillos se traza localizando unos cuantos puntos, si los hay. Con una ecuación complicada, la ubicación de puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En tales casos, conviene utilizar métodos de cálculo o gráficas de computadora. Comencemos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 *Trazado de una gráfica sencilla por localización de puntos*

Traza la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

Solución Deseamos encontrar los puntos (x, y) de un plano coordenado que correspondan a las soluciones de la ecuación. Es útil anotar las coordenadas de varios de tales puntos en una tabla, donde para cada x obtenemos el valor para y de $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Es evidente que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una recta, por lo que trazamos la gráfica de la figura 9. Ahora bien, los pocos puntos localizados no serían suficientes en términos generales para ilustrar la gráfica de una ecuación, pero en este caso elemental podemos estar razonablemente seguros de que la gráfica es una recta. En la sección que viene estableceremos este hecho.

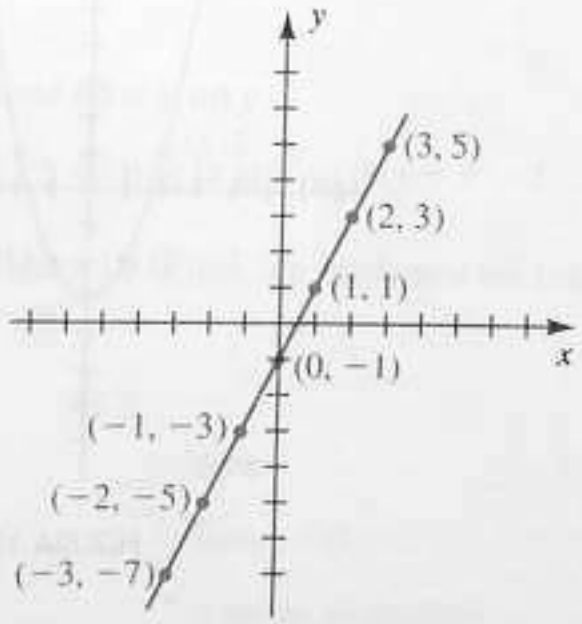


FIGURA 9

Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo 1 pues se pueden asignar valores a x numéricamente tan grandes como se desee. Por otro lado, llamamos *gráfica de la ecuación* o *dibujo de la gráfica* al dibujo de la figura 9. En general, el trazo de una gráfica ha de ilustrar sus características esenciales, de manera que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes. Si una gráfica termina en algún punto (como sería el caso para un segmento de recta o semirrecta), se pone un punto en el *punto extremo* apropiado de la gráfica. A manera de observación final, *si no se marcan divisiones en los ejes coordenados* (Fig. 9), *cada división representa una unidad.*

www.elsolucionario.net

Marcaremos divisiones sólo cuando se usen distintas unidades en los ejes. Para gráficas *arbitrarias*, donde las unidades de medida no tienen importancia, se omiten las divisiones (ve Figs. 13 y 14).

EJEMPLO 2 *Trazado de la gráfica de una ecuación*

Dibuja la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

Solución Al sustituir los valores de x y hallar los valores correspondientes de y con $y = x^2 - 3$, llegamos a una tabla de coordenadas para varios puntos de la gráfica:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	1	−2	−3	−2	1	6

Los valores más grandes de $|x|$ producen valores más grandes de y; por ejemplo, los puntos (4, 13) (5, 22) y (6, 33) están en la gráfica, al igual que (−4, 13), (−5, 22) y (−6, 33). Localizar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva suave que pase por estos puntos (en orden creciente de valores de x) nos da el trazo de la figura 10.

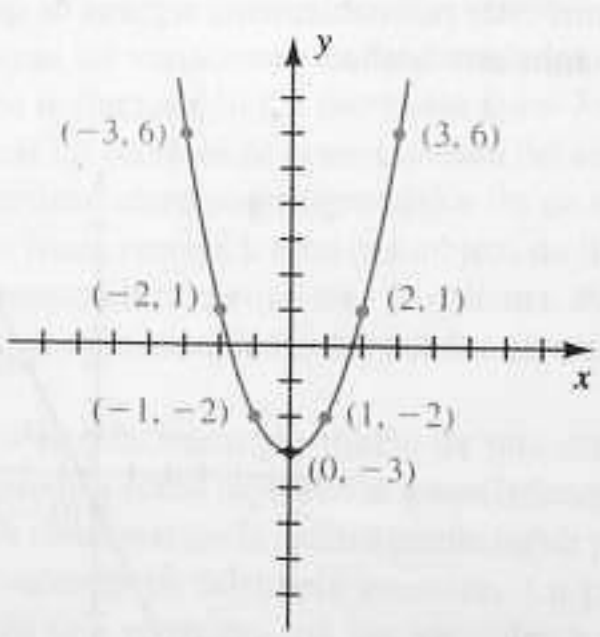


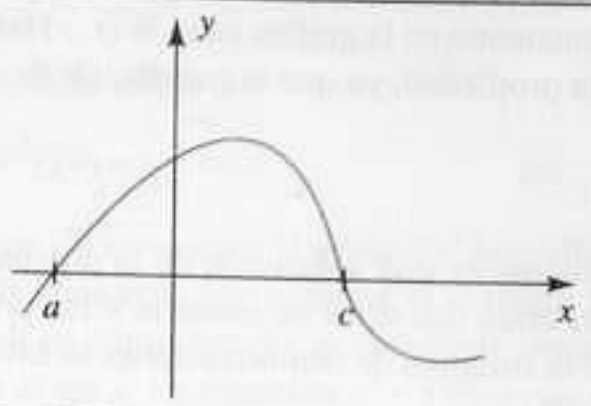
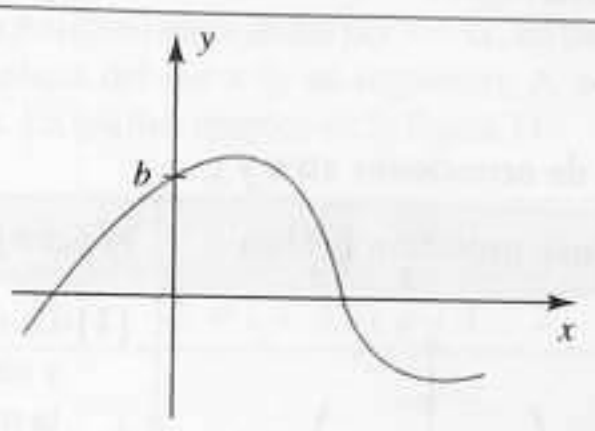
FIGURA 10

La gráfica de la figura 10 es una **parábola**, y el eje y es el **eje de la parábola**. El punto más bajo (0, −3) es el **vértice** de la parábola y decimos que la parábola **abre hacia arriba**. Si invertimos la gráfica, la parábola **abre hacia abajo** y el vértice es el punto más alto de la gráfica. En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma $y = ax^2 + c$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice $(0, c)$, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$ y el vértice está en el origen (0, 0). Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda (ve el Ejem. 4) o en otras direcciones.

La terminología que sigue nos servirá para describir en dónde la gráfica de una ecuación en x y y corta al eje de las x o al eje de las y.

www.elsolucionario.net

Intersecciones de la gráfica de una ecuación en x y y

Terminología	Definición	Interpretación gráfica	Cómo hallar
intersecciones en x	Coordenadas x de los puntos donde la gráfica corta al eje x		Hacer $y = 0$ y despejar x
intersecciones en y	Coordenadas y de los puntos donde la gráfica corta al eje y		Hacer $x = 0$ y despejar y

Una intersección x se conoce a veces como *cero* de la gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación. Cuando utilicemos una graficadora a fin de hallar una intersección x, diremos que usamos una *función raíz*.

EJEMPLO 3 *Determinación de intersecciones en x y en y*

Encuentra las intersecciones en x y en y de la gráfica de $y = x^2 - 3$.

Solución La gráfica está dibujada en la figura 10 (Ejem. 2). Hallamos las intersecciones según se expone en la tabla anterior.

(1) *intersecciones en x:*

$y = x^2 - 3$	dado
$0 = x^2 - 3$	hacer $y = 0$
$x^2 = 3$	ecuación equivalente
$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$	tomar la raíz cuadrada

Por lo tanto, las intersecciones en x son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Los puntos en que la gráfica cruza el eje x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

(2) *intersecciones en y:*

$y = x^2 - 3$	dado
$y = 0 - 3 = -3$	hacer $x = 0$

Así pues, la intersección en y es -3, y el punto en que la gráfica cruza al eje y es $(0, -3)$.

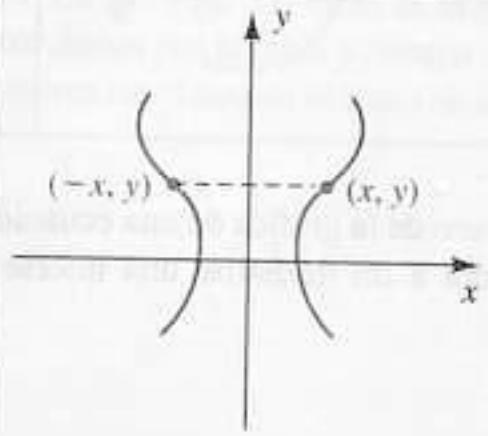
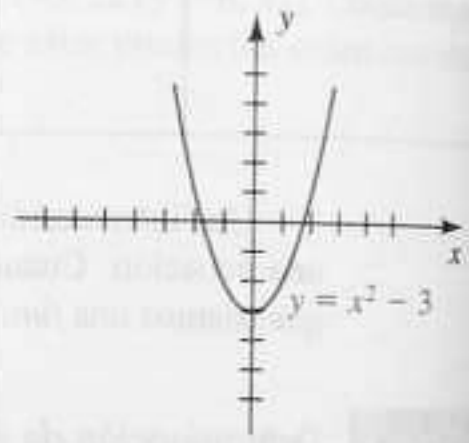
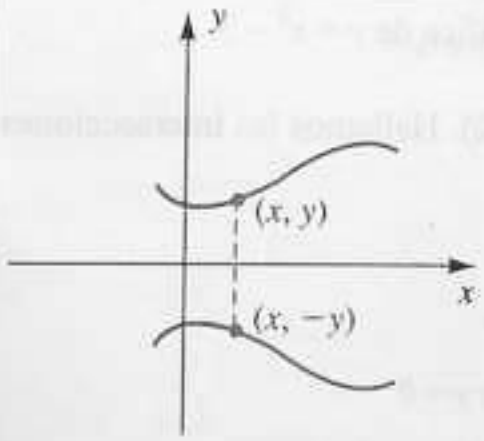
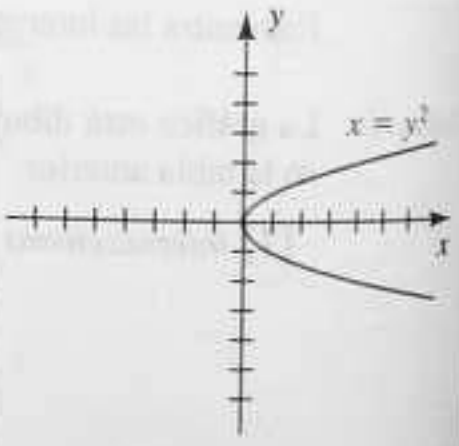
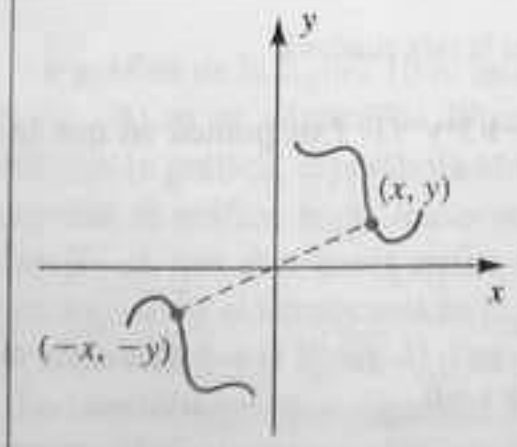
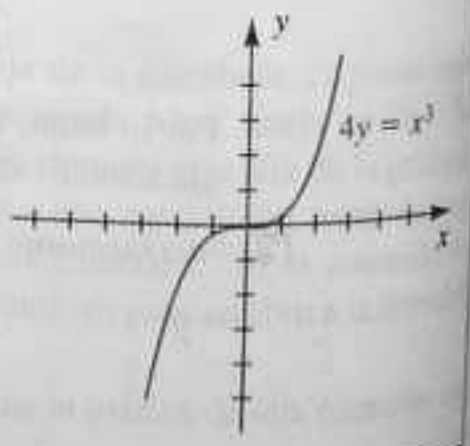
www.elsolucionario.net

Si el plano coordenado de la figura 10 se dobla a lo largo del eje y, la gráfica que queda en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha, y decimos que **la gráfica es simétrica con respecto al eje y**. Una gráfica es simétrica con respecto al eje y siempre que el punto $(-x, y)$ se encuentre en la gráfica cuando (x, y) también lo esté. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo 2 tiene esta propiedad, ya que la sustitución de $-x$ por x da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

Esta sustitución es una aplicación de la prueba de simetría (1) de la próxima tabla; también se mencionan otros dos tipos de simetría y las pruebas correspondientes. Las gráficas de $x = y^2$ y $4y = x^3$ de la columna de demostraciones se estudian en los ejemplos 4 y 5, respectivamente.

Simetrías de gráficas de ecuaciones en x y y

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba para simetría	Ejemplo
La gráfica es simétrica con respecto al eje y		**(1)** La sustitución de x con $-x$ lleva a la misma ecuación	
La gráfica es simétrica con respecto al eje x		**(2)** La sustitución de y con $-y$ lleva a la misma ecuación	
La gráfica es simétrica con respecto al origen		**(3)** La sustitución simultánea de x con $-x$ y y con $-y$ lleva a la misma ecuación.	

www.elsolucionario.net

Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, basta determinar la gráfica en la mitad del plano coordenado, ya que el resto se puede trazar tomando una *imagen espejo*, o *reflexión*, en el eje apropiado.

EJEMPLO 4 *Una gráfica simétrica con respecto al eje x*

Traza la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

Solución Puesto que la sustitución de y con $-y$ no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x (consulta la prueba 2 de simetría); por lo tanto, si el punto (x, y) se halla en la gráfica, también lo estará el punto $(x, -y)$; en consecuencia, es suficiente ubicar puntos con coordenadas y no negativas y luego reflejar en el eje x. La ecuación $y^2 = x$ equivale a $y = \pm\sqrt{x}$. Las coordenadas y de puntos *arriba* del eje x (y es *positiva*) están dadas por $y = \sqrt{x}$, en tanto que $y = -\sqrt{x}$ proporciona las coordenadas y de puntos *abajo* del eje x (y es *negativa*). A continuación se detallan las coordenadas de algunos puntos. La gráfica aparece en la figura 11.

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

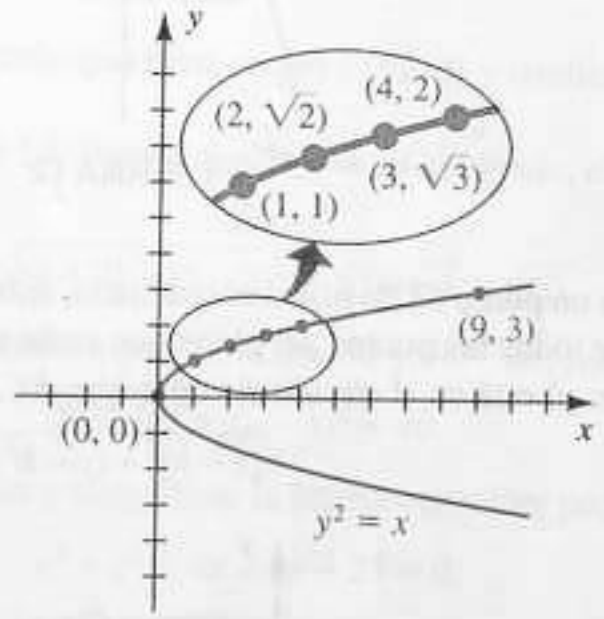


FIGURA 11

La gráfica es una parábola que abre a la derecha, con su vértice en el origen. En este caso, el eje x es el eje de la parábola.

EJEMPLO 5 *Una gráfica simétrica con respecto al origen*

Traza la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

Solución Si en forma simultánea sustituimos x con $-x$ y y con $-y$, entonces

$$4(-y) = (-x)^3 \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad -4y = -x^3.$$

Al multiplicar ambos lados por -1, vemos que la última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$; por lo tanto, por la prueba (3) de simetría, la gráfica es simétrica con respecto

www.elsolucionario.net

al origen, y si el punto (x, y) se encuentra en la gráfica, también el punto $(-x, -y)$ lo está. La próxima tabla lista las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Debido a la simetría, podemos ver que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, etc., también pertenecen a la gráfica, la cual aparece en la figura 12.

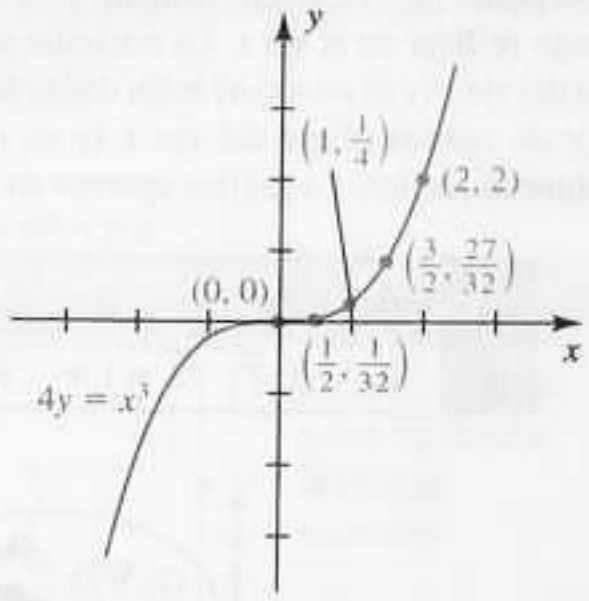


FIGURA 12

Si $C(h, k)$ es un punto de un plano coordenado, entonces un círculo con centro C y radio $r > 0$ está formado por todos los puntos del plano que están a r unidades de C. Según se ve en la figura 13, un punto $P(x, y)$ está en el círculo siempre que $d(C, P) = r$ o, por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k^2)} = r.$$

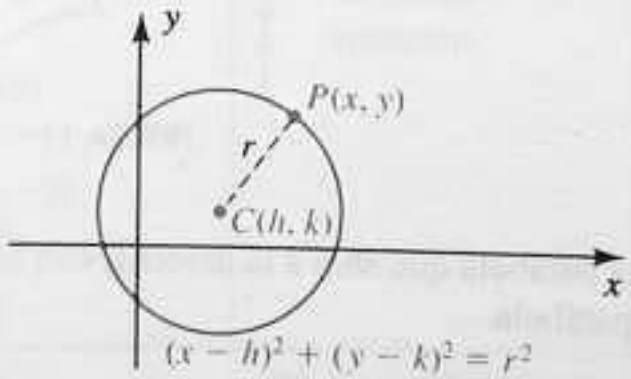


FIGURA 13

La ecuación anterior equivale a la siguiente expresión, que se conoce como **ecuación estándar de un círculo**:

Ecuación estándar de un círculo con centro (h, k) y radio r.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

www.elsolucionario.net

Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen (Fig. 14). Si $r = 1$, la gráfica es un **círculo unitario.**

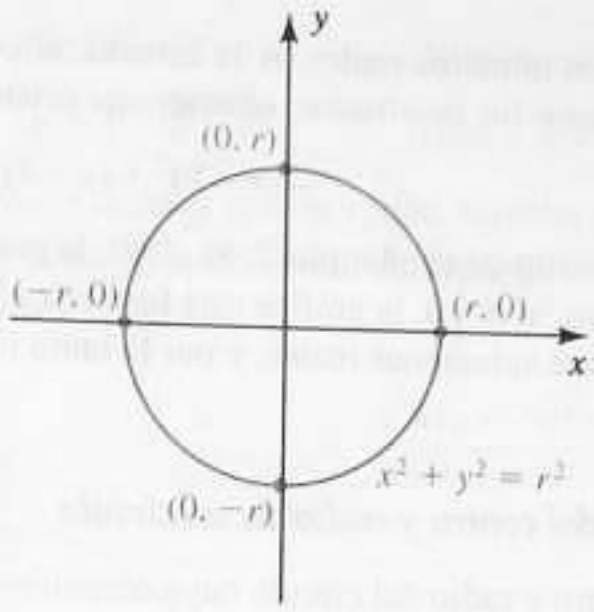


FIGURA 14

EJEMPLO 6 *Determinación de la ecuación de un círculo*

Encuentra la ecuación de un círculo que tiene centro $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

Solución El círculo se exhibe en la figura 15. Puesto que D está en el círculo, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Con la ecuación estándar de un círculo con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

Al elevar al cuadrado los términos y simplificar la última ecuación, podemos escribirla

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$

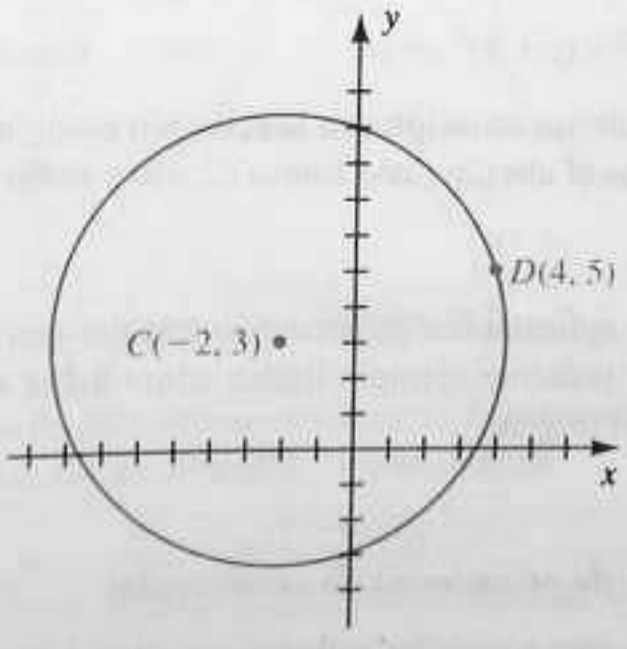


FIGURA 15

www.elsolucionario.net

Al igual que en la solución al ejemplo 6, elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y simplificar lleva a una ecuación del tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

donde a, b y c son números reales. A la inversa, si comenzamos con esta ecuación siempre es posible, al *completar los cuadrados*, obtener una ecuación de la forma

$$(x-h)^2+(y-k)^2=d.$$

Este método se ilustra en el ejemplo 7. Si $d>0$, la gráfica es un círculo con centro (h, k) y radio $r=\sqrt{d}$. Ahora bien, si $d=0$, la gráfica está formada sólo por el punto (h, k). Por último, si $d<0$, la ecuación no tiene soluciones reales, y por lo tanto no hay gráfica.

EJEMPLO 7 *Determinación del centro y radio de un círculo*

Encuentra el centro y radio del círculo cuya ecuación es

$$3x^2+3y^2-12x+18y=9.$$

Solución En vista de que es más fácil completar el cuadrado si los coeficientes de x^2 y y^2 son 1, comencemos dividiendo la ecuación dada entre 3:

$$x^2+y^2-4x+6y=3.$$

En seguida reescribimos la ecuación como sigue (los espacios subrayados representan números por determinar):

$$(x^2-4x+_)+(y^2+6y+_)=3+_+_.$$

Luego completamos los cuadrados para las expresiones dentro de paréntesis, cuidando de sumar los números adecuados a *ambos* lados de la ecuación. A fin de completar el cuadrado para una expresión de la forma x^2+ax, añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (esto es, $(a/2)^2$) a ambos lados de la ecuación. Del mismo modo, para y^2+by, sumamos $(b/2)^2$ a ambos lados. En este ejemplo, $a=-4$, $b=6$, $(a/2)^2=(-2)^2=4$ y $(b/2)^2=3^2=9$. Estas operaciones llevan a

$$(x^2-4x+\underline{4})+(y^2+6y+\underline{9})=3+\underline{4}+\underline{9} \qquad \text{completando los cuadrados}$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16. \qquad \text{ecuación equivalente}$$

Al comparar la última ecuación con la ecuación estándar de un círculo, vemos que $h=2$ y $k=-3$ y concluimos que el círculo tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16}=4$.

En algunas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de un círculo; es decir, un **semicírculo**. El próximo ejemplo indica cómo hallar ecuaciones para semicírculos de círculos con centros en el origen.

EJEMPLO 8 *Determinación de ecuaciones de semicírculos*

Encuentra ecuaciones para las mitades superior, inferior, derecha e izquierda del círculo $x^2+y^2=81$.

www.elsolucionario.net

Solución La gráfica de $x^2 + y^2 = 81$ es un círculo de radio 9 con centro en el origen (compara con la Fig. 14). Despejamos y en términos de x con objeto de hallar ecuaciones para las mitades superior e inferior

$$x^2 + y^2 = 81 \qquad \text{dados}$$

$$y^2 = 81 - x^2 \qquad \text{restar } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{81 - x^2} \qquad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

Puesto que $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, se deduce que la mitad superior del círculo tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ (y es positiva) y la mitad inferior está dada por $y = -\sqrt{81 - x^2}$ (y es negativa), según se ilustra en la figura 16a) y b).

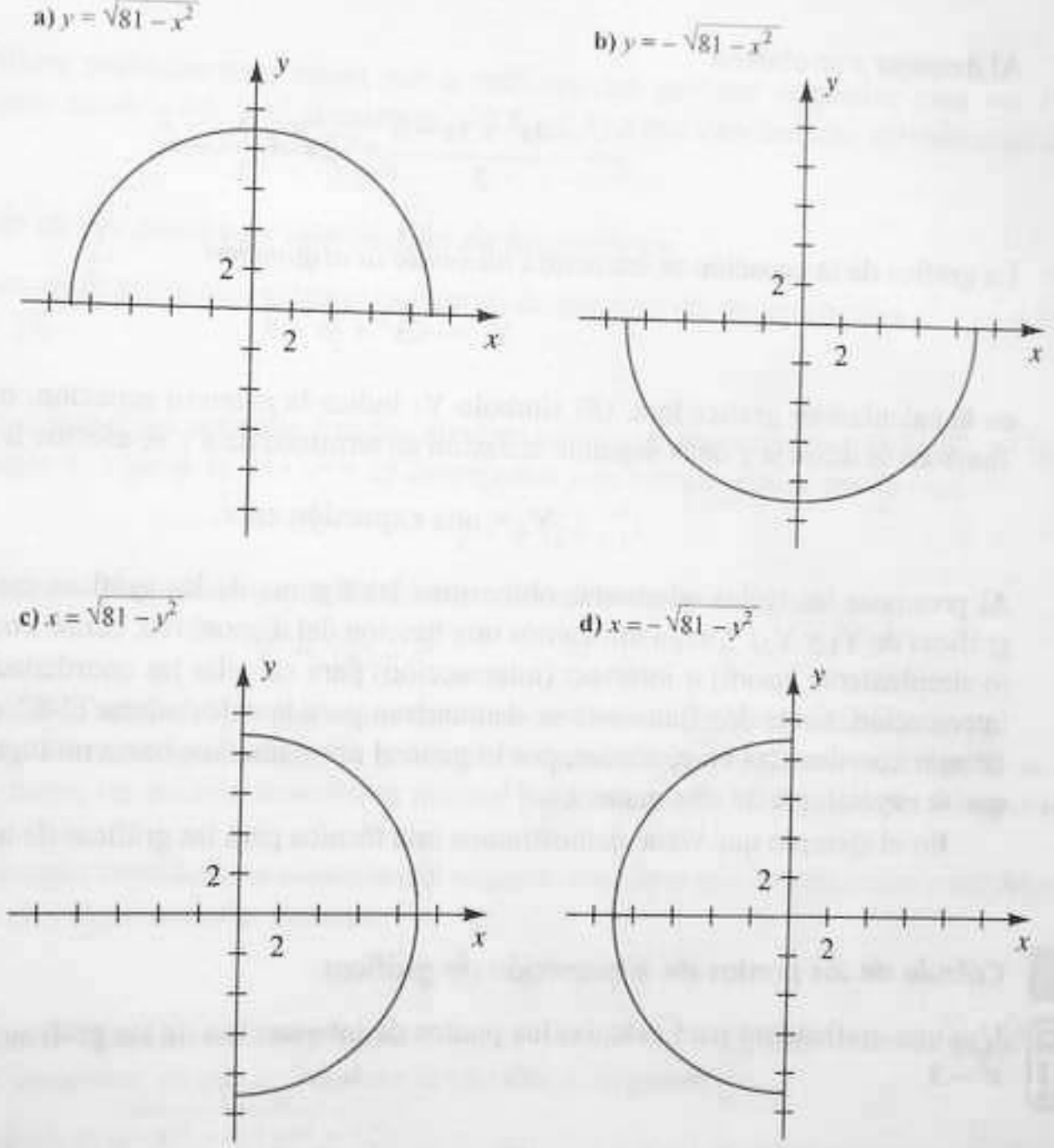


FIGURA 16

Del mismo modo, a fin de hallar ecuaciones para las mitades derecha e izquierda, se despeja x en términos de y de la ecuación $x^2 + y^2 = 81$ y se obtiene

$$x = \pm\sqrt{81 - y^2}.$$

Dado que $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, se deduce que la mitad derecha del círculo tiene la ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$ (x es positiva) y la mitad izquierda está dada por $x = -\sqrt{81 - y^2}$ (x es negativa), como se aprecia en la figura 16 c) y d).

www.elsolucionario.net

A menudo, ingenieros, científicos y matemáticos usan calculadoras graficadoras o programas de computadora para obtener figuras de gráficas. Estos equipos tienen la capacidad de acercar (zoom in) o alejar (zoom out) cualquier parte de una gráfica, permitiendo al *usuario* calcular las intersecciones en x y y, puntos altos, puntos bajos y otros aspectos importantes de la gráfica. Debido a la gran variedad de dispositivos y programas, no trataremos un tipo específico; los manuales del usuario por lo general dan instrucciones adecuadas.

En muchas aplicaciones prácticas, es esencial hallar los puntos en que se cortan las gráficas de dos ecuaciones en x y y. Para calcularlos con una graficadora, con frecuencia es necesario despejar y de cada ecuación en términos de x; por ejemplo, supón que una ecuación es

$$4x^2 - 3x + 2y + 6 = 0.$$

Al despejar y se obtiene

$$y = \frac{-4x^2 + 3x - 6}{2} = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3.$$

La gráfica de la ecuación se encuentra *haciendo la asignación*

$$Y_1 = -2x^2 + \tfrac{3}{2}x - 3$$

en la calculadora graficadora. (El símbolo Y_1 indica la *primera* ecuación, o el primer valor y). También se despeja y de la segunda ecuación en términos de x y se efectúa la asignación

$$Y_2 = \text{una expresión en } x.$$

Al presionar las teclas adecuadas obtenemos las figuras de las gráficas que conocemos como gráficas de Y_1 y Y_2). Luego utilizamos una función del dispositivo, como zoom y trace (rastreo) (o simplemente zoom) o intersect (intersección) para calcular las coordenadas de los puntos de intersección. Estas dos funciones se demuestran para la calculadora TI-82 en el apéndice I. Al estimar coordenadas en ejemplos, por lo general aproximamos hasta un lugar decimal, a menos que se especifique de otra manera.

En el ejemplo que viene demostramos esta técnica para las gráficas de los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 9 *Cálculo de los puntos de intersección de gráficas*

Usa una graficadora para calcular los puntos de intersección de las gráficas de $y = 2x - 1$ y $y = x^2 - 3$.

Solución Algunas secuencias de tecleo específicas para la TI-82 se dan en el ejemplo 5 del apéndice I. Primero se establecen las asignaciones

$$Y_1 = 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad Y_2 = x^2 - 3.$$

Con una pantalla predefinida [−15, 15] por [−10, 10], vemos de las gráficas de Y_1 y Y_2 de la figura 17 que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el tercero.

En seguida movemos manualmente el cursor o usamos la función trace (para instrucciones específicas, consulta tu manual del usuario) con objeto de acercarnos a P_1. Calculamos las coordenadas de P_1 como (2.7, 4.5), mediante zoom o intersect.

www.elsolucionario.net

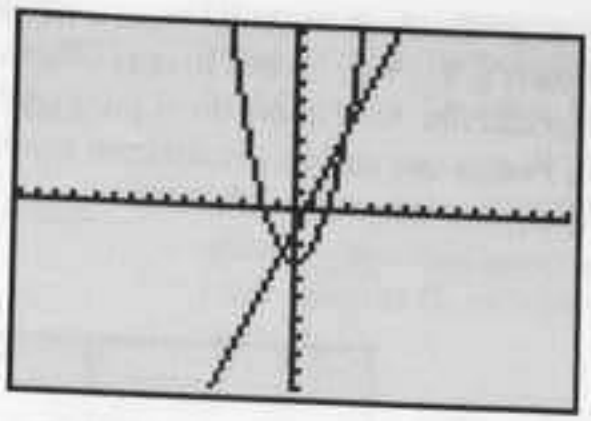


FIGURA 17 [–15, 15] por [–10, 10]

Ahora podemos usar zoom out o redibujar las gráficas originales para ver P_2. Con las funciones zoom o intersect obtenemos (–0.7, –2.5) como coordenadas aproximadas de P_2.

EJEMPLO 10 *Cálculo de los puntos de intersección de las gráficas*

Usa una graficadora para calcular los puntos de intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 4y = 12$.

Solución En el ejemplo 8 del apéndice I se dan algunas secuencias de tecleo para la TI-82. Al igual que en el ejemplo 9, a partir de $x^2 + y^2 = 25$ despejamos y en términos de x, con lo cual

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Para ver todo el círculo en la graficadora, realizamos algunas asignaciones:

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = -Y_1$$

(Es frecuente asignar Y_2 en términos de Y_1 para evitar un tecleo repetitivo.)

En este punto graficamos Y_1 y Y_2 en una pantalla predefinida o estándar. Si en lugar del círculo tienes un ovoide, consulta tu manual para redimensionar la pantalla y lograr una forma más circular.

Podemos considerar la ecuación del segundo círculo como una ecuación cuadrática $ay^2 + by + c = 0$ en y al reacomodar términos:

$$y^2 - 4y + (x^2 - 12) = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -4$ y $c = x^2 - 12$ (consideramos que $x^2 - 12$ es un término constante, ya que no contiene la variable y) llegamos a

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(x^2 - 12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(x^2 - 12)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - (x^2 - 12)}}{2} = 2 \pm \sqrt{16 - x^2}.$$

(No es necesario simplificar la ecuación hasta este punto, pero la forma simplificada es más fácil de teclear en la graficadora.)

Ahora efectuamos las asignaciones

$$Y_3 = \sqrt{16 - x^2}, \qquad Y_4 = 2 + Y_3 \qquad \text{y} \qquad Y_5 = 2 - Y_3.$$

www.elsolucionario.net

(Si no hay Y_5 en tu graficadora, consulta en tu manual cómo visualizar otras gráficas.) Seleccionamos para graficar Y_1, Y_2, Y_4 y Y_5 con lo cual obtenemos una imagen similar a la figura 18. Hay dos puntos de intersección. Con **zoom** en el punto del primer cuadrante, calculamos sus coordenadas (3.8, 3.25). Puesto que ambos círculos son simétricos con respecto al eje y, el otro punto de intersección es aproximadamente (−3.8, 3.25).

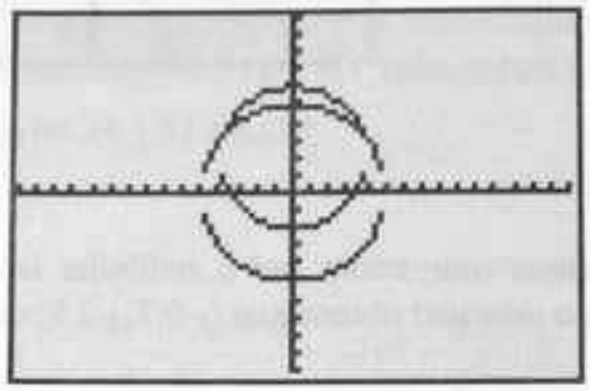


FIGURA 18 [−15, 15] por [−10, 10]

Ten presente que las soluciones aproximadas de los ejemplos 9 y 10 no satisfacen las ecuaciones dadas por la imprecisión de los cálculos hechos desde la gráfica. En un capítulo posterior estudiaremos la manera de hallar valores *exactos* para los puntos de intersección.

3.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 20: traza la gráfica de la ecuación y marca las intersecciones en x y y.

1. $y = 2x - 3$
2. $y = 3x + 2$
3. $y = -x + 1$
4. $y = -2x - 3$
5. $y = -4x^2$
6. $y = \frac{1}{3}x^2$
7. $y = 2x^2 - 1$
8. $y = -x^2 + 2$
9. $x = \frac{1}{4}y^2$
10. $x = -2y^2$
11. $x = -y^2 + 3$
12. $x = 2y^2 - 4$
13. $y = -\frac{1}{2}x^3$
14. $y = \frac{1}{2}x^3$
15. $y = x^3 - 8$
16. $y = -x^3 + 1$
17. $y = \sqrt{x}$
18. $y = \sqrt{-x}$
19. $y = \sqrt{x} - 4$
20. $y = \sqrt{x - 4}$

Ejercicios 21 y 22: utiliza pruebas de simetría para determinar qué gráficas en los ejercicios indicados son simétricas respecto de: a) el eje y; b) el eje x, y c) el origen.

21. Los ejercicios nones del 1 al 20
22. Los ejercicios pares del 1 al 20

Ejercicios 23 y 24: dibuja la gráfica del círculo o semicírculo.

23. $x^2 + y^2 = 11$
24. $x^2 + y^2 = 7$
25. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
26. $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$
27. $(x + 3)^2 + y^2 = 16$
28. $x^2 + (y - 2)^2 = 25$
29. $4x^2 + 4y^2 = 25$
30. $9x^2 + 9y^2 = 1$
31. $y = -\sqrt{16 - x^2}$
32. $y = \sqrt{4 - x^2}$
33. $x = \sqrt{9 - y^2}$
34. $x = -\sqrt{25 - y^2}$

Ejercicios 35 al 46: encuentra una ecuación del círculo que satisfaga las condiciones dadas.

35. Centro, $C(2, -3)$, radio 5
36. Centro, $C(-4, 1)$, radio 3
37. Centro, $C\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, radio $\sqrt{5}$
38. Centro, $C\left(\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}\right)$, radio $3\sqrt{2}$
39. Centro, $C(-4, 6)$, que pasa por $P(1, 2)$
40. Centro en el origen, que pasa por $P(4, -7)$

www.elsolucionario.net

41. Centro, $C(-3, 6)$, tangente al eje y

42. Centro, $C(4, -1)$, tangente al eje x

43. Tangente a ambos ejes, centro en el segundo cuadrante, radio 4

44. Tangente a ambos ejes, centro en el cuarto cuadrante, radio 3

45. Puntos extremos de un diámetro $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$

46. Puntos extremos de un diámetro $A(-5, 2)$ y $B(3, 6)$

Ejercicios 47 al 56: encuentra el centro y radio del círculo con la ecuación dada.

47. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

48. $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$

49. $x^2 + y^2 + 4y - 117 = 0$

50. $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

51. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$

52. $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

53. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

54. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

55. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 19 = 0$

56. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 16 = 0$

Ejercicios 57 al 60: halla ecuaciones para las mitades superior, inferior, derecha e izquierda del círculo.

57. $x^2 + y^2 = 36$

58. $(x + 3)^2 + y^2 = 64$

59. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49$

60. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

Ejercicios 61 y 62: indica si el punto P está dentro, fuera o en el círculo con centro C y radio r.

61. a) $P(2, 3)$, $C(4, 6)$, $r = 4$
    b) $P(4, 2)$, $C(1, -2)$, $r = 5$
    c) $P(-3, 5)$, $C(2, 1)$, $r = 6$

62. a) $P(3, 8)$, $C(-2, -4)$, $r = 13$
    b) $P(-2, 5)$, $C(3, 7)$, $r = 6$
    c) $P(1, -2)$, $C(6, -7)$, $r = 7$

Ejercicios 63 y 64: para el círculo dado, encuentra a) las intersecciones en x y b) las intersecciones en y.

63. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

64. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

65. Estructura una ecuación para el círculo que sea concéntrico con $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ y pase por $P(2, 6)$.

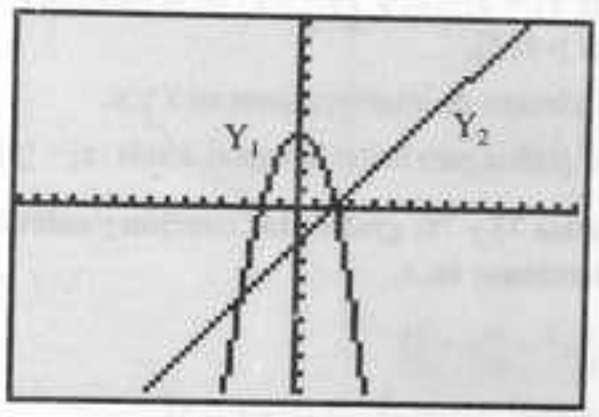
66. **Alcance de la transmisión por radio** La señal de una estación de radio tiene un alcance circular de 50 millas. Una segunda estación, ubicada a 100 millas al este y 80 millas al norte de la primera, cubre 80 millas. ¿Hay lugares que reciben ambas señales? Explica tu respuesta.

67. Un círculo C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Dentro de este círculo, en el primer cuadrante hay un círculo C_2 de radio 2 que es tangente a C_1. La coordenada y del centro de C_2 es 2. Encuentra la coordenada x del centro de C_2.

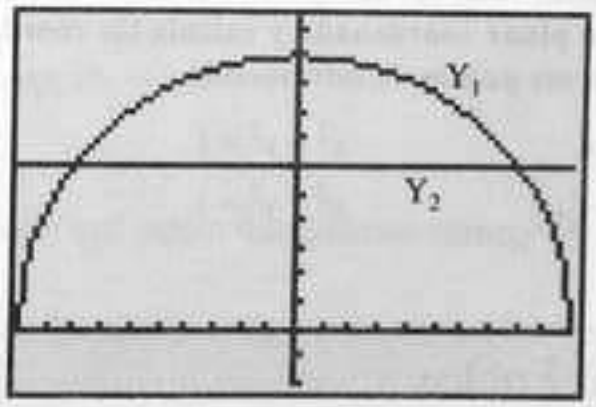
68. Un círculo de radio 5 tiene su centro en el origen. Fuera de este círculo, en el primer cuadrante hay un círculo C_2 de radio 2 tangente a C_1. La coordenada y del centro de C_2 es 3. Da la coordenada x del centro de C_2.

Ejercicios 69 al 72: la figura representa la pantalla de una graficadora, donde Y_1 y Y_2 son las asignaciones de valor y para dos ecuaciones en x. Expresa, en forma de intervalo, los valores x tales que $Y_1 < Y_2$ para la pantalla observada. Supón que los valores x y y de cada punto de intersección son enteros.

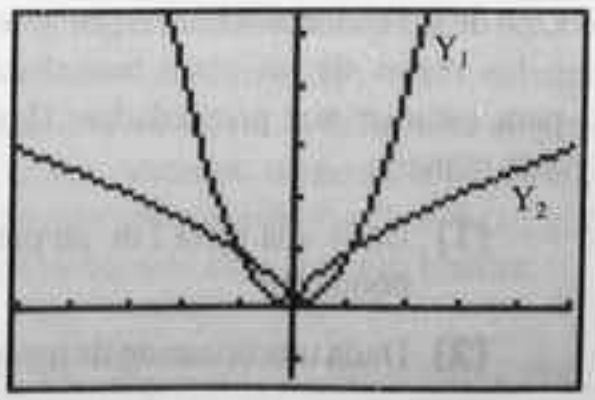
69.



70.

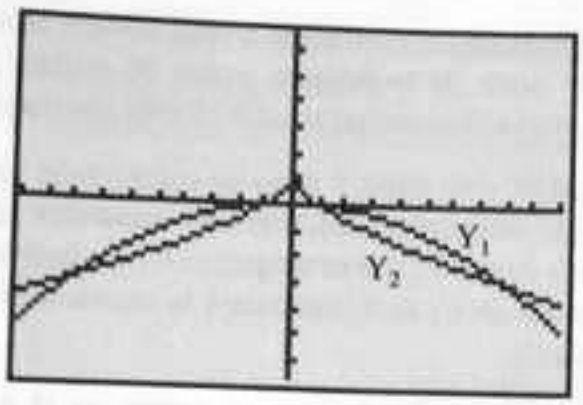


71.



www.elsolucionario.net

72.



C 73. Grafica el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ con las ecuaciones $Y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ y $Y_2 = -Y_1$ en la pantalla dada. Luego analiza cómo es que ésta afecta la gráfica y encuentra la pantalla que genere una gráfica circular.

(1) [−2, 2] por [−2, 2] (2) [−3, 3] por [−2, 2]

(3) [−2, 2] por [−5, 5] (4) [−5, 5] por [−2, 2]

C 74. Grafica la ecuación $|x| + |y| = 5$, con las ecuaciones $Y_1 = 5 - |x|$ y $Y_2 = -Y_1$ en la pantalla [−5, 5] por [−5, 5].

a) Da el número de intersecciones en x y y.

b) Usa la gráfica para hallar la región donde $|x| + |y| < 5$

C **Ejercicios 75 y 76: grafica la ecuación y calcula las intersecciones en x.**

75. $y = x^3 - \frac{9}{10}x^2 - \frac{43}{25}x + \frac{24}{25}$

76. $y = x^4 + 0.85x^3 - 2.46x^2 - 1.07x + 0.51$

C **Ejercicios 77 al 80: dibuja las dos ecuaciones en el mismo plano coordenado y calcula las coordenadas de sus puntos de intersección.**

77. $y = x^3 + x$; $x^2 + y^2 = 1$

78. $y = 3x^4 - \frac{3}{2}$; $x^2 + y^2 = 1$

79. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; $(x - \frac{5}{4})^2 + y^2 = 1$

80. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$; $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$

C 81. **Distancia entre automóviles** La distancia D (en mi) entre dos autos, que se encuentran en la misma carretera al tiempo t (en min), está descrita por la ecuación $D = |2t - 4|$ en el intervalo $[0, 4]$. Grafica D y describe el movimiento de los carros.

C 82. **Agua en una piscina** La expresión $A = 12\,000x - 2000x^2$ da la cantidad de agua A de una alberca en un día x, A está en galones (gal) y $x = 0$ corresponde al mediodía de un domingo. Grafica A en el intervalo $[0, 6]$ e indica la cantidad de agua.

C 83. **Velocidad del sonido** La velocidad v del sonido en el aire varía con la temperatura. Se puede calcular en pies por segundo (ft/s) con la ecuación $v = 1087\sqrt{\frac{T + 273}{273}}$, donde T es la temperatura (en °C).

a) Calcula v cuando $T = 20$ °C.

b) Determina la temperatura al grado más cercano, tanto en forma algebraica como gráfica, cuando la velocidad del sonido sea 1000 ft/s.

C 84. El área A de un triángulo equilátero con un lado de longitud s es $A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Considera que A debe ser igual a 100 ft^2 con un error mínimo de ±1 ft^2. Determina en forma gráfica con cuánta precisión hay que medir s a fin de satisfacer este requisito de error. (*Sugerencia:* grafica $y = A$, $y = 99$ y $y = 101$.)

3.3 Rectas

Uno de los conceptos básicos en geometría es la *recta*. En esta sección limitaremos nuestro estudio a las rectas de un plano coordenado, lo que nos permitirá el uso de métodos algebraicos para estudiar sus propiedades. Dos de nuestros objetivos principales pueden establecerse de esta manera:

(1) Dada una recta l de un plano coordenado, encontrar una ecuación cuya gráfica corresponda a l.

(2) Dada una ecuación de una recta l de un plano coordenado, trazar la gráfica de la ecuación.

El concepto que sigue es fundamental para el estudio de las rectas.

www.elsolucionario.net

Definición de la pendiente de una recta

Sea l una recta que no es paralela al eje y, y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos diferentes de l. La **pendiente** m de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si l es paralela al eje y, la pendiente de l no está definida.

Los puntos característicos P_1 y P_2 de la línea l se exhiben en la figura 19. El numerador $y_2 - y_1$ de la fórmula para encontrar m es el cambio vertical en dirección de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ es el cambio horizontal de P_1 a P_2 y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero porque l no es paralelo al eje y si existe una pendiente. En la figura 19a) la pendiente es positiva y decimos que la recta se *levanta*; en la figura 19b) es negativa y la línea *cae*.

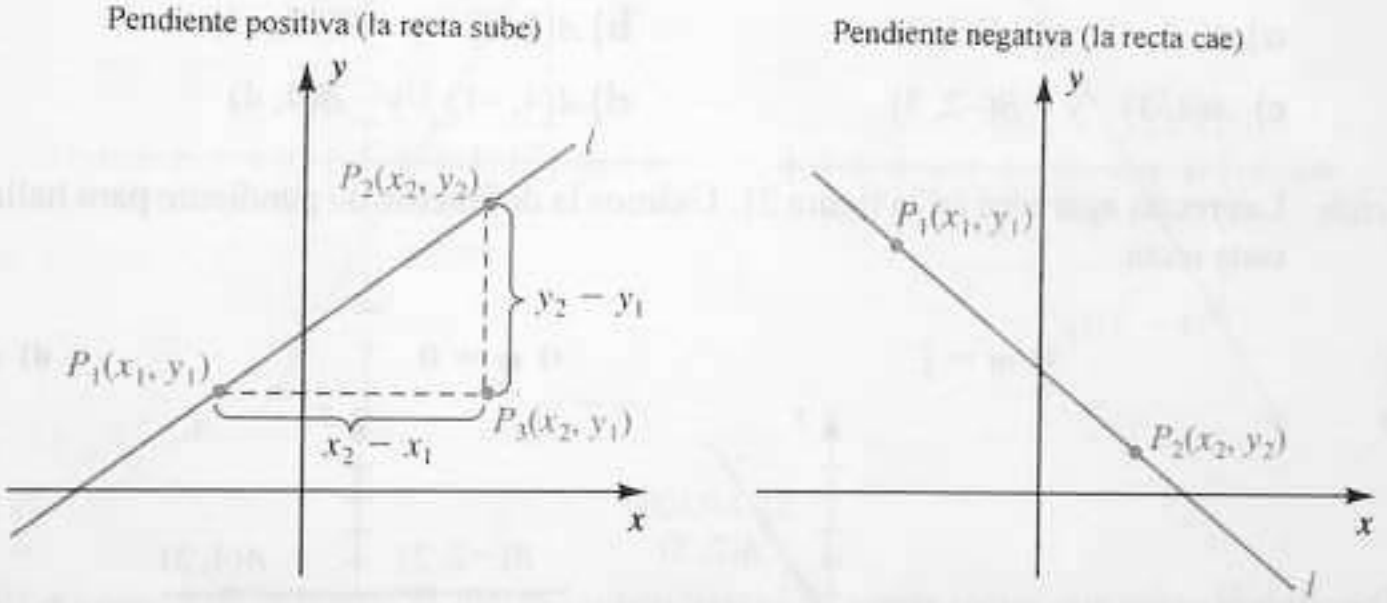


FIGURA 19

Al hallar la pendiente de una recta no importa qué punto marquemos como P_1 y P_2, pues

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si los puntos están señalados de modo que $x_1 < x_2$ (Fig. 19), entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por lo tanto, la pendiente es positiva, negativa o cero, dependiendo de si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o $y_2 = y_1$, respectivamente.

La elección de los dos puntos que se escojan en l no afecta la definición de pendiente. Si se usan otros puntos, por ejemplo $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como en la figura 20, el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es similar al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Puesto que los cocientes entre los lados correspondientes de triángulos similares son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

www.elsolucionario.net

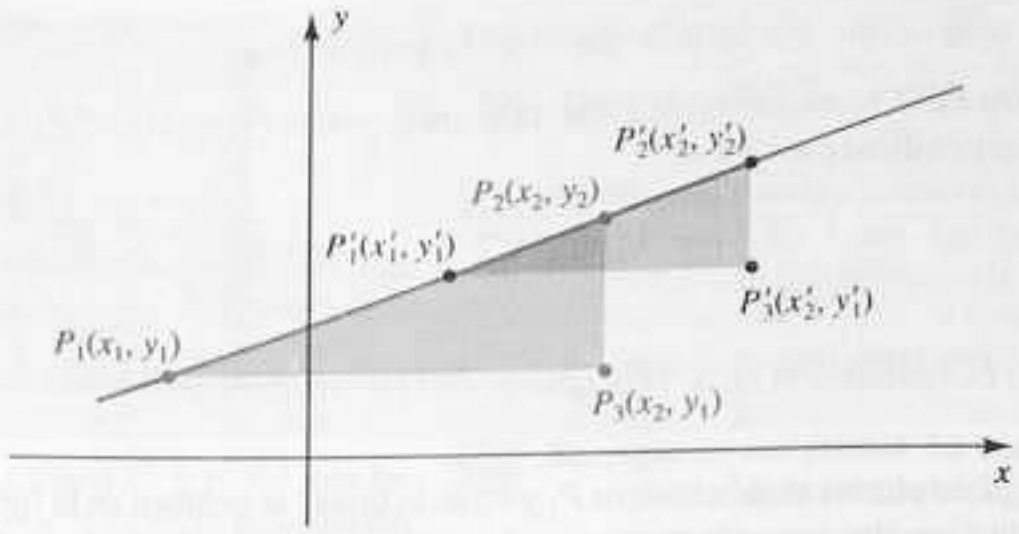


FIGURA 20

EJEMPLO 1 *Búsqueda de pendientes*

Traza la recta que pasa por cada par de puntos y encuentra su pendiente:

a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ **b)** $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ **d)** $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

Solución Las rectas aparecen en la figura 21. Usamos la definición de pendiente para hallar la pendiente de cada recta.

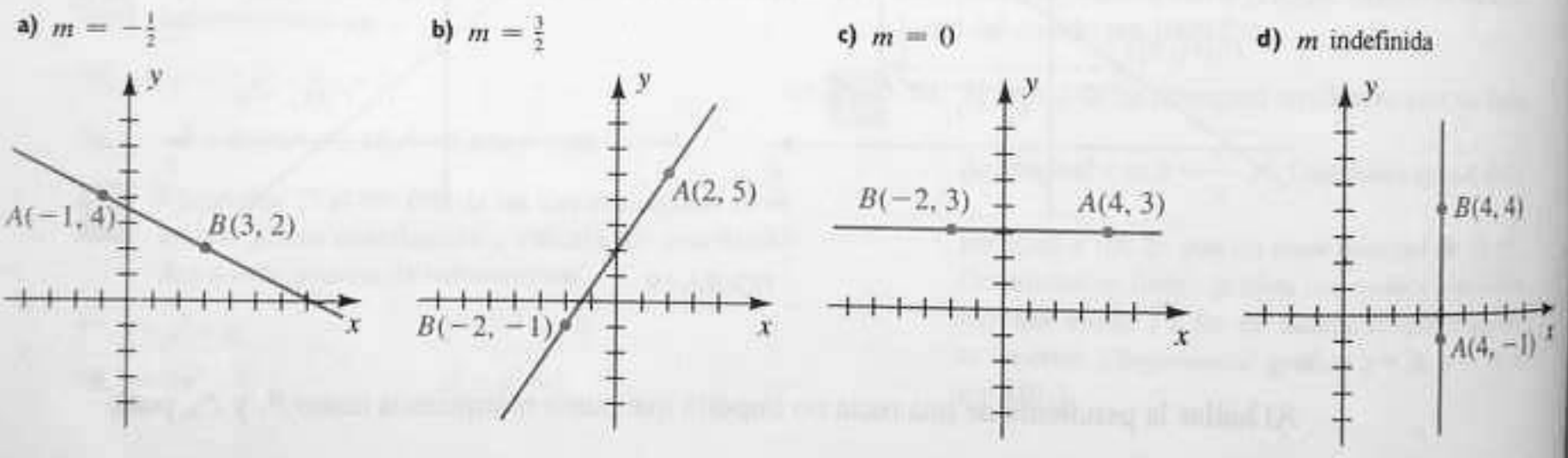


FIGURA 21

a) $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

b) $m = \dfrac{5-(-1)}{2-(-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

c) $m = \dfrac{3-3}{-2-4} = \dfrac{0}{-6} = 0$

d) La pendiente no está definida porque la recta es paralela al eje y. Observarás que si usamos la fórmula para m, el denominador es cero.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 2 *Trazado de una recta con una pendiente dada*

Traza la recta que pasa por $P(2, 1)$ que tiene

a) pendiente $\frac{5}{3}$ **b)** pendiente $-\frac{5}{3}$

Solución Si la pendiente de una recta es a/b y b es positiva, entonces para todo cambio de b unidades en dirección horizontal, la recta sube o cae $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positiva o negativa.

a) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = \frac{5}{3}$, es posible obtener otro punto de la recta si comenzamos en P y lo movemos 3 unidades a la derecha y 5 hacia arriba. Esto dará el punto $Q(5, 6)$ y la recta estará determinada igual que en la figura 22a).

b) Si $P(2, 1)$ se halla en la recta y $m = -\frac{5}{3}$, lo movemos 3 unidades a la derecha, 5 hacia abajo y llegamos a la recta que pasa por $Q(5, -4)$ [Fig. 22b)].

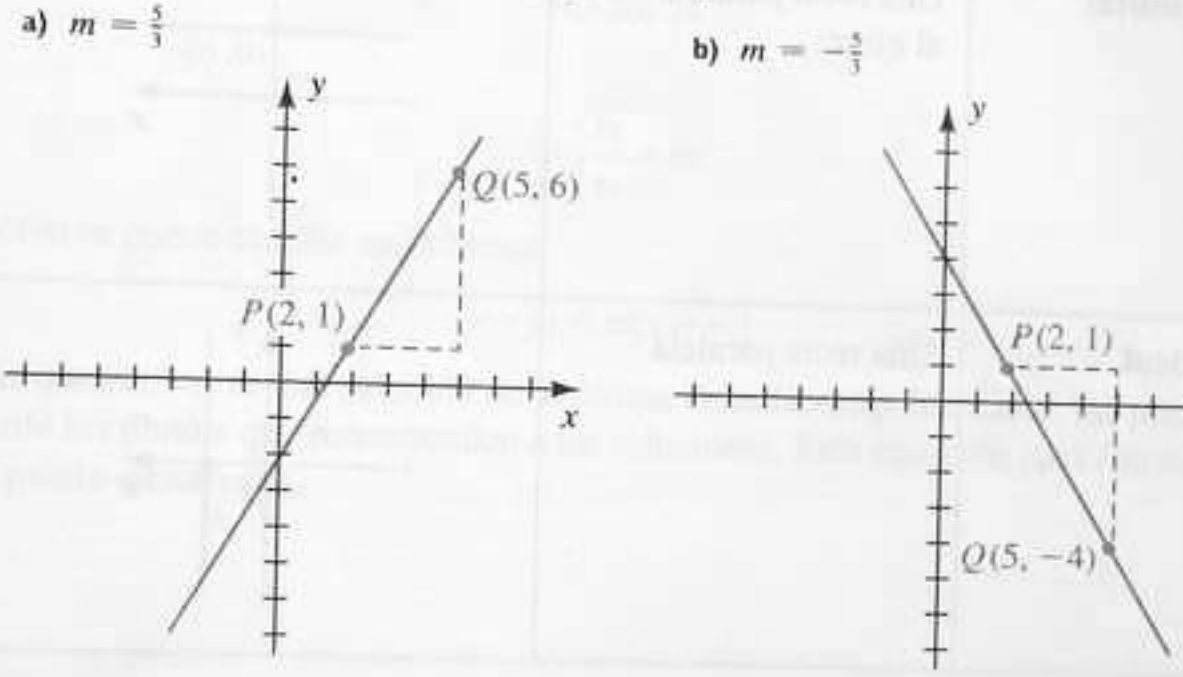


FIGURA 22

El diagrama de la figura 23 indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que se encuentra sobre el eje x tiene pendiente $m = 0$. Si se hace girar alrededor de O en

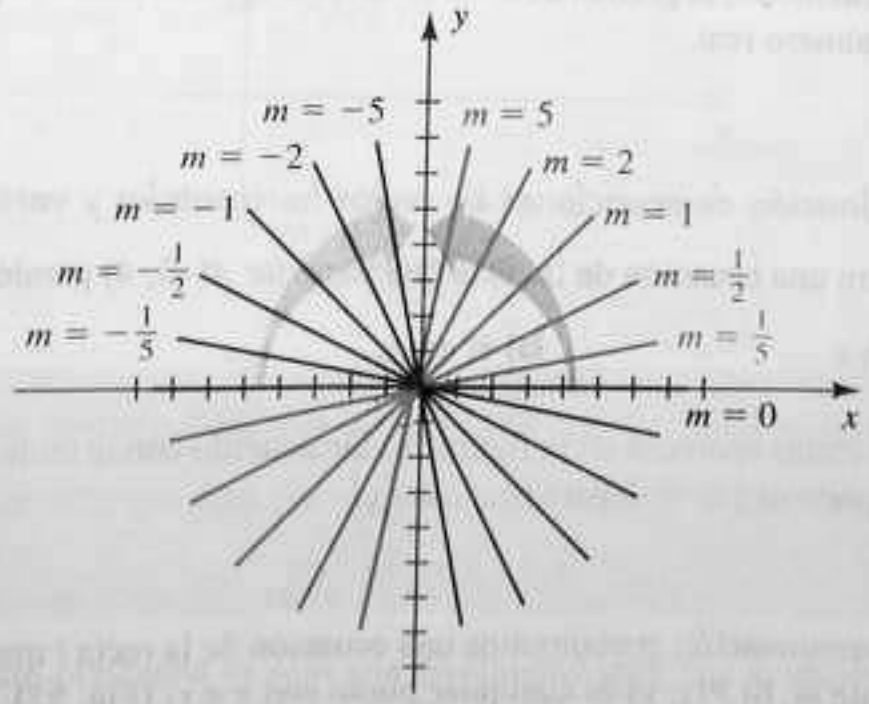
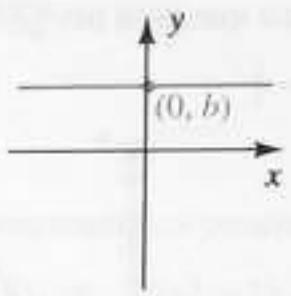
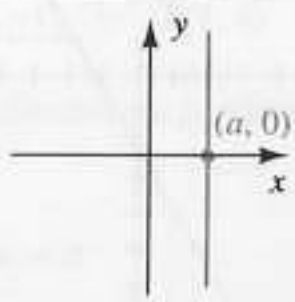


FIGURA 23

www.elsolucionario.net

dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj (según indica la flecha de color), la pendiente es positiva y aumenta; alcanza el valor de 1 cuando la recta bisecta el primer cuadrante y continúa incrementándose a medida que la recta se acerca al eje y. Ahora bien, la recta de pendiente $m = 0$ se hace girar *en sentido* de las manecillas del reloj (flecha negra), la pendiente es negativa y llega al valor de -1 cuando la recta bisecta el segundo cuadrante; además, se vuelve más grande y negativa conforme la recta se acerca al eje y.

Las rectas horizontales o verticales tienen ecuaciones sencillas, según se aprecia en la próxima tabla.

Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación
Recta horizontal	Una recta paralela al eje x		$y = b$
Recta vertical	Una recta paralela al eje y		$x = a$

Un error común es considerar la gráfica de $y = b$ como formada por un solo punto $(0, b)$. Si expresamos la ecuación en la forma $0 \cdot x + y = b$, el valor de x no tiene importancia; por lo tanto, la gráfica de $y = b$ está formada por los puntos (x, b) para *toda* x; o sea, es una recta horizontal. Del mismo modo, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y), donde y es un número real.

EJEMPLO 3 *Determinación de ecuaciones de rectas horizontales y verticales*

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 4)$ paralela a

a) el eje x **b)** el eje y

Solución Las dos rectas aparecen en la figura 24. De acuerdo con la tabla anterior, las ecuaciones son $y = 4$ para la parte a) y $x = -3$ para b).

A continuación encontremos una ecuación de la recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m. Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (Fig. 25), entonces P está sobre la recta l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m; es decir, si

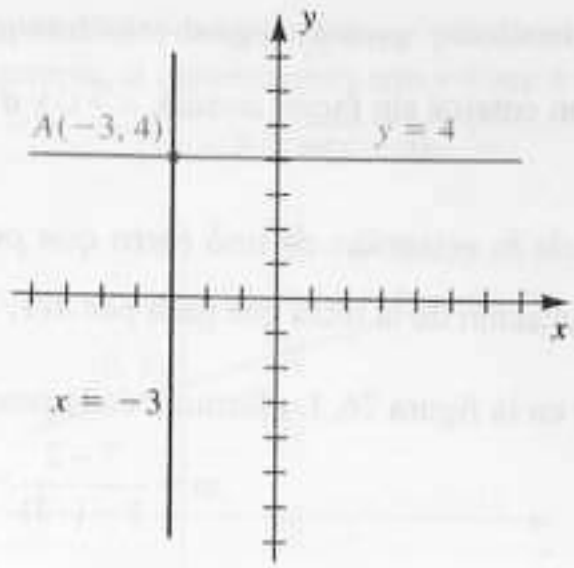


FIGURA 24

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Observarás que (x_1, y_1) es una solución de la última ecuación y, por lo tanto, los puntos de l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se conoce como **forma de punto-pendiente.**

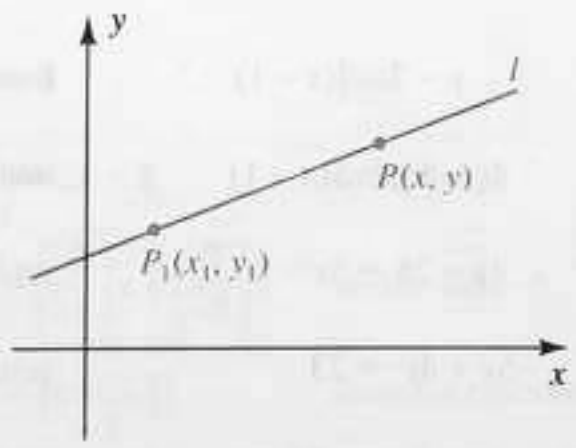


FIGURA 25

Forma de punto-pendiente para la ecuación de una recta

Una ecuación para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma de punto-pendiente es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay muchas ecuaciones equivalentes. A veces simplificamos la ecuación obtenida usando la forma de punto-pendiente a

www.elsolucionario.net

$$ax + by = c \qquad \text{o} \qquad ax + by + d = 0,$$

donde a, b y c son enteros sin factor común, $a > 0$ y $d = -c$.

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos*

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

Solución La recta aparece en la figura 26. La fórmula de la pendiente m nos da

$$m = \frac{7-2}{1-(-3)} = \frac{5}{4}.$$

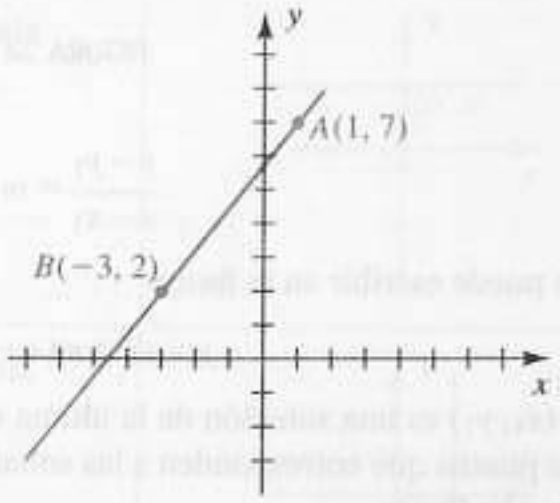


FIGURA 26

Podemos usar las coordenadas de A o B para (x_1, y_1) en la forma de punto-pendiente. Con $A(1, 7)$ tendremos

$y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$	forma de punto-pendiente
$4(y - 7) = 5(x - 1)$	multiplicar por 4
$4y - 28 = 5x - 5$	multiplicar factores
$-5x + 4y = 23$	restar $5x$ y sumar 28
$5x - 4y = -23$	multiplicar por -1

La última ecuación es una de las formas deseadas para la ecuación de una recta. Otra es $5x - 4y + 23 = 0$.

La forma de punto-pendiente para la ecuación de una recta se puede reescribir de esta manera: $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la ordenada al origen o intersección en y de la gráfica (Fig. 27).* Dado que la ecuación $y = mx + b$ muestra la pendiente m y la intersección igual a b en

*N. del R.T.: de igual forma, la intersección en x también se conoce como abscisa al origen.

y de l, se llama **forma de pendiente-intersección o pendiente-ordenada al origen** para la ecuación de una recta. A la inversa, si comenzamos con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

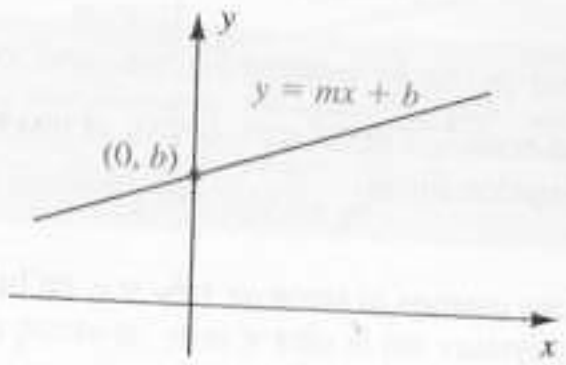


FIGURA 27

Al comparar esta ecuación con la forma de punto-pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$. Hemos demostrado este resultado:

Forma pendiente-intersección para la ecuación de una recta

La gráfica de $y = mx + b$ es una recta con pendiente m y ordenada al origen igual a b.

EJEMPLO 5 *Expresión de una ecuación en forma pendiente-intersección*

Escribe la ecuación $2x - 5y = 8$ en forma de pendiente-intersección.

Solución Nuestra meta es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Podemos proceder de esta manera:

$$2x - 5y = 8 \qquad \text{dado}$$

$$-5y = -2x + 8 \qquad \text{restar } 2x$$

$$y = \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \left(\frac{8}{-5}\right) \qquad \text{dividir entre } -5$$

$$y = \tfrac{2}{5}x + \left(-\tfrac{8}{5}\right) \qquad \text{ecuación equivalente}$$

La última ecuación es de la forma pendiente-intersección $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ y ordenada al origen igual a $b = -\frac{8}{5}$.

De la forma de punto-pendiente, se deduce que toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales y a y b no son cero ambos. Esta ecuación se denomina **ecuación lineal** en x y y. Demostremos, recíprocamente, que la gráfica de $ax + by = c$ donde a y b no son cero ambas, es siempre una recta. Si $b \neq 0$ despejaremos y y obtenemos

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b},$$

www.elsolucionario.net

que, por la forma pendiente-intersección, es la ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ y ordenada al origen igual a c/b. Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, despejamos x y obtenemos $x = c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con abscisa al origen igual a c/a. Este análisis establece el resultado que sigue.

Forma general para la ecuación de una recta

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, usamos *la recta* $ax + by = c$, en lugar de la frase *la recta con ecuación* $ax + by = c$.

EJEMPLO 6 *Trazado de la gráfica de una ecuación lineal*

Traza la gráfica de $2x - 5y = 8$.

Solución Por nuestro estudio anterior sabemos que la gráfica es una recta, de modo que basta hallar dos puntos en la gráfica. Encontremos las intersecciones en x y y sustituyendo $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada, $2x - 5y = 8$.

intersección x: si $y = 0$, entonces $2x = 8$, o bien $x = 4$

intersección y: si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o bien $y = -\frac{8}{5}$

Graficamos las intersecciones $(4, 0)$ y $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$, tendemos una recta que pase por ellos y llegamos a la gráfica de la figura 28.

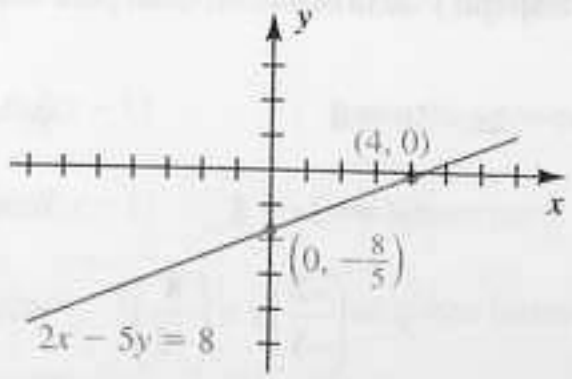


FIGURA 28

El teorema que viene especifica la relación entre **rectas paralelas** (rectas en un plano que no se cortan) y pendiente.

Teorema sobre pendientes de rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

PRUEBA Sean l_1 y l_2 rectas distintas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si las intersecciones en y (u ordenadas al origen) son b_1 y b_2 (Fig. 29), entonces, por la forma pendiente-intersección, las rectas tienen ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2.$$

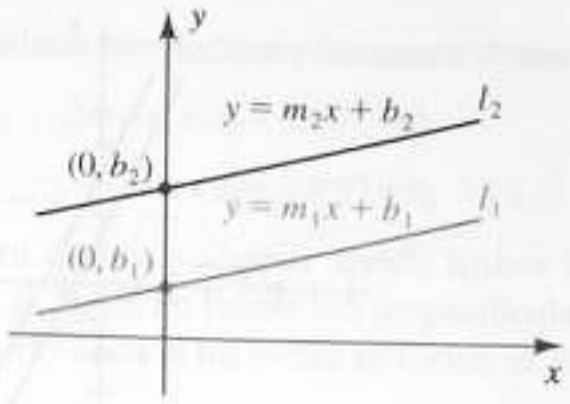


FIGURA 29

Las rectas se cortan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x, esto es, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2,$$

o bien

$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

La última ecuación se puede resolver para x si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se cortan si y sólo si $m_1 \neq m_2$; por lo tanto, *no se* cortan (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$.

EJEMPLO 7 *Determinación de la ecuación de una recta paralela a una recta dada*

Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $P\ (5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

Solución Primero se expresa la ecuación dada en forma pendiente-intersección:

$$6x + 3y = 4 \qquad \text{dado}$$

$$3y = -6x + 4 \qquad \text{restar } 6x$$

$$y = -2x + \tfrac{4}{3} \qquad \text{dividir entre 3}$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección, $y = mx + b$, con pendiente $m = -2$ e intersección y igual a $\frac{4}{3}$. Puesto que las rectas paralelas poseen la misma pendiente, la recta requerida también tiene pendiente -2. Con el punto $P(5, -7)$ tendremos:

$$y - (-7) = -2(x - 5) \qquad \text{forma punto-pendiente}$$

$$y + 7 = -2x + 10 \qquad \text{simplificar}$$

$$y = -2x + 3 \qquad \text{restar } 7$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección y demuestra que la recta paralela que hemos encontrado tiene ordenada al origen igual a 3. Ésta y la recta dada aparecen en la figura 30.

Para una solución alternativa podemos aprovechar que las rectas de la forma $6x + 3y = k$ tienen la misma pendiente que la recta dada y, por lo tanto, son paralelas a ella. Sustituimos $x = 5$ y $y = -7$ en la ecuación $6x + 3y = k$, con lo cual $6(5) + 3(-7) = k$, o bien, lo que es lo mismo, $k = 9$. La ecuación $6x + 3y = 9$ equivale a $y = -2x + 3$.

www.elsolucionario.net

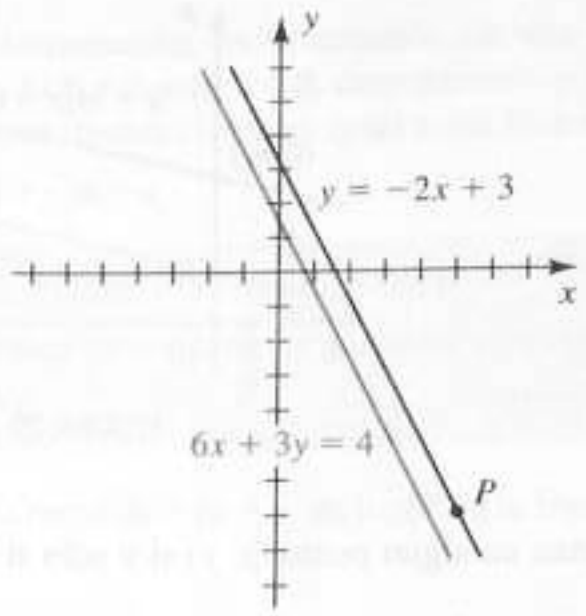


FIGURA 30

El teorema adjunto nos da información sobre **rectas perpendiculares** (rectas que se cortan a ángulos rectos).

Teorema sobre pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1.$$

PRUEBA Por simplicidad, consideremos el caso especial de dos rectas que se cortan en el origen O (Fig. 31). Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$. Si, como en la figura, escogemos los puntos $A(x_1, m_1 x_1)$ y $B(x_2, m_2 x_2)$ diferentes de O en las rectas, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Con el teorema de Pitágoras veremos que el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

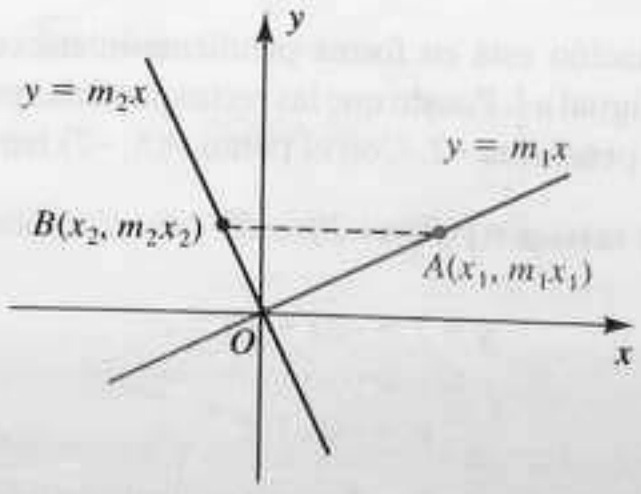


FIGURA 31

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2 x_2 - m_1 x_1)^2 = x_2^2 + (m_2 x_2)^2 + x_1^2 + (m_1 x_1)^2.$$

www.elsolucionario.net

Al elevar al cuadrado los términos, simplificar y factorizar obtendremos:

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0.$$

Dado que x_1 y x_2 no son cero ambas, podemos dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, con lo cual obtenemos $m_1m_2 + 1 = 0$; por lo tanto, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

El mismo tipo de prueba es válido si las rectas se cortan en *cualquier* punto (a, b).

Una buena forma de recordar las condiciones sobre pendientes de rectas perpendiculares es observar que m_1 y m_2 deben ser *recíprocas negativas* entre sí; esto es, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 8 *Determinación de la ecuación de una recta perpendicular a una recta dada*

Encuentra la forma pendiente-intersección para la recta que pasa por el punto $P(5, -7)$ perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

Solución Consideramos la recta $6x + 3y = 4$ en el ejemplo 7 y encontramos que su pendiente es -2; por lo tanto, la pendiente de la recta requerida es el recíproco negativo $-[1/(-2)]$, o sea $\frac{1}{2}$. Con $P(5, -7)$ llegamos a:

$$y - (-7) = \tfrac{1}{2}(x - 5) \qquad \text{forma punto-pendiente}$$

$$y + 7 = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2} \qquad \text{simplificar}$$

$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{19}{2} \qquad \text{poner en forma pendiente-intersección}$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección y muestra que la recta perpendicular tiene intersección y igual a $-\frac{19}{2}$. Esta recta, y la dada, aparecen en la figura 32.

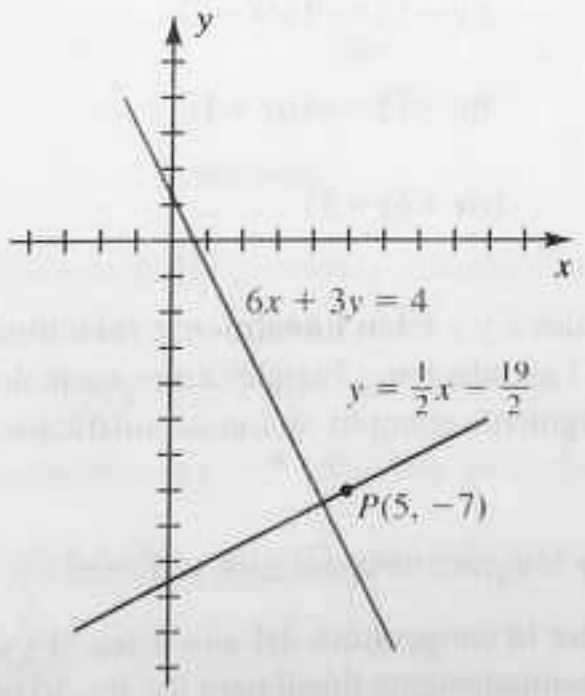


FIGURA 32

EJEMPLO 9 *Determinación de la ecuación de una mediatriz*

Dados $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$, encuentra la forma general de la mediatriz l del segmento de recta AB.

www.elsolucionario.net

Solución El segmento de recta AB y su mediatriz l se ilustran en la figura 33. Calculamos lo siguiente, donde M es el punto medio de AB:

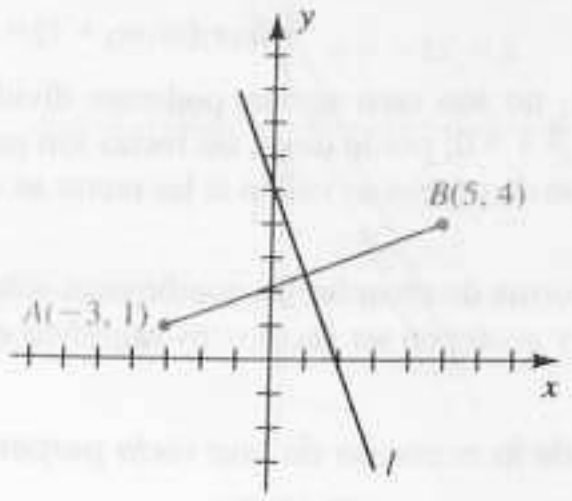


FIGURA 33

Coordenadas de M: $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+4}{2}\right)=\left(1, \frac{5}{2}\right)$ fórmula de punto medio

Pendiente de AB: $\frac{4-1}{5-(-3)}=\frac{3}{8}$ fórmula de pendiente

Pendiente de l: $-\frac{1}{\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$ recíproco negativo de $\frac{3}{8}$.

Con el punto $M\left(1, \frac{5}{2}\right)$ y la pendiente $-\frac{8}{3}$, obtendremos estas ecuaciones equivalentes para l:

$y-\frac{5}{2}=-\frac{8}{3}(x-1)$ forma de punto pendiente

$6y-15=-16(x-1)$ multiplicar por el MCDn, 6

$6y-15=-16x+16$ multiplicar

$16x+6y=31$ poner en forma general

Dos variables x y y están **linealmente relacionadas** si $y=ax+b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Las relaciones lineales entre variables se presentan con frecuencia en problemas aplicados. El siguiente ejemplo es una demostración.

EJEMPLO 10 *Relación entre temperatura del aire y altitud*

La relación entre la temperatura del aire T (en °F) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar: ft/snm) es aproximadamente lineal para $0 \leq h \leq 20\,000$. Si la temperatura al nivel del mar es 60°, un aumento de 5000 ft en altitud baja la temperatura del aire unos 18°.

a) Expresa T en términos de h y dibuja la gráfica en un sistema coordenado hT.

b) Calcula la temperatura del aire a una altitud de 15 000 ft.

c) Calcula la altitud a la que la temperatura sea 0°.

www.elsolucionario.net

Solución **a)** Si T está linealmente relacionada a h, entonces

$$T = ah + b$$

para algunas constantes a y b (a representa la pendiente y b la intersección en T). Puesto que $T = 60°$ cuando $h = 0$ ft (al nivel del mar), la intersección en T es 60 y la temperatura T para $0 \le h \le 20\,000$ está dada por

$$T = ah + 60.$$

A partir de los datos dados, observamos que cuando $h = 5000$ ft, la temperatura $T = 60° - 18° = 42°$; por lo tanto a, se encuentra de esta manera:

$$42 = a(5000) + 60 \qquad \text{sea } T = 42 \text{ y } h = 5000$$

$$a = \frac{42 - 60}{5000} = -\frac{9}{2500} \qquad \text{despejar } a$$

Al sustituir a en $T = ah + 60$ se obtiene está fórmula para T:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60$$

La gráfica aparece en la figura 34, con diferentes escalas en los ejes.

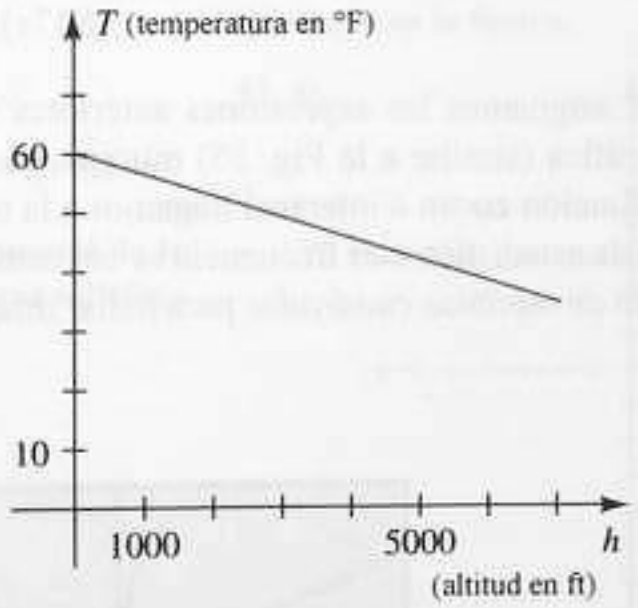


FIGURA 34

b) Con la última fórmula para T obtenida en la parte a), encontramos que la temperatura (en °F) cuando $h = 15\,000$ es

$$T = -\tfrac{9}{2500}(15\,000) + 60 = -54 + 60 = 6.$$

c) Para hallar la altitud h que corresponda a $T = 0°$, procedemos de este modo:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{de la parte a)}$$

$$0 = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{sea } T = 0$$

$$\tfrac{9}{2500}h = 60 \qquad \text{sumar } \tfrac{9}{2500}h$$

$$h = 60 \cdot \tfrac{2500}{9} \qquad \text{multiplicar por } \tfrac{2500}{9}$$

$$h = \frac{50\,000}{3} \approx 16\,667 \text{ ft} \qquad \text{simplificar y aproximar}$$

www.elsolucionario.net

En un capítulo posterior estudiaremos métodos algebraicos para hallar el punto de intersección de dos rectas no paralelas. En algunas aplicaciones, los números que se presentan en ecuaciones de rectas son irracionales o tienen datos aproximados. En tales casos quizá sea suficiente calcular las coordenadas del punto con una graficadora, como en el ejemplo adjunto.

EJEMPLO 11 *Cálculo del punto de intersección de dos rectas*

Supón que obtuvimos estas rectas usando datos aproximados:

$$1.018x + 0.230y = 0.447$$

$$1.847x + 4.538y = 1.414$$

Utiliza una graficadora para calcular las coordenadas del punto de intersección a dos lugares decimales.

Solución Al despejar y de cada una de las ecuaciones, obtenemos

$$y = (0.447 - 1.018x)/0.230,$$

$$y = (1.414 - 1.847x)/4.538.$$

En seguida asignamos las expresiones anteriores para y a Y_1 y Y_2, respectivamente. Una imagen de la gráfica (similar a la Fig. 35) muestra que hay un punto de intersección cerca del origen. Con la función zoom o intersect llegamos a la solución aproximada (0.41, 0.15).

En el análisis estadístico con frecuencia se encuentran problemas similares a éste cuando se utiliza el *método de mínimos cuadrados* para hallar una *recta de regresión lineal*.

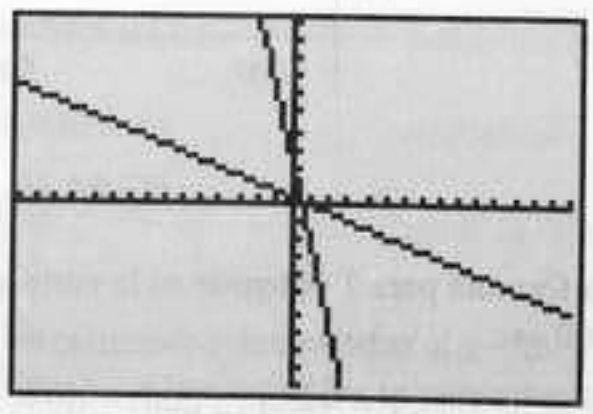


FIGURA 35

3.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 6: traza la recta que pasa por A y B, y encuentra su pendiente m.

1. $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$
2. $A(4, -1)$, $B(-6, -3)$
3. $A(2, 5)$, $B(-7, 5)$
4. $A(5, -1)$, $B(5, 6)$
5. $A(-3, 2)$, $B(-3, 5)$
6. $A(4, -2)$, $B(-3, -2)$

Ejercicios 7 al 10: utiliza pendientes para demostrar que los puntos son vértices del polígono especificado.

7. $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 0)$, $D(-5, -2)$; paralelogramo
8. $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$, $D(-6, 2)$; trapecio
9. $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$; rectángulo

www.elsolucionario.net

10. $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$; triángulo rectángulo

11. Si tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$, encuentra el cuarto vértice.

12. Las expresiones $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ denotan los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestra que los segmentos de recta que enlazan los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejercicios 13 y 14: traza la gráfica de $y = mx$ para los valores dados de m.

13. $m = 3, -2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

14. $m = 5, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

Ejercicios 15 y 16: dibuja la gráfica de la recta que pasa por el punto P para cada valor de m.

15. $P(3, 1)$; $m = \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{5}$

16. $P(-2, 4)$; $m = 1, -2, -\frac{1}{2}$

Ejercicios 17 y 18: traza las gráficas de las rectas en el mismo plano coordenado.

17. $y = x + 3$, $y = x + 1$, $y = -x + 1$

18. $y = -2x - 1$, $y = -2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejercicios 19 al 30: encuentra una forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto A que satisfaga la condición dada.

19. $A(5, -2)$

   a) paralela al eje y

   b) perpendicular al eje y

20. $A(-4, 2)$

   a) paralela al eje x

   b) perpendicular al eje x

21. $A(5, -3)$; pendiente -4

22. $A(-1, 4)$; pendiente $\frac{2}{3}$

23. $A(4, 0)$; pendiente -3

24. $A(0, -2)$; pendiente 5

25. $A(4, -5)$; que pase por $B(-3, 6)$

26. $A(-1, 6)$; intersección en x (o abscisa al origen) igual a 5

27. $A(2, -4)$; paralela a la recta $5x - 2y = 4$

28. $A(-3, 5)$; paralela a la recta $x + 3y = 1$

29. $A(7, -3)$; perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$

30. $A(4, 5)$; perpendicular a la recta $3x + 2y = 7$

Ejercicios 31 al 34: halla la forma pendiente-intersección de la recta que satisface las condiciones dadas.

31. intersección en x igual a 4, intersección en y (u ordenada al origen) igual a -3

32. intersección en x igual a -5 intersección en y igual a -1

33. que pasa por $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$

34. que pasa por $A(-2, 1)$ y $B(3, 7)$

Ejercicios 35 y 36: encuentra una forma general de una ecuación para la mediatriz del segmento AB.

35. $A(3, -1)$, $B(-2, 6)$

36. $A(4, 2)$, $B(-2, 10)$

Ejercicios 37 y 38: escribe una ecuación para la recta que corta los cuadrantes dados.

37. II y IV

38. I y III

Ejercicios 39 al 42: utiliza la forma pendiente-intersección para hallar la pendiente e intersección en y de la recta dada y traza su gráfica.

39. $2x = 15 - 3y$

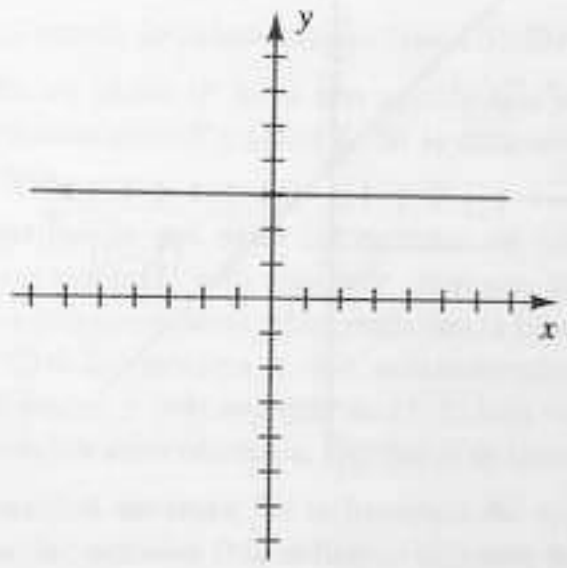
40. $7x = -4y - 8$

41. $4x - 3y = 9$

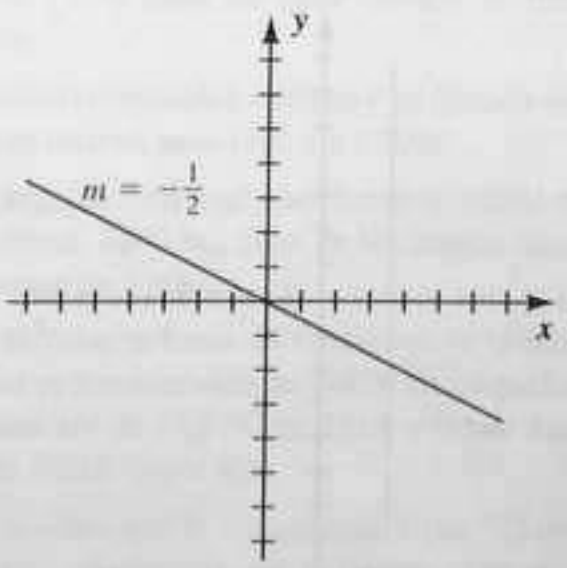
42. $x - 5y = -15$

Ejercicios 43 y 44: encuentra una ecuación de la recta mostrada en la figura.

43. a)

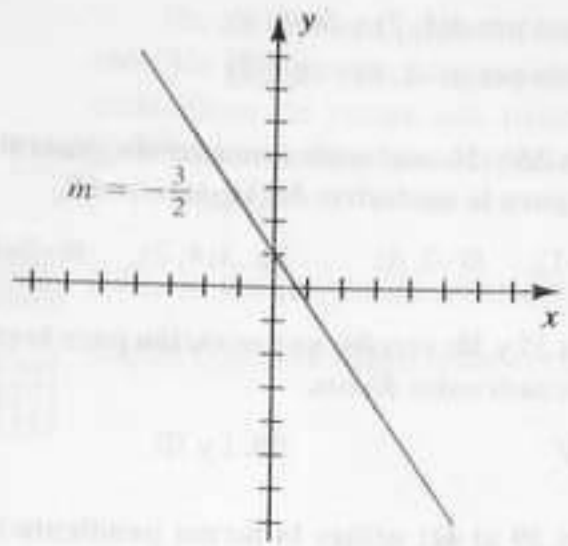


b)

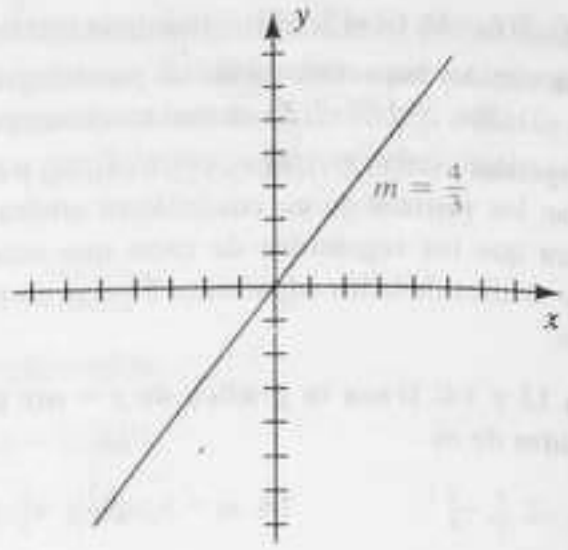


www.elsolucionario.net

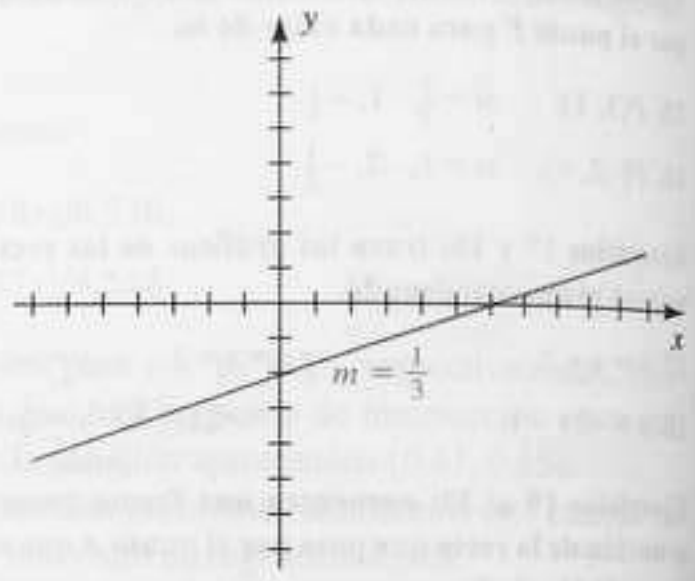
c)



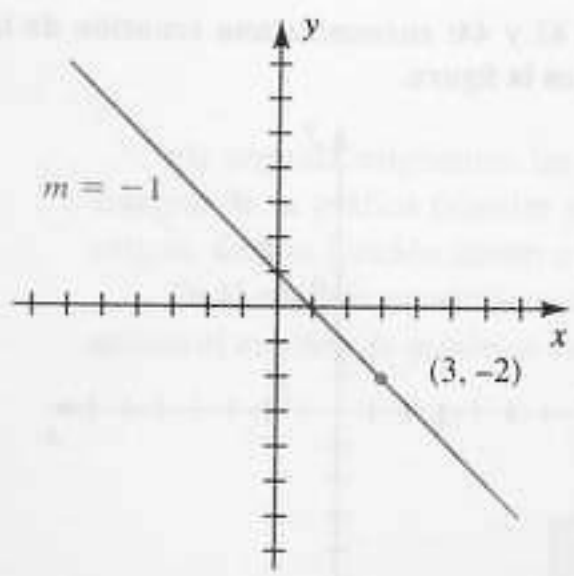
b)



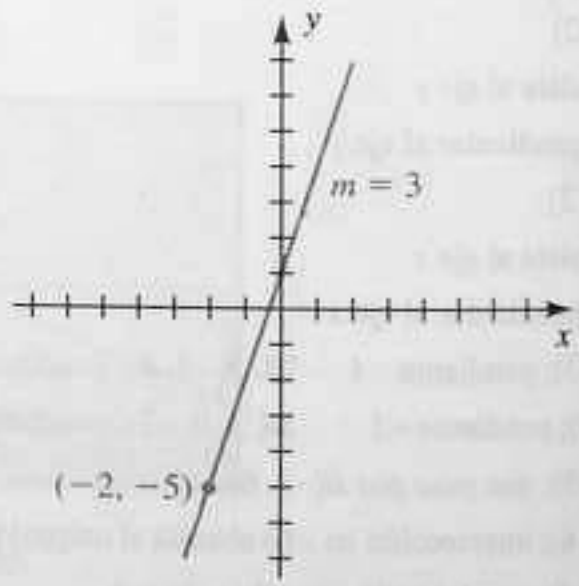
c)



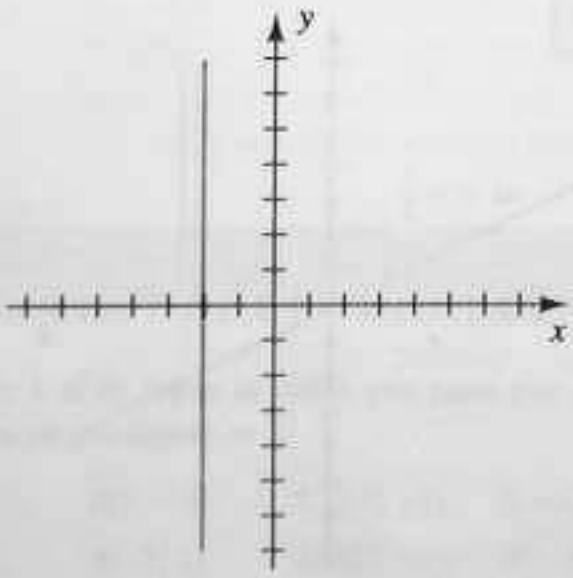
d)



d)



44. a)



Ejercicios 45 y 46: si una recta *l* tiene intersecciones en *x* y *y* diferentes de cero e iguales a *a* y *b*, respectivamente, la *forma simétrica* es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Encuentra la forma de intersección para la recta dada.

45. $4x - 2y = 6$

46. $x - 3y = -2$

www.elsolucionario.net

47. Halla una ecuación del círculo con centro $C(3, -2)$ y que sea tangente a la recta $y = 5$.

48. Encuentra una ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3, 4)$.

49. **Crecimiento fetal** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de gestación se calcula mediante la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, donde L es la longitud (en cm) y t es el tiempo (en semanas). La longitud prenatal se puede determinar por ultrasonido. Calcula la edad de un feto cuya longitud es 28 centímetros.

50. **Cálculo de salinidad** La salinidad de los océanos se refiere a la cantidad de material disuelto que se encuentra en una muestra de agua marina. La salinidad S se puede calcular a partir de la cantidad C de cloro en agua de mar con la ecuación $S = 0.03 + 1.805C$, donde S y C se miden por peso en partes por millar. Calcula C si S es 0.35.

51. **Peso de una ballena jorobada** Es posible calcular el peso esperado W (en ton) de una ballena jorobada a partir de su longitud L (en ft), mediante la fórmula $W = 1.70L - 42.8$ para $30 \le L \le 50$.

a) Calcula el peso de un ejemplar de 40 ft de largo.

b) Si el error al calcular la longitud puede ser de hasta 2 ft, ¿cuál es el error correspondiente para el cálculo del peso?

52. **Crecimiento de una ballena azul** Las ballenas azules recién nacidas miden alrededor de 24 ft de largo y pesan 3 ton. Los cetáceos jóvenes son amamantados durante 7 meses y, al momento del destete, muchos miden 53 ft de largo y pesan 23 ton. Denotemos con L y W la longitud ft y el peso ton, respectivamente, de una ballena de t meses de edad.

a) Si L y t están relacionadas linealmente, expresa L en términos de t.

b) ¿Cuál es el aumento diario en la longitud de una ballena joven? (usa 1 mes = 30 días)

c) Si W y t están relacionadas linealmente, expresa W en términos de t.

d) ¿Cuál es el aumento diario en el peso de una ballena joven?

53. **Estadísticas en beisbol** Un jugador de las grandes ligas ha conectado 5 *home-runs* en los primeros 14 juegos, y mantiene este paso toda la temporada de 162 encuentros.

a) Da el número y de *home-runs* en términos de la cantidad x de juegos jugados.

b) ¿Cuántos *home-runs* conectará en la temporada?

54. **Producción de queso** Un fabricante produce 18 000 libras del 1° de enero al 24 de marzo. Supón que mantiene este ritmo de producción el resto del año.

a) Expresa la cantidad y de libras de queso producidas en términos del número x del día en un año de 365 días.

b) Pronostica, a la libra más cercana, la cantidad de libras producidas para el año.

55. **Peso en la infancia** Un bebé pesa 10 libras (lb) al nacer y tres años después alcanza 30 lb. Supón que el peso W (en lb) en la infancia está relacionado linealmente con la edad t (en años).

a) Expresa W en términos de t.

b) ¿Cuál será W cuando el niño cumpla 6 años?

c) ¿A qué edad pesará 70 lb?

d) En un plano tW, dibuja una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \le t \le 12$.

56. **Pago de un préstamo** Un universitario recibe, por parte de un familiar, un préstamo de $8250 sin intereses. El estudiante pagará $125 al mes hasta saldar la deuda.

a) Indica la cantidad P (en dólares) restantes a pagar en términos de t (en meses).

b) ¿Después de cuántos meses deberá $5000?

c) En un plano tP traza una gráfica que muestre la relación entre P y t para hallar la duración del préstamo.

57. **Vaporización del agua** La cantidad de calor H (en joules) requerida para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura T (en °C) de la atmósfera. A 10 °C esta conversión requiere 2480 joules, y cada aumento de 15 °C baja 40 joules la cantidad de calor necesaria. Expresa H en términos de T.

58. **Capacidad aeróbica** En la fisiología del ejercicio, la capacidad aeróbica P se define en términos de la máxima aspiración de oxígeno. En altitudes de hasta 1800 m, la capacidad es óptima (esto es, 100%). A alturas mayores de 1800 m, P disminuye linealmente desde el máximo de 100% hasta un valor cercano al 40% a 5000 metros.

a) Indica la capacidad aeróbica P en función de la altitud h en metros, para $1800 \le h \le 5000$.

b) Estima la capacidad aeróbica en la ciudad de México (altitud: 2400 m), sede de los juegos olímpicos de verano en 1968.

59. **Isla de calor urbano** El fenómeno de la isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura era de 13.5 °C en 1915, y desde entonces ha subido 0.032 °C por año.

a) Considera que la temperatura T (en °C) está linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que $t = 0$ corresponde a 1915; expresa T en términos de t.

www.solucionario.net

b) Pronostica el promedio de temperatura para el año 2000.

60. Temperatura creciente del suelo En 1870, la temperatura promedio del suelo en París era de 11.8 °C. Desde entonces ha subido a un ritmo casi constante, hasta llegar a los 13.5 °C en 1969.

a) Expresa la temperatura T (en °C) en términos del tiempo t (en años), donde $t = 0$ corresponde al año 1870 y $0 \le t \le 99$.

b) ¿Durante qué año la temperatura promedio del suelo fue de 12.5 °C?

61. Gastos de un negocio El dueño de una franquicia de helados debe pagar a la casa matriz $1000 por mes, más 5% de los ingresos mensuales; esto es: R. Los costos de operación de la franquicia incluyen un costo fijo de $2600 por mes por servicios y mano de obra. Además, el costo de los helados y materias primas comprende el 50% de los ingresos.

a) Determina los gastos mensuales E del dueño en términos de R.

b) Expresa la utilidad mensual P en términos de R.

c) Indica el ingreso mensual necesario para que no haya pérdida ni ganancia.

62. Dosis de medicamento Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y niños. Dos fórmulas que permitan modificar las dosificación en adultos y niños son

$$\text{Regla de Cowling: } y = \tfrac{1}{24}(t+1)a$$

y

$$\text{Regla de Friend: } y = \tfrac{2}{25}ta.$$

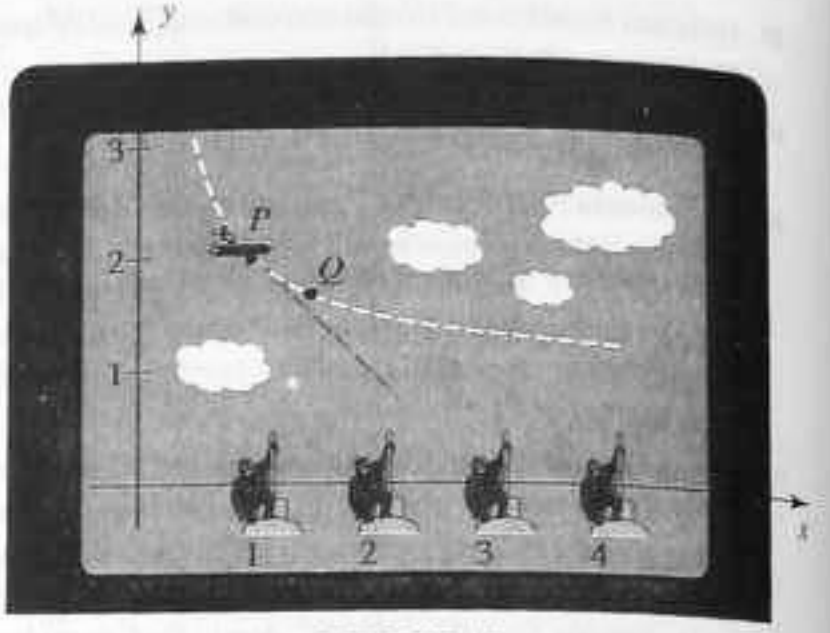
donde a denota la dosis para adultos (en mg) y t, la edad de los niños (en años).

a) Si $a = 100$, grafica las dos ecuaciones lineales en el mismo plano coordenado para $0 \le t \le 12$.

b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

63. Juegos de video En un juego de video como el que aparece en la figura, un avión vuela de izquierda a derecha a lo largo de una trayectoria dada por $y = 1 + (1/x)$ y dispara en dirección tangente a unos objetivos puestos a lo largo del eje x en $x = 1, 2, 3, 4$. Mediante cálculo, se sabe que la pendiente de la línea tangente a la trayectoria en $P(1, 2)$ es $m = -1$ y en $Q(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ es $m = -\frac{4}{9}$. Ahora bien, establece si el avión hará blanco disparando desde

a) P **b)** Q



EJERCICIO 63

64. Escalas de temperatura La relación entre las lecturas de temperatura F y en C en las escalas Fahrenheit y Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

a) Encuentra la temperatura a la que la lectura es la misma en ambas escalas.

b) ¿En qué momento la lectura en Fahrenheit es el doble de la lectura en Celsius?

65. Viento transversal vertical El viento transversal vertical se presenta cuando la velocidad del viento varía a diferentes alturas sobre el suelo. El viento transversal es de gran importancia para los pilotos durante despegues y aterrizajes. Si la velocidad del viento es v_1 a una altura h_1, y v_2 a una altura h_2, el promedio de viento transversal s está dado por la fórmula de la pendiente

$$s = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1}.$$

Si la velocidad del viento a nivel del suelo es 22 mph y se ha determinado que s es de 0.07, encuentra la velocidad del viento a 185 ft sobre el suelo.

66. Viento transversal vertical En el estudio del viento transversal vertical, a veces se usa la fórmula

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^P$$

donde P es una variable que depende del terreno y estructuras cercanas al nivel del suelo. En Montreal, se determinó que el promedio de los valores diumos para P era de 0.13. Si se mide un viento de 32 mph a 20 ft sobre el suelo, calcula el promedio de viento transversal (consulta el Ejer. 65) entre 20 y 200 ft.

Ejercicios 67 y 68: los puntos dados se encontraron mediante métodos empíricos. Indica si se encuentran en la línea $y = ax + b$; si es así, encuentra los valores de a y b.

www.elsolucionario.net

67. $A(-1.3, -1.3598)$, $B(-0.55, -1.11905)$, $C(1.2, -0.5573)$, $D(3.25, 0.10075)$

68. $A(-0.22, 1.6968)$, $B(-0.12, 1.6528)$, $C(1.3, 1.028)$, $D(1.45, 0.862)$

C **Ejercicios 69 y 70: grafica las rectas en el mismo plano coordenado y halla las coordenadas de los puntos de intersección (las coordenadas son enteros)**

69. $x - 3y = -58$; $3x - y = -70$

70. $x + 10y = 123$; $2x - y = -6$

C **Ejercicios 71 y 72: grafica las rectas en el mismo plano coordenado y calcula las coordenadas de los puntos de intersección. Identifica el polígono determinado por las rectas.**

71. $2x - y = -1$; $x + 2y = -2$; $3x + y = 11$

72. $10x - 42y = -7.14$; $8.4x + 2y = -3.8$; $0.5x - 2.1y = 2.73$; $16.8x + 4y = 14$

C **Ejercicios 73 y 74: para la tabla de datos, encuentra una recta en forma $y = ax + b$ que sea un modelo aproximado de los datos. Grafica la recta y los datos en los mismos ejes coordenados.** *Nota*: **en los ejercicios que requieran un modelo aproximado, las respuestas pueden variar dependiendo de los puntos de datos seleccionados.**

73.

x	y
−7	−25
−5.8	−21
−5	−18.5
−4	−15.4
0.6	−0.58
1.8	3.26
3	7.1
4.6	12.2

74.

x	y
0.4	2.88
1.2	2.45
2.2	1.88
3.6	1.12
4.4	0.68
6.2	−0.30

C **75. Costos de TV en el Supertazón** La tabla adjunta indica el costo (en miles de dólares) por un anuncio de 30 segundos en televisión durante el Supertazón para varios años.

Año	Costo
1982	325
1983	400
1985	510
1986	550
1987	600

a) Localiza los datos en el plano xy.

b) Determina una recta en la forma $y = ax + b$, donde x es el año y y es el costo que sirve de modelo para los datos. Traza recta y datos en los mismos ejes coordenados. Las respuestas pueden variar.

c) Utiliza esta recta para pronosticar el costo de un comercial de 30 segundos en 1984 y 1985. Compara tus respuestas con los valores reales de $450 000 y $1 000 000, respectivamente.

C **76. Tiempos récord en la milla** Los tiempos de marca mundial (en s) para la carrera de una milla se detallan en la tabla siguiente.

Año	Tiempo
1954	238.0
1957	237.2
1958	234.5
1962	234.4
1964	234.1
1965	233.6
1966	231.3
1967	231.1
1975	229.4
1979	229.1
1980	228.8
1981	227.3

a) Grafica los datos.

www.elsolucionario.net

b) Encuentra una recta de la forma $T = aY + b$ que aproxime estos datos, donde T es el tiempo y Y es el año. Grafica recta y datos en los mismos ejes coordenados.

c) Utiliza la recta para pronosticar el tiempo récord en 1985, y compáralo con la marca real de 226.3 segundos.

d) Interpreta la pendiente de esta recta.

3.4 Definición de función

La noción de **correspondencia** se presenta a menudo en la vida diaria. En la próxima ilustración damos algunos ejemplos.

ILUSTRACIÓN

Correspondencia

- A cada libro de una biblioteca le corresponde la cantidad de páginas de ese libro.
- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.
- Si la temperatura del aire se registra durante todo un día, a cada instante le corresponde una temperatura.

En cada correspondencia de la ilustración anterior intervienen dos conjuntos, D y E. En la primera ilustración, D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D corresponde un entero positivo y en E; es decir, la cantidad de páginas del libro.

A veces describimos las correspondencias mediante diagramas del tipo que se presenta en la figura 36, donde los conjuntos D y E están representados por puntos dentro de regiones del plano. La flecha curva indica que el elemento y de E corresponde al elemento x de D. Los dos conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho, muchas veces ocurre que $D = E$. Es importante observar que *para cada x en D, corresponde exactamente una y en E*. Ahora bien, el mismo elemento de E puede corresponder a diversos elementos de D; por ejemplo, dos libros con la misma cantidad de páginas, dos personas con la misma fecha de nacimiento, y la temperatura puede ser la misma a diferentes horas.

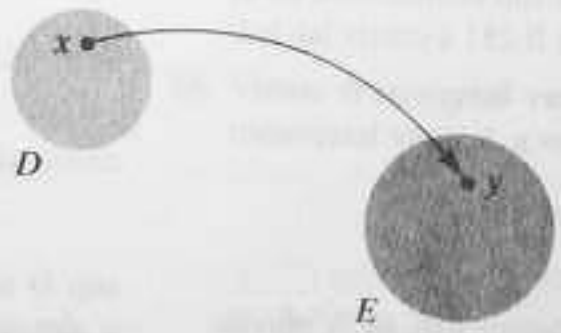


FIGURA 36

En la mayor parte de nuestro trabajo, D y E serán conjuntos de números. Para ilustrar lo anterior, D y E denotarán el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales, y a todo número real x le asignaremos su cuadrado x^2. Esto nos dará una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Cada una de nuestras ilustraciones de una correspondencia es una *función*, que se define a continuación.

www.elsolucionario.net

Definición de función

Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna exactamente un elemento y de E a cada elemento x de D.

El elemento y de E es el **valor** de f en x (o la **imagen** de x bajo f) y se denota con $f(x)$, que se lee "f de x". El conjunto D es el **dominio** de la función. El **rango** de f es el subconjunto R de E formado por todos los valores posibles $f(x)$ para x en D. Observarás que algunos elementos del conjunto E quizá no estén en el rango R de f.

Considera el diagrama de la figura 37. Las flechas curvas indican que los elementos $f(w)$, $f(z)$, $f(x)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos w, z, x y a de D. *A cada elemento de D hay asignado exactamente un valor de función en E;* sin embargo, un elemento distinto de D, como w y z en la figura 37, puede tener el mismo valor en E.

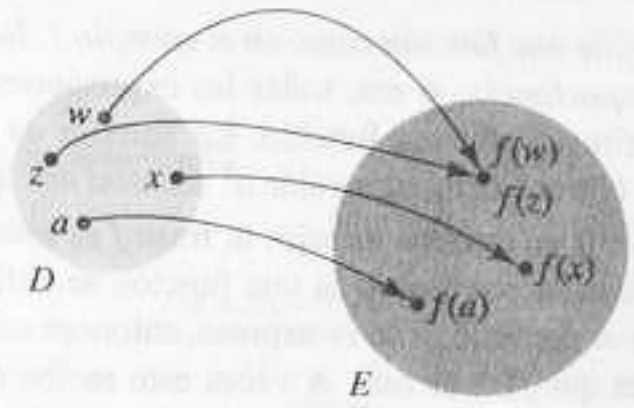
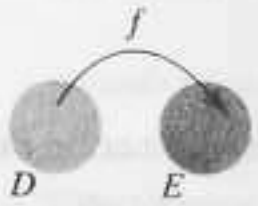


FIGURA 37

Los simbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \qquad f: D \to E, \qquad \text{y}$$



significan que f es una función de D a E, y decimos que f **transforma a** D *en* E. En un principio las notaciones f y $f(x)$ pueden ser confusas. Recuerda que f representa la función; no es D ni E. Por su lado, $f(x)$ es un elemento del rango R —el elemento que la función f asigna al elemento x, que está en el dominio D.

Dos funciones f y g de D a E son **iguales** y escribimos

$$f = g \text{ siempre que } f(x) = g(x) \text{ para toda } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 *Determinación de los valores de función*

Sea f la función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$.

a) Encuentra $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a + b)$, y $f(a) + f(b)$, donde a y b son números reales.

b) ¿Cuál es el rango de f?

www.elsolucionario.net

Solución **a)** Encontramos valores de f al sustituir x en la ecuación $f(x) = x^2$:

$$f(-6) = (-6)^2 = 36$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$f(a) + f(b) = a^2 + b^2$$

b) Por definición, el rango de f está formado por todos los números de la forma $f(x) = x^2$ para x en $\mathbb{R}$. En vista de que el cuadrado de todo número real es no negativo, el intervalo está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Además, todo número real no negativo c es un valor de f porque $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$; por lo tanto, el intervalo de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

Si se define una función como en el ejemplo 1, los símbolos usados para la función y variable no tienen importancia; o sea, todas las expresiones del tipo de $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen la misma función. Lo anterior es cierto porque si a es cualquier número del dominio, se obtiene el mismo valor a^2 sea cual sea la expresión que se utilice.

En el resto de nuestro trabajo, la frase *f es una función* significa que dominio y rango son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el ejemplo 1, y el dominio D no se expresa, entonces consideramos que D es la totalidad de números reales x tales que $f(x)$ es real. A veces esto recibe el nombre de **dominio implicado** de f. Para ilustrar lo anterior, si $f(x) = \sqrt{x-2}$, el dominio implicado es el conjunto de números reales x tal que $\sqrt{x-2}$ es real; esto es, $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$; por lo tanto, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, decimos que *f está definida en x* o que *$f(x)$ existe*. Si un conjunto S está contenido en el dominio, *f está definida en S*. El concepto *f no está definida en x* quiere decir que x no está en el dominio de f.

EJEMPLO 2 *Determinación de valores de función*

Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{1-x}$.

a) Encuentra el dominio de g.

b) Halla $g(5)$, $g(-2)$, $g(-a)$ y $-g(a)$.

Solución **a)** La expresión $\sqrt{4+x}/(1-x)$ es un número real si y sólo si el radicando $4 + x$ es no negativo y el denominador $1 - x$ no es igual a 0; por lo tanto, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4 + x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1 - x \neq 0$$

o bien, lo que es igual,

$$x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$$

Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como $[-4, 1) \cup (1, \infty)$.

b) Para hallar valores de g, sustituimos con x:

$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

www.elsolucionario.net

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

$$-g(a) = -\frac{\sqrt{4+a}}{1-a} = \frac{\sqrt{4+a}}{a-1}$$

La expresión

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(con $h \neq 0$), es de especial interés en cálculo y por lo común se llama **cociente de diferencia.**

EJEMPLO 3 *Simplificación de un cociente de diferencia*

Simplifica el cociente de diferencia

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

con la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$.

Solución

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^2+6(x+h)-4]-[x^2+6x-4]}{h} \quad \text{definición de } f$$

$$= \frac{(x^2+2xh+h^2+6x+6h-4)-(x^2+6x-4)}{h} \quad \text{expandir numerador}$$

$$= \frac{(x^2+2xh+h^2+6x+6h-4)-(x^2+6x-4)}{h} \quad \text{restar términos}$$

$$= \frac{2xh+h^2+6h}{h} \quad \text{simplificar}$$

$$= \frac{h(2x+h+6)}{h} \quad \text{factorizar } h$$

$$= 2x+h+6 \quad \text{cancelar } h \neq 0$$

A menudo las gráficas sirven para describir la variación de las cantidades físicas; por ejemplo, un científico puede usar la gráfica de la figura 38 con objeto de indicar la temperatura T de cierta solución en diferentes tiempos t durante un experimento. El diagrama muestra que la temperatura aumentó en forma gradual del tiempo $t = 0$ al tiempo $t = 5$, no cambió entre $t = 5$ y $t = 8$, y luego disminuyó con rapidez de $t = 8$ a $t = 9$.

Análogamente, si f es una función, podemos emplear una gráfica para indicar el cambio de $f(x)$ a medida que x varía en todo el dominio de f. En términos específicos, tenemos esta definición:

www.elsolucionario.net

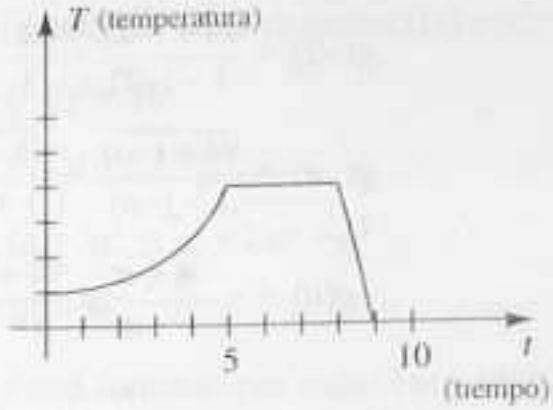


FIGURA 38

Definición de gráfica de una función

La **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f.

Con frecuencia colocamos la leyenda $y = f(x)$ en un dibujo de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, la coordenada y igual a b es el valor de función $f(a)$, según se ilustra en la figura 39. La figura muestra el dominio de f (conjunto de valores posibles de x) y el intervalo de f (valores correspondientes de y). Aun cuando hemos trazado el dominio y el intervalo como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

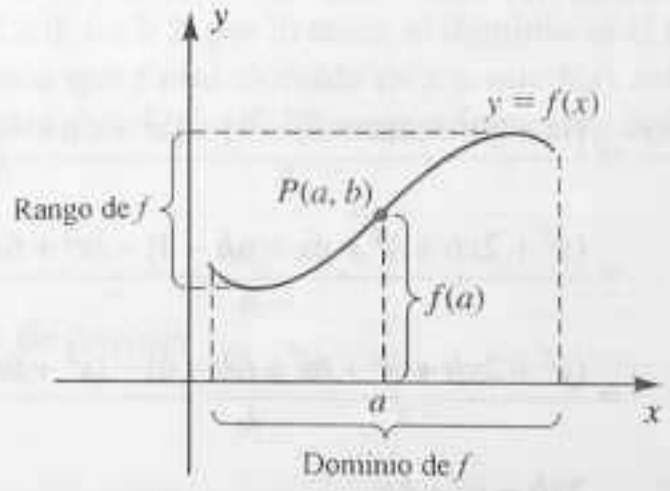


FIGURA 39

Puesto que como hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a del dominio de f, sólo *un* punto de la gráfica de f tiene una coordenada x igual a a. En general, la siguiente prueba gráfica ayuda a establecer si una gráfica es la gráfica de una función.

Prueba de recta vertical

La gráfica de un conjunto de puntos de un plano coordenado es la gráfica de una función si toda recta vertical corta la gráfica en un punto cuando mucho.

Por lo tanto, *toda recta vertical corta la gráfica de una función en un punto cuando mucho*; en consecuencia, la gráfica de una función no puede ser una figura circular, pues una recta vertical podría cortarla en más de un punto.

www.elsolucionario.net

Las intersecciones x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman **ceros** de la función. La intersección y de la gráfica es $f(0)$, si existe.

EJEMPLO 4 *Trazado de la gráfica de una función*

Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$.

a) Traza la gráfica de f.

b) Encuentra el dominio y el rango de f.

Solución **a)** Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. La próxima tabla enumera las coordenadas de varios puntos de la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

Al trazar los puntos se obtiene el dibujo de la figura 40. Observarás que la abscisa al origen es 1 y no hay ordenada al origen.

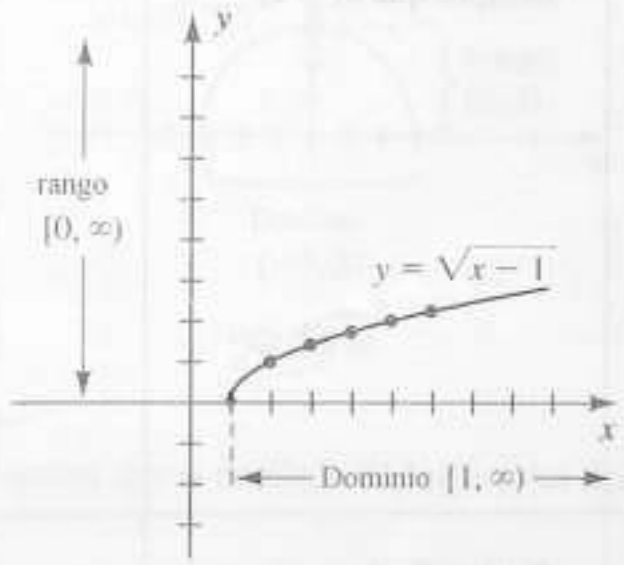


FIGURA 40

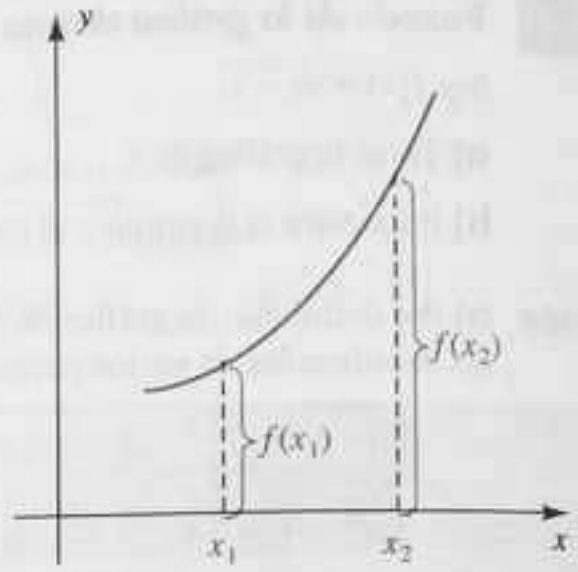
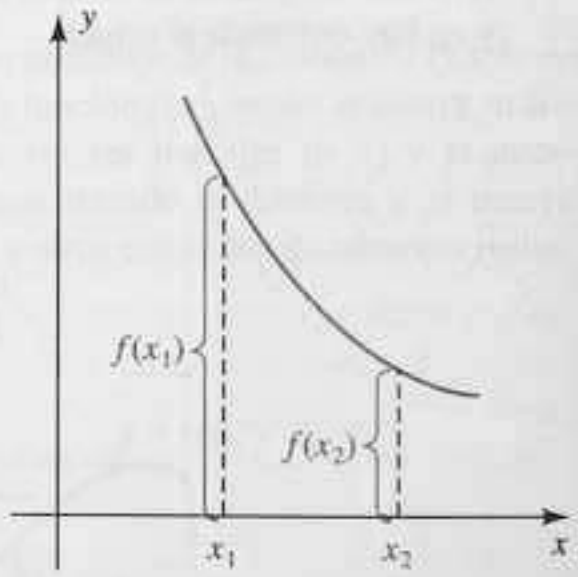
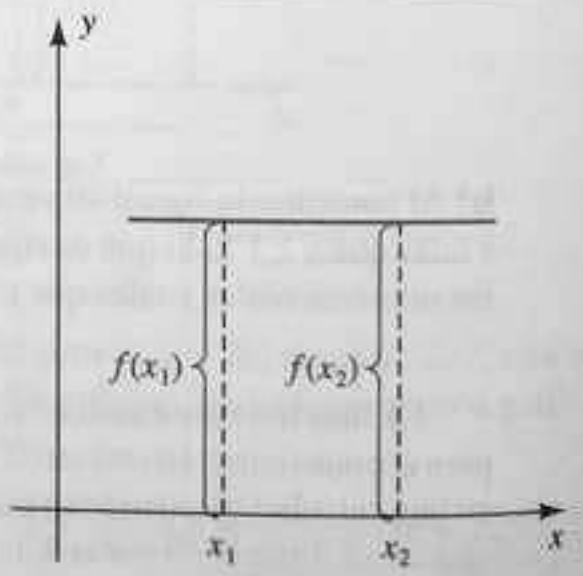
b) Al consultar la figura 40 vemos que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ o, lo que es equivalente, el intervalo $[1, \infty)$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$ o, lo que es equivalente, $[0, \infty)$.

La **función raíz cuadrada,** definida por $f(x) = \sqrt{x}$, tiene una gráfica similar a la de la figura 40 pero el punto extremo está en $(0, 0)$. El valor y de un punto de esta gráfica es la cifra que se visualiza en una calculadora cuando se pide raíz cuadrada. Esta relación gráfica puede ayudarnos a recordar que $\sqrt{9}$ es 3 y que $\sqrt{9}$ *no es* ± 3. Del mismo modo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$ suelen llamarse **función de elevar al cuadrado, función de elevar al cubo** y **función de raíz cúbica,** respectivamente.

En el ejemplo 4, a medida que x aumenta, igual ocurre con el valor de la función $f(x)$ y decimos que la gráfica de f *sube* (Fig. 40). Consideramos que una función de este tipo es *creciente*. Para ciertas funciones, $f(x)$ disminuye a medida que x aumenta. En este caso la gráfica *cae* y f es una función *decreciente*. En general, manejaremos funciones que aumentan o disminuyen en un intervalo I, según se describe en la próxima tabla, donde x_1 y x_2 denotan números en I.

www.elsolucionario.net

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Terminología	Definición	Interpretación gráfica
f es **creciente** en un intervalo I	$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es **decreciente** en un intervalo I	$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es **constante** en un intervalo I	$f(x_1) = f(x_2)$ para toda x_1 y x_2	

Un ejemplo de *función creciente* es la **función identidad,** cuya ecuación es $f(x) = x$ y cuya gráfica es la recta que pasa por el origen con pendiente 1. Un ejemplo de *función decreciente* es $f(x) = -x$, ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente -1. Si $f(x) = c$ para todo número real x, entonces f se llama *función constante*.

www.elsolucionario.net

Utilizaremos en forma indistinta las frases *f es creciente* y *f(x) es creciente*, al igual que los términos *decreciente* y *constante*.

EJEMPLO 5 ***Uso de una gráfica para hallar el dominio, rango y dónde aumenta o disminuye una función***

Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

a) Traza la gráfica de *f*.

b) Encuentra el dominio y rango de *f*.

c) Halla los intervalos en que *f* crece o decrece.

Solución **a)** Por definición, la gráfica de *f* es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Por nuestro trabajo con círculos en la sección 3.2 sabemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo de radio 3 con centro en el origen. Al despejar *y* de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ obtenemos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Deducimos que la gráfica de *f* es la *mitad superior* del círculo (Fig. 41).

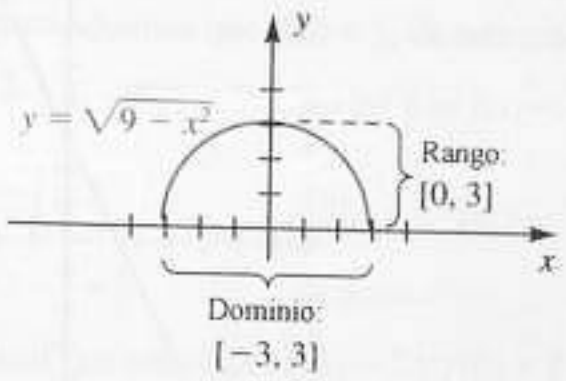


FIGURA 41

b) Al consultar la figura 41, vemos que el dominio de *f* está cerca del intervalo [−3, 3] y el rango de *f* es el intervalo [0, 3].

c) La gráfica sube a medida que *x* aumenta de −3 a 0, así que *f* se incrementa en el intervalo cerrado [−3, 0]; por lo tanto, según se aprecia en la tabla anterior, si $x_1 < x_2$ en [−3, 0], entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (observa que *quizá* $x_1 = -3$ o bien $x_2 = 0$).

La gráfica cae conforme *x* aumenta de 0 a 3, de manera que *f* decrece en el intervalo cerrado [0, 3]. En este caso, la tabla indica que si $x_1 < x_2$ en [0, 3], entonces $f(x_1) > f(x_2)$ (notarás que *posiblemente* $x_1 = 0$ o bien $x_2 = 3$).

El tipo de función que viene es uno de los más básicos en álgebra.

Definición de función lineal

Una función *f* es función lineal si

$$f(x) = ax + b,$$

donde *x* es cualquier número real y *a* y *b* son constantes.

La gráfica de *f* de la definición anterior es la gráfica de $y = ax + b$, que, por la forma pendiente-intersección, es una recta con pendiente *a* y ordenada al origen igual a *b*; por lo tanto,

la gráfica de una función lineal es una recta. Dado que $f(x)$ existe para toda x, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Según se ilustra en el próximo ejemplo, si $a \neq 0$, el rango de f también es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 6 ***Trazado de la gráfica de una función lineal***

Sea $f(x) = 2x + 3$.

a) Traza la gráfica de f.

b) Encuentra el dominio y rango de f.

c) Determina donde f es creciente o decreciente.

Solución **a)** Puesto que $f(x)$ tiene la forma $ax + b$, con $a = 2$ y $b = 3$, f es una función lineal. La gráfica de $y = 2x + 3$ es una recta con pendiente 2 y ordenada al origen igual a 3 (Fig. 42).

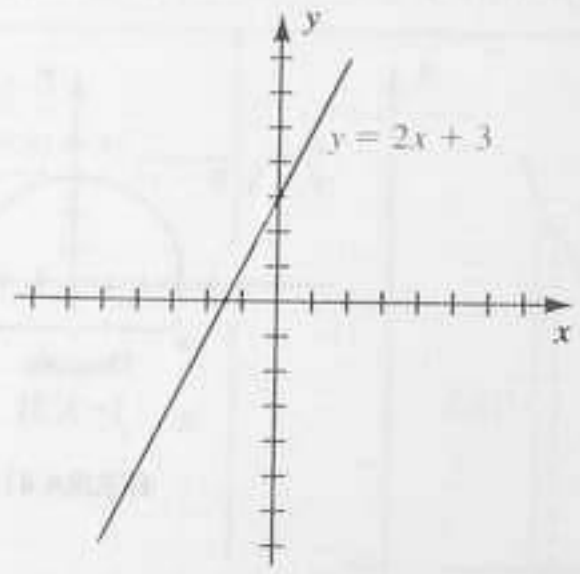


FIGURA 42

b) Con base en la gráfica vemos que x y y pueden ser cualesquier números reales, así que tanto el dominio como el rango de f son $\mathbb{R}$.

c) En vista de que la pendiente a es positiva, la gráfica de f sube a medida que x aumenta; esto es, $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$; por lo tanto, f crece en todo su dominio.

En aplicaciones a veces es necesario determinar una función lineal específica de los datos dados, igual que en este ejemplo:

EJEMPLO 7 ***Determinación de una función lineal***

Si f es una función lineal tal que $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$, encuentra $f(x)$, donde x es cualquier número real.

Solución Por la definición de función lineal, $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes. Además, los valores de la función dada indican que los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 3)$ están en la gráfica de f; esto es, en la recta $y = ax + b$ de la figura 43. La pendiente a de esta recta es

www.elsolucionario.net

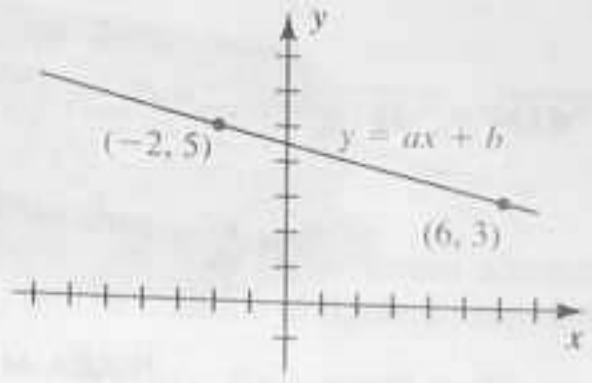


FIGURA 43

$$a = \frac{5-3}{-2-6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4},$$

y por lo tanto, $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b.$$

A fin de hallar el valor de b, aprovechamos que $f(6) = 3$, de esta manera:

$$f(6) = -\tfrac{1}{4}(6) + b \qquad \text{sea } x = 6 \text{ en } f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b$$

$$3 = -\tfrac{3}{2} + b \qquad f(6) = 3$$

$$b = 3 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{2} \qquad \text{despejar } b$$

En consecuencia, la función lineal que satisface $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$ es

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{9}{2}.$$

Muchas fórmulas que se presentan en matemáticas y ciencias determinan funciones; por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para encontrar el área A de un círculo de radio r asigna exactamente un valor de A a cada número real positivo r. Esto define una función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y podemos escribir $A = f(r)$. La letra r, que denota un número arbitrario del dominio de f, se llama **variable independiente.** La letra A, que representa un número del rango de f, es una **variable dependiente,** puesto que su valor depende del número asignado a r. Si dos variables r y A están relacionadas de este modo, *A es una función de r*. En aplicaciones, las variables independiente y dependiente a veces se llaman **variable de entrada** y **de salida,** respectivamente. Como otro ejemplo, si un automóvil se desplaza a una velocidad uniforme de 50 mph, la distancia d (en mi) recorrida en el tiempo t (en h) está dada por $d = 50t$ y, por lo tanto, *la distancia d es una función del tiempo t.*

EJEMPLO 8 ***Expresión del volumen de un tanque como función de su radio***

Hay que fabricar un tanque de acero para gas en forma de cilindro circular recto de 10 ft de altura, con una semiesfera unida a cada extremo. Aún no se establece el radio r. Expresa el volumen V (en ft^3) del tanque como función de r (en ft).

Solución El tanque aparece en la figura 44. Hallamos el volumen de la parte cilíndrica del tanque multiplicando la altura de 10 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto nos dará

$$\text{Volumen del cilindro} = 10(\pi r^2) = 10\pi r^2.$$

www.elsolucionario.net

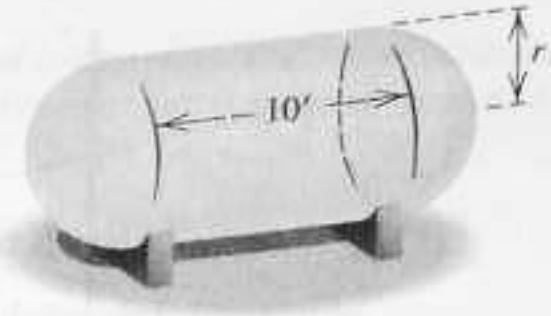


FIGURA 44

Los dos extremos semiesféricos, considerados juntos, forman una esfera de radio r. Con la fórmula para encontrar el volumen de una esfera, obtenemos

$$\text{Volumen de los dos extremos} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Por lo tanto, el volumen V del tanque es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 10\pi r^2.$$

Esta fórmula expresa V como función de r. En forma factorizada,

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 30) = \tfrac{2}{3}\pi r^2(2r + 15).$$

EJEMPLO 9 *Expresión de una distancia como función del tiempo*

Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo, uno hacia el oeste a razón de 17 mph y el otro al sur a 12 mph. Si t es el tiempo (en h) después de su salida, expresa la distancia d entre los barcos como función de t.

Solución Para ayudar a visualizar el problema, comencemos por elaborar un dibujo y etiquetarlo (Fig. 45). Por el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2, \qquad \text{o} \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

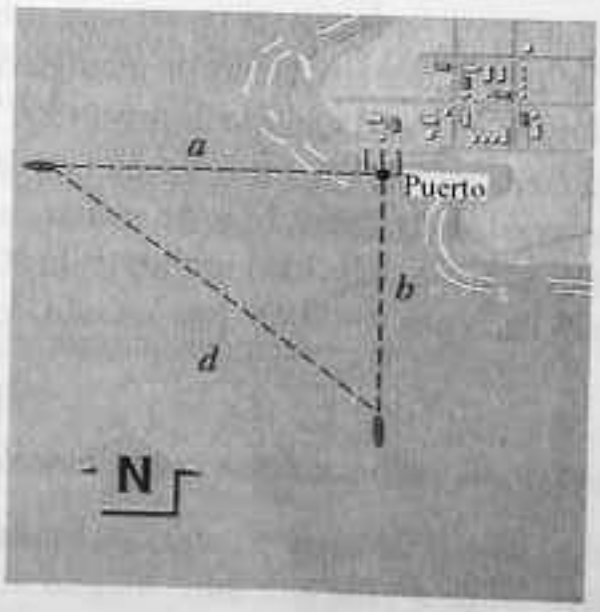


FIGURA 45

Puesto que la distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades con 17 y 12, respectivamente

$$a = 17t \qquad \text{y} \qquad b = 12t.$$

www.elsolucionario.net

La sustitución en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ nos dará

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \approx (20.8)t.$$

Los pares ordenados sirven para obtener un acceso alternativo a las funciones. Primero observamos que una función f de D a E define el siguiente conjunto W de pares ordenados:

$$W = \{(x, f(x)): x \text{ está en } D\}$$

Por lo tanto, W está formado por todos los pares ordenados tales que el primer número x en D y el segundo número es el valor de la función $f(x)$. En el ejemplo 1, donde $f(x) = x^2$, W es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (x, x^2). Es importante notar que, *para cada x, hay exactamente un par ordenado* (x, y) *en W con x en la primera posición.*

A la inversa, si comenzamos con un conjunto W de pares ordenados tales que cada x en D aparece exactamente una vez en la primera posición de un par ordenado, entonces W establece una función. Esto es, para cada x en D hay exactamente un par (x, y) en W; luego, haciendo que y corresponda a x, obtenemos una función con dominio D. El rango consiste en todos los números reales y que aparecen en la segunda posición de los pares ordenados.

Del análisis anterior inferimos que el próximo enunciado también puede usarse como definición de función.

Definición alternativa de función

Una **función** con dominio D es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada x en D, hay exactamente un par ordenado (x, y) en W con x en primera posición.

En términos de esta definición los pares ordenados $(x, \sqrt{x-1})$ establecen la función del ejemplo 4 dado por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ahora bien, si

$$W = \{(x, y): x^2 = y^2\},$$

entonces W *no es* una función, puesto que para una x dada puede haber más de un par en W con x en la primera posición; por ejemplo, si $x = 2$, entonces $(2, 2)$ y $(2, -2)$ están en W.

En el ejemplo adjunto presentamos cómo estudiar algunos de los conceptos de esta sección con ayuda de una graficadora. De aquí en adelante, al establecer asignaciones en una graficadora, con frecuencia nos referiremos a las variables Y_1 y Y_2 como las *funciones* Y_1 y Y_2.

EJEMPLO 10 *Análisis de la gráfica de una función*

Sea $f(x) = x^{2/3} - 3$.

a) Encuentra $f(-2)$.

b) Traza la gráfica de f.

c) Expresa el dominio y rango de f.

d) Señala los intervalos en que f crece o decrece.

e) Calcula las intersecciones x de la gráfica con una precisión de un lugar decimal.

www.elsolucionario.net

Solución En el ejemplo 9 del apéndice I se dan algunas secuencias específicas de tecleo de la TI-82 para las partes **a)** y **b)**.

a) Una representación de f en una calculadora puede adoptar la forma

$$\text{X\^{}(2/3)} - 3 \quad \text{o} \quad \text{(X\^{}(1/3))\^{}2} - 3 \quad \text{o} \quad \text{(X\^{}2)\^{}(1/3)} - 3.$$

Asignamos una de estas expresiones a la función Y_1. Para hallar el valor de Y_1 en $x = -2$, primero damos el valor -2 a una ubicación de memoria identificada como X. Por lo general esto se hace con una operación de "guardar" o "asignar" en una calculadora o computadora. En seguida definimos el valor de Y_1 ordenando a la computadora que indique el contenido de la ubicación que contenga el valor de Y_1. Este proceso de hallar un valor de Y_1 se denomina "preguntar por Y_1". Al inquirir por Y_1 vemos que su valor es aproximadamente -1.41 (esto es, $f(-2) \approx -1.41$). Ten en cuenta que no todas las calculadoras procesan los exponentes racionales en la misma forma. Si no obtuviste esta respuesta para $f(-2)$, cambia la representación de Y_1 antes de seguir.

b) Con una pantalla en $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ para graficar Y_1, obtenemos una imagen similar a la de la figura 46. La parte en forma de V de la gráfica de f en $x = 0$ se llama **cúspide.**

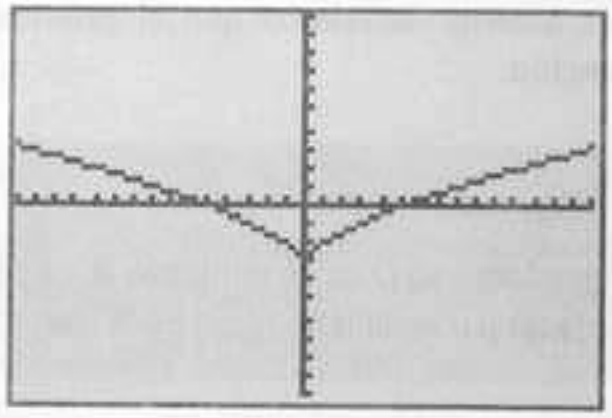


FIGURA 46 $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$

c) El dominio de f es $\mathbb{R}$, ya que se puede introducir cualquier valor para x. La figura indica que $y \geq -3$, así que concluimos que el rango de f es $[-3, \infty)$.

d) Con base en la figura, f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.

e) Usamos la función zoom o de root y encontramos que la intersección x positiva en la figura 46 es de unos 5.2. Puesto que f es simétrica con respecto al eje y, la intersección x negativa es alrededor de -5.2.

Como ayuda de referencia, algunas gráficas comunes y sus ecuaciones se detallan en el apéndice II. Buena parte de estas gráficas son gráficas de funciones.

3.4 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, halla $f(-2)$, $f(0)$ y $f(4)$.

2. Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, halla $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.

3. Si $f(x) = \sqrt{x - 4} - 3x$, halla $f(4)$, $f(8)$ y $f(13)$.

4. Si $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$, halla $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

www.elsolucionario.net

Ejercicios 5 al 8: si a y h son números reales, encuentra

a) $f(a)$ **b)** $f(-a)$ **c)** $-f(a)$ **d)** $f(a+h)$

e) $f(a)+f(h)$ **f)** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si $h \neq 0$

5. $f(x) = 5x - 2$

6. $f(x) = 3 - 4x$

7. $f(x) = x^2 - x + 3$

8. $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

Ejercicios 9 y 10: simplifica el cociente diferente

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **si** $h \neq 0$.

9. $f(x) = x^2 + 5$

10. $f(x) = 1/x^2$

Ejercicios 11 y 12: simplifica el cociente distinto

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **si** $x \neq a$.

11. $f(x) = \sqrt{x-3}$ (*Sugerencia:* racionaliza el numerador.)

12. $f(x) = x^3 - 2$

Ejercicios 13 al 16: si a es un número real positivo, encuentra

a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ **b)** $\dfrac{1}{g(a)}$ **c)** $g(\sqrt{a})$ **d)** $\sqrt{g(a)}$

13. $g(x) = 4x^2$

14. $g(x) = 2x - 5$

15. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

16. $g(x) = \dfrac{x_2}{x+1}$

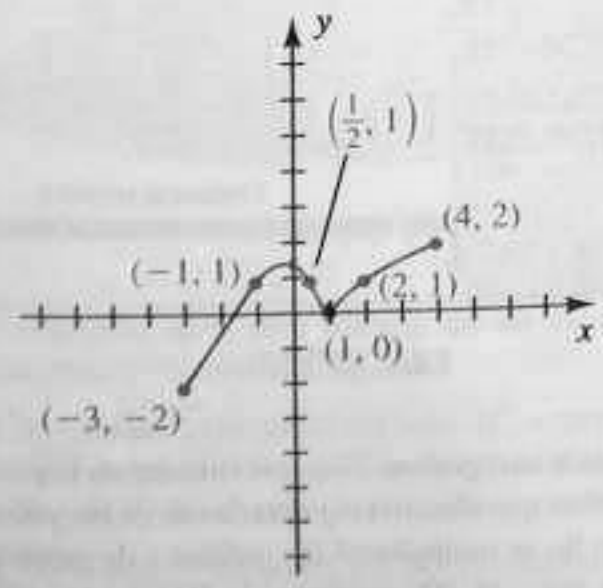
Ejercicios 17 y 18: para la gráfica de la función f dibujada en la figura, determina

a) El dominio **b) El rango** **c)** $f(1)$

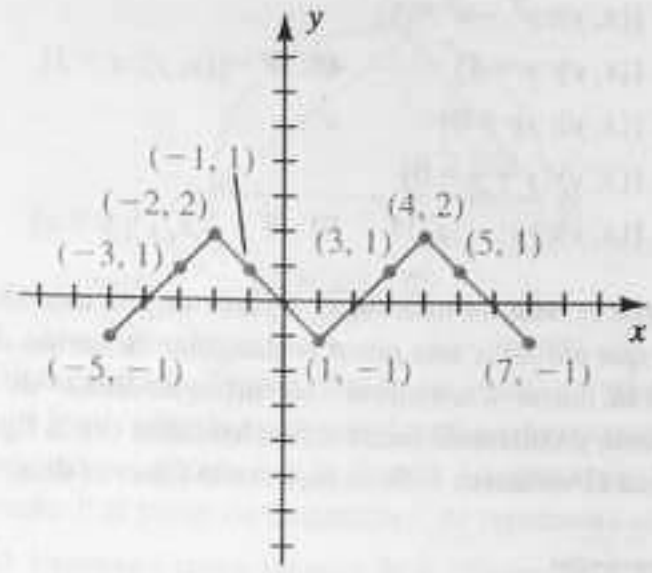
d) Toda x tal que $f(x) = 1$

e) Toda x tal que $f(x) > 1$

17.



18.



Ejercicios 19 al 30: encuentra el dominio de f.

19. $f(x) = \sqrt{2x+7}$

20. $f(x) = \sqrt{8-3x}$

21. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$

23. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-4x}$

24. $f(x) = \dfrac{4x}{6x^2+13x-5}$

25. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$

26. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

27. $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x+3}}$

29. $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

30. $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-6)}$

Ejercicios 31 al 40: a) traza la gráfica de f; b) encuentra el dominio D y el rango R de f, y c) halla los intervalos en que f es creciente, decreciente o constante.

31. $f(x) = 3x - 2$

32. $f(x) = -2x + 3$

33. $f(x) = 4 - x^2$

34. $f(x) = x^2 - 1$

35. $f(x) = \sqrt{x+4}$

36. $f(x) = \sqrt{4-x}$

37. $f(x) = -2$

38. $f(x) = 3$

39. $f(x) = -\sqrt{36-x^2}$

40. $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

Ejercicios 41 y 42: Si una función lineal f satisface las condiciones dadas, halla $f(x)$.

41. $f(-3) = 1$ y $f(3) = 2$

42. $f(-2) = 7$ y $f(4) = -2$

Ejercicios 43 al 52: determina si el conjunto W de pares ordenados es una función en el sentido de la definición alternativa de función de la página 175.

43. $W = \{(x, y): 2y = x^2 + 5\}$

44. $W = \{(x, y): x = 3y + 2\}$

45. $W = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$

46. $W = \{(x, y): y^2 - x^2 = 1\}$

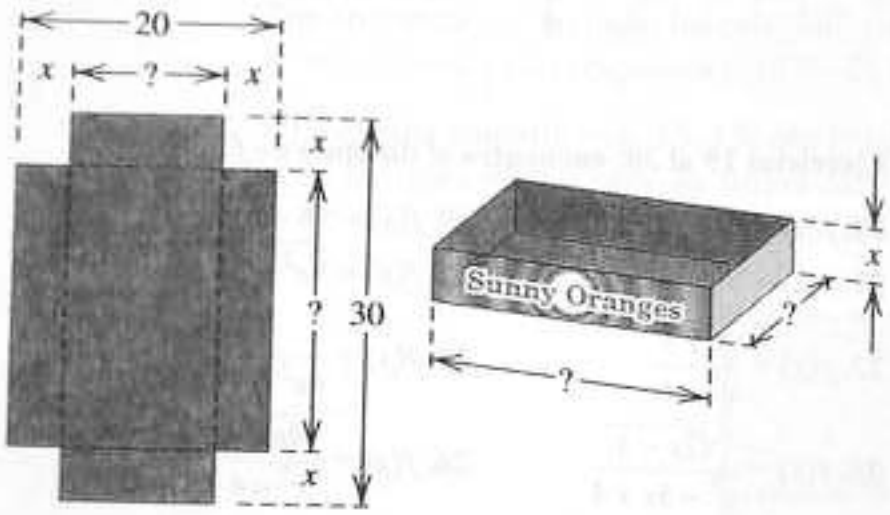
47. $W = \{(x, y): y = 3\}$ **48.** $W = \{(x, y): x = 3\}$

49. $W = \{(x, y): xy = 0\}$

50. $W = \{(x, y): x + y = 0\}$

51. $W = \{(x, y): |y| = |x|\}$ **52.** $W = \{(x, y): y < x\}$

53. Construcción de una caja A partir de una caja abierta hay que elaborar una pieza rectangular de cartón de 20 × 30 in, cortando cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y volteando hacia arriba los lados (ve la figura). Indica el volumen V de la caja como función de x.

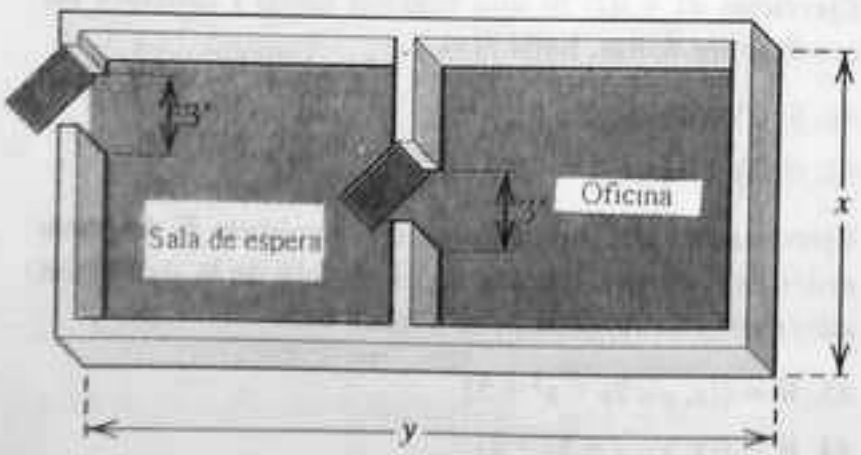


EJERCICIO 53

54. Construcción de un tanque Consulta el ejemplo 8. Se debe construir un tanque para gas propano en forma de cilindro circular recto de 10 ft de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. El radio r aún no se determina. Expresa la superficie S del tanque como función de r.

55. Dimensiones de un edificio Una pequeña oficina ha de tener 500 ft^2 de superficie (la figura exhibe un croquis simplificado).

a) Expresa la longitud y del edificio como función del ancho x.



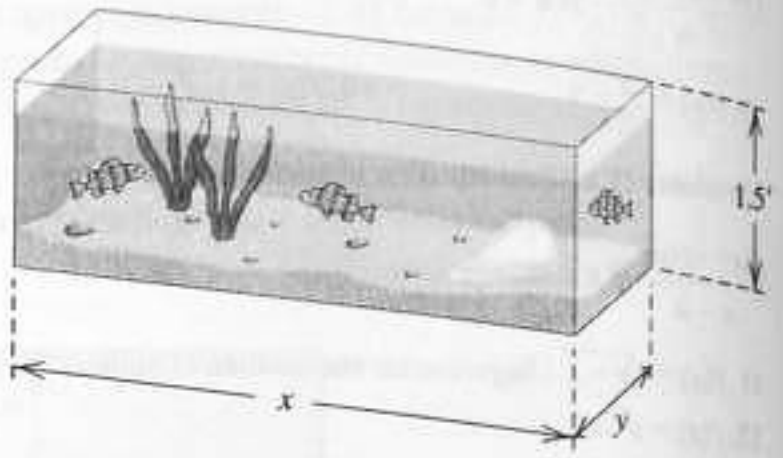
EJERCICIO 55

b) Si las paredes cuestan $100 por pie lineal, encuentra el costo C de las paredes como función del ancho x (desprecia el espacio sobre las puertas y el grueso de las paredes).

56. Dimensiones de un acuario Un acuario de 1.5 ft de altura ha de contener un volumen de 6 ft^3. Aquí x denota la longitud de la base y y el ancho (ve la figura).

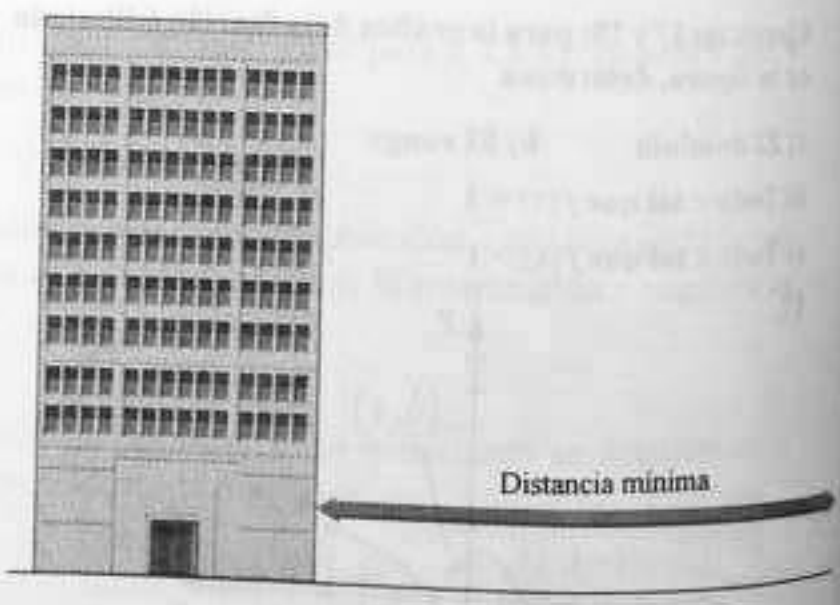
a) Halla y como función de x.

b) Halla el número total S de pies cuadrados de vidrio necesarios como función de x.



EJERCICIO 56

57. Reglamento de construcción de edificios Un concejo municipal está proponiendo un nuevo reglamento de construcción de edificios, el cual exige una distancia mínima de 100 ft entre cualquier edificio y una residencia, más otros 6 ft por cada pie de altura arriba de los 25 ft. Encuentra una función lineal para S en términos de h.



EJERCICIO 57

58. Impuesto a energéticos Hay que calcular un impuesto T a la gasolina que afectaría el costo de uso de los vehículos. Con este fin se multiplicará la cantidad x de galones que compras por 125 000 (número de BTUs por galón de

www.elsolucionario.net

gasolina), y luego se multiplica el total de BTUs por el impuesto; esto es, 34.2 centavos por millón de BTUs. Encuentra una función lineal para T en términos de x.

59. Crecimiento durante la infancia A menudo, la estatura y (en in) es una función lineal de la edad t (en años) para los niños entre seis y 10 años. Un menor mide 48 in a los seis años y 50.5 in a los siete.

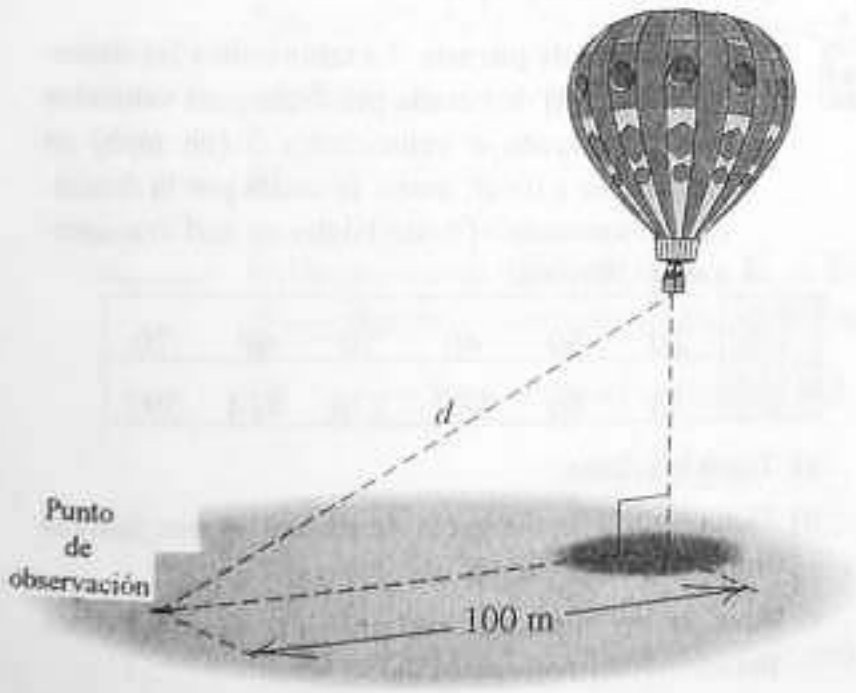
a) Expresa y como función de t.

b) Traza la recta de la parte a) e interpreta la pendiente.

c) Pronostica la estatura del niño a los 10 años.

60. Contaminación radiactiva Se ha calculado que 1000 curies de una sustancia radiactiva, introducidos en un punto del mar abierto, se extenderían por una superficie de 40 000 km^2 en 40 días. Expresa el radio r de la contaminación como función de t, suponiendo que la superficie cubierta por la sustancia radiactiva sea una función lineal del tiempo t y sea siempre circular.

61. Distancia a un globo de aire caliente A la 1:00 p.m. se suelta un globo de aire caliente que se eleva verticalmente a razón de 2 m/s. Se pone un punto de observación a 100 m del punto del suelo situado directamente bajo el globo (ve la figura). Si f denota el tiempo (en s) después de la 1:00 p.m., indica la distancia d entre el globo y el punto de observación como función de t.

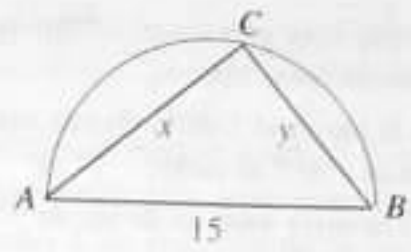


EJERCICIO 61

62. El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo de diámetro 15 (consulta la figura).

a) Si x denota la longitud del lado AC, expresa la longitud y del lado BC como función de x. (*Sugerencia*: el ángulo ACB es un ángulo recto.)

b) Da el área A del triángulo ABC como función de x y expresa el dominio de esta función.

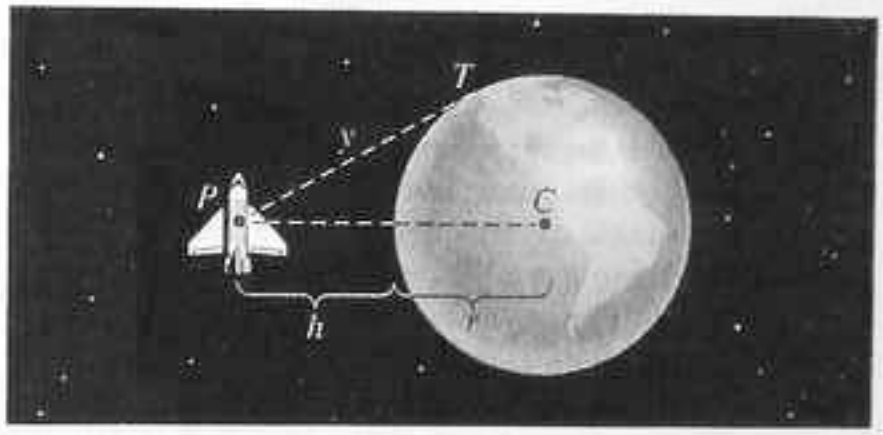


EJERCICIO 62

63. Distancia a la Tierra Desde un punto exterior P que está h unidades de un círculo de radio r, se traza una recta tangente al círculo (ve la figura). La distancia desde el punto P al punto de tangencia T se representa con y.

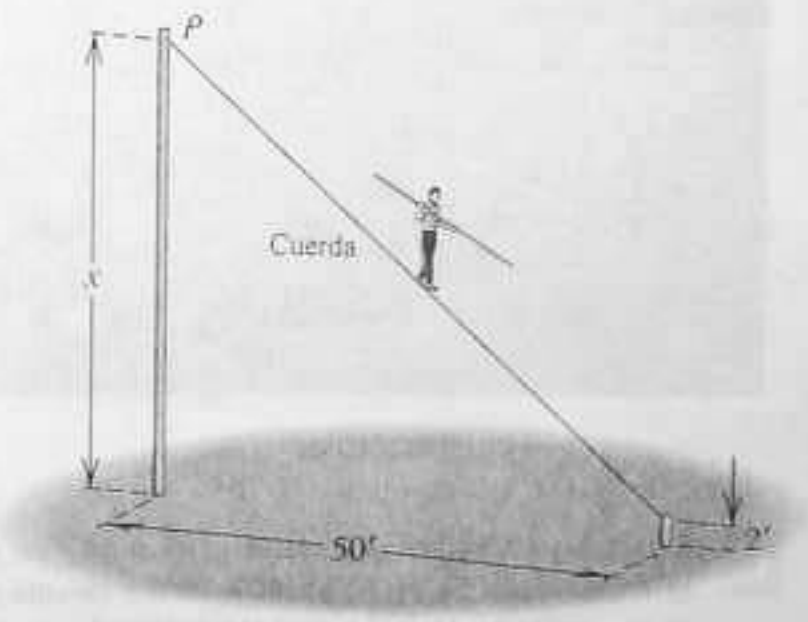
a) Expresa y como función de h. (*Sugerencia*: si c es el centro del círculo, PT es perpendicular a CT.)

b) Si r es el radio de la Tierra y h es la altitud de un transbordador espacial, entonces y es la distancia máxima a la Tierra que un astronauta puede ver desde la nave. En particular, si $h = 200$ mi y $r = 4000$ mi, calcula y.



EJERCICIO 63

64. Longitud de una cuerda floja La figura ilustra el aparato para un equilibrista. Dos postes se colocan a 50 ft



EJERCICIO 64

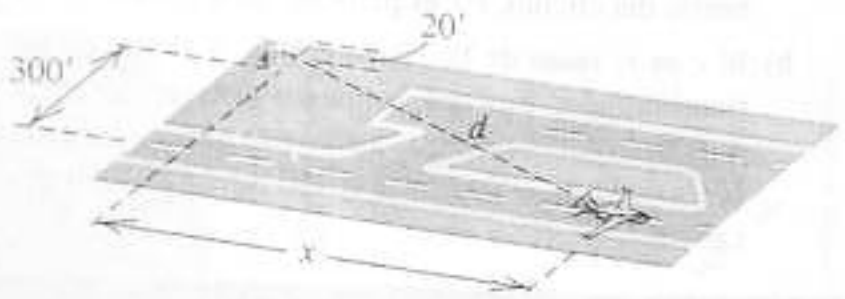
www.elsolucionario.net

uno de otro, pero aún no se determina el punto P de colocación de la cuerda.

a) Halla la longitud L de la cuerda como función de la distancia x de P al suelo.

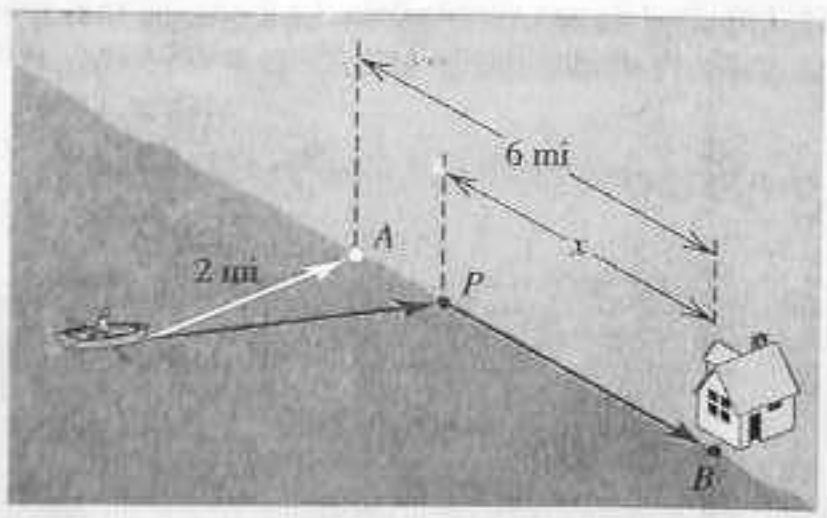
b) Si la caminata total ha de ser de 75 ft, encuentra la distancia de P al suelo.

65. Pista de aterrizaje Las posiciones relativas de una pista y una torre de control de 20 ft de altura se muestran en la figura. El comienzo de la pista está a 300 ft de la base de la torre en sentido perpendicular. Si x denota la distancia que un avión ha recorrido en la pista, escribe la distancia d entre la nave y la torre de control como función de x.



EJERCICIO 65

66. Tiempo de llegada a un destino Un remero se encuentra a 2 mi del punto más cercano de una orilla recta (representado con A) y desea llegar a una casa ubicada en un punto B a 6 mi corriente abajo en la orilla (ve la figura). Piensa remar al punto P, que está entre A y B y a x mi de la casa, y luego caminar el resto de la distancia. Supón que rema a razón de 3 millas por hora (mph) y camina a 5 mph. Ahora bien, si T es el tiempo total requerido para llegar a la casa, expresa T como función de x.



EJERCICIO 66

Ejercicios 67 al 70: a) traza la gráfica de f en el intervalo dado $[a, b]$; b) a continuación calcula el rango de f en $[a, b]$, y c) calcula los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

67. $f(x) = \dfrac{x^{1/3}}{1+x^4}$; $[-2, 2]$

68. $f(x) = x^4 - 0.4x^3 - 0.8x^2 + 0.2x + 0.1$; $[-1, 1]$

69. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$; $[-0.7, 1.4]$

70. $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1+x^4}$; $[-4, 4]$

Ejercicios 71 y 72: en los ejercicios 51 y 52 de la sección 2.5, empleamos métodos algebraicos con objeto de resolver cada una de estas ecuaciones. Ahora resuélvelas gráficamente asignando la expresión del lado izquierdo a Y_1, el número del lado derecho a Y_2 y encuentra las coordenadas x de todos los puntos de intersección de las dos gráficas.

71. a) $x^{5/3} = 32$ **b)** $x^{4/3} = 16$ **c)** $x^{2/3} = -36$
d) $x^{3/4} = 125$ **e)** $x^{3/2} = -27$

72. a) $x^{3/5} = -27$ **b)** $x^{2/3} = 25$ **c)** $x^{4/3} = -49$
d) $x^{3/2} = 27$ **e)** $x^{3/4} = -8$

73. Pantalla de calculadora La pantalla de una calculadora graficadora mide 95 pixeles de ancho y 63 de alto.

a) Indica el número total de pixeles de la pantalla.

b) Si se grafica una función en el modo de puntos, determina el número máximo de pixeles que quedarán oscuros en la pantalla.

74. Distancias de parada La tabla indica las distancias D (en ft) de parada prácticas para vehículos que se mueven a velocidades S (en mph) en superficies a nivel, como la usada por la American Association of State Highway and Transportation Officials.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

a) Traza los datos.

b) Determina si la distancia de parada es una función lineal de la velocidad.

c) Analiza las implicaciones prácticas de estos datos para conducir con seguridad.

75. Precios de autos nuevos En 1985, el precio promedio de un carro nuevo era de \$11 450, pero aumentó linealmente a \$20 021 en 1994.

a) Encuentra la función f que sea el modelo matemático del precio promedio pagado por un auto nuevo. Grafica f con los dos puntos de datos.

b) Interpreta la pendiente de la gráfica de f.

c) Estima gráficamente el año cuando el precio promedio pagado sea de \$25 000.

www.elsolucionario.net

3.5 Gráficas de funciones

En esta sección estudiaremos las ayudas para trazar las gráficas de ciertos tipos de funciones. Una función f se llama **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si $-x$ sustituye por x y, por lo tanto, por la prueba 1 de simetría de la sección 3.2, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

Una función f se denomina **non** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio. Si aplicamos la prueba 3 de simetría de la sección 3.2 a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función non es simétrica con respecto al origen.

Estos datos se resumen en las primeras dos columnas de la siguiente tabla.

Funciones pares y nones

Terminología	Definición	Ejemplo	Simetría de gráfica
f es una **función par**	$f(-x) = f(x)$ para toda x del dominio	$y = f(x) = x^2$	eje y
f es una **función non**	$f(-x) = -f(x)$ para toda x del dominio	$y = f(x) = x^3$	el origen

EJEMPLO 1 *Determinación del tipo de función (par o non)*

Determina si f es par, non o ninguna de las dos.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ **b)** $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

c) $f(x) = x^3 + x^2$

Solución En cada caso el dominio de f es $\mathbb{R}$. A fin de establecer si f es par o non, comenzamos por examinar $f(-x)$, donde x es cualquier número real.

a)
$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 \quad \text{sustituir } -x \text{ con } x \text{ en } f(x)$$
$$= 3x^4 - 2x^2 + 5 \quad \text{simplificar}$$
$$= f(x) \quad \text{definición de } f$$

Dado que $f(-x) = f(x)$, f es una función par.

b)
$$f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) \quad \text{sustituir } -x \text{ con } x \text{ en } f(x)$$
$$= -2x^5 + 7x^3 - 4x \quad \text{simplificar}$$
$$= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) \quad \text{factorizar } -1$$
$$= -f(x) \quad \text{definición de } f$$

Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es una función non.

www.elsolucionario.net

c) $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2$ sustituir $-x$ por x en $f(x)$

$= -x^3 + x^2$ simplificar

Como $f(-x) \neq f(x)$, y $f(-x) \neq -f(x)$ (observemos que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f no es ni par ni non.

En el próximo ejemplo consideramos la **función de valor absoluto** f, definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 *Trazado de la gráfica de la función de valor absoluto*

Sea $f(x) = |x|$.

a) Indica si f es par o non.

b) Gráfica f.

c) Encuentra los intervalos en que f crece o decrece.

Solución **a)** El dominio de f es $\mathbb{R}$ porque el valor absoluto de x funciona para todo número real x. Si x está en $\mathbb{R}$, entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

b) En vista de que f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$; así pues, la parte de la gráfica del primer cuadrante coincide con la recta $y = x$. Trazaremos esta semirrecta, usamos simetría y llegamos a la figura 47.

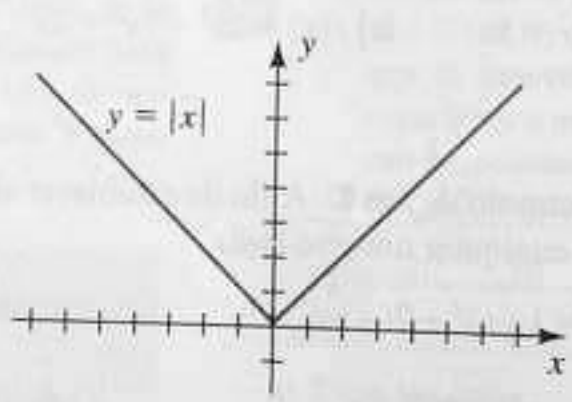


FIGURA 47

c) Al consultar la gráfica vemos que f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.

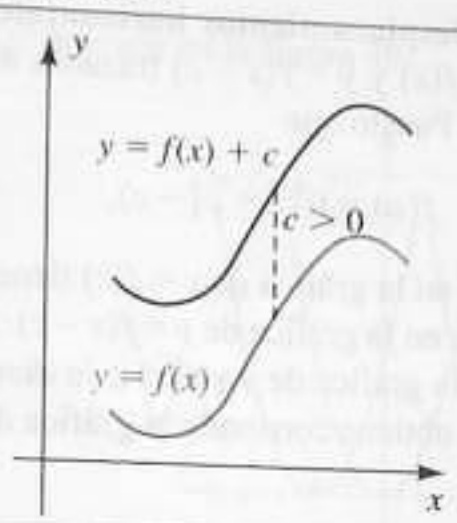
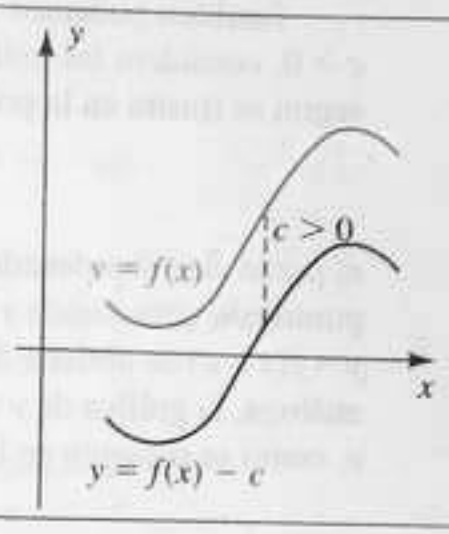
Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, es fácil graficar

$$y = f(x) + c \quad \text{y} \quad y = f(x) - c$$

para cualquier número real positivo c. Al igual que en la tabla, que sigue, para $y = f(x) + c$, se suma c a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica *hacia arriba* una distancia c. Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, se resta c de cada coordenada y, lo cual corre la gráfica de f una distancia c *hacia abajo*. Estos cambios se llaman **desplazamientos verticales** de gráficas.

www.elsolucionario.net

Desplazamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	$y = f(x) + c$ con $c > 0$	$y = f(x) - c$ con $c > 0$
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se corre verticalmente hacia arriba una distancia c	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia c
Interpretación gráfica		

EJEMPLO 3 *Desplazamiento vertical de una gráfica*

Traza la gráfica de f:

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = x^2 + 4$ **c)** $f(x) = x^2 - 4$

Solución Trazaremos todas las gráficas en el mismo plano coordenado.

a) Como $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

la función f es par; por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al eje de las y. Varios puntos de la gráfica de $y = x^2$ son (0, 0), (1, 1), (2, 4) y (3, 9). Al dibujar una curva suave que pase por estos puntos y reflejarlos en el eje y obtenemos el trazo de la figura 48. La gráfica es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba.

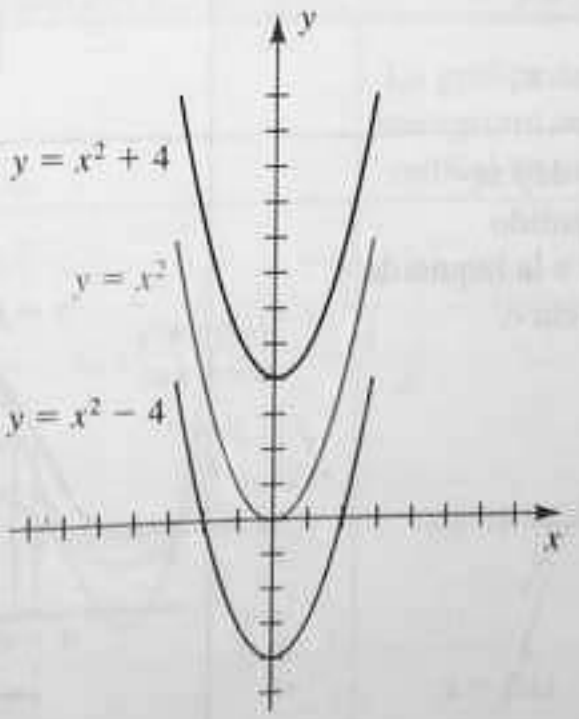


FIGURA 48

www.elsolucionario.net

b) Para graficar $y = x^2 + 4$, sumamos 4 a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = x^2$; esto es, corremos la gráfica de la parte **a)** 4 unidades hacia arriba, como en la figura.

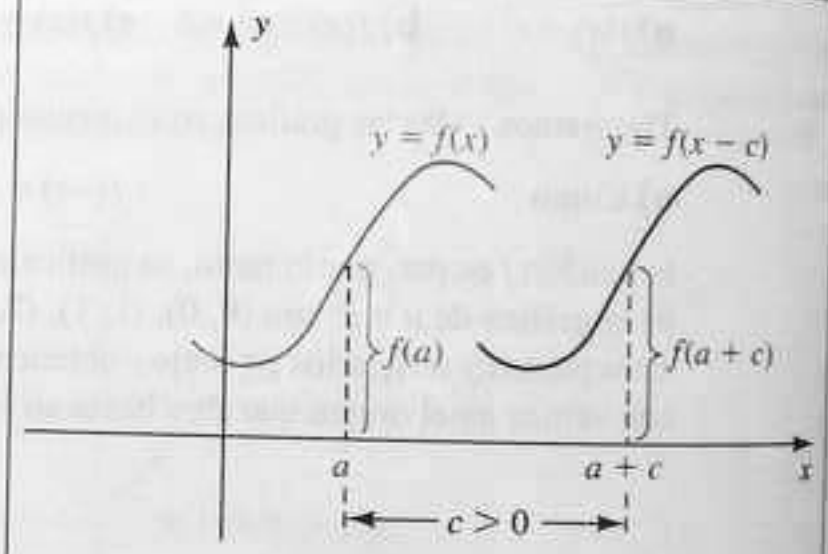
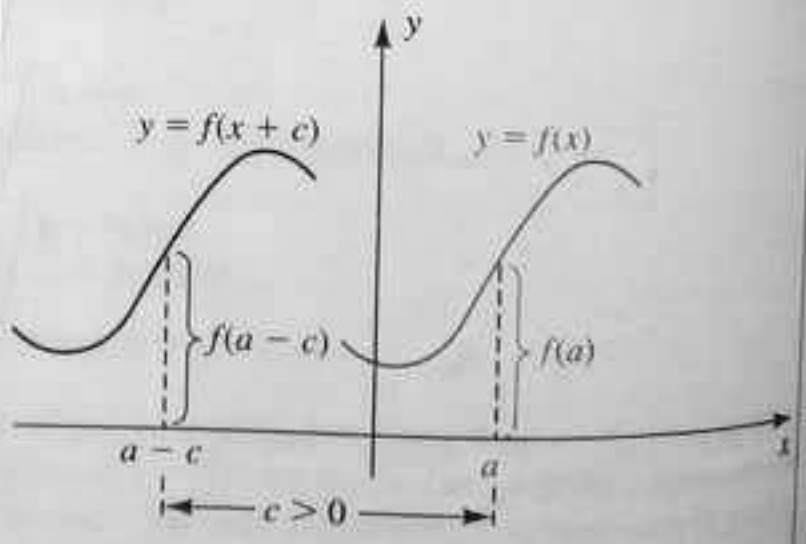
c) A fin de graficar $y = x^2 - 4$, disminuimos las coordenadas y de $y = x^2$ en 4; o sea, desplazamos la gráfica de la parte **a)** 4 unidades hacia abajo.

También podemos considerar **desplazamientos horizontales** de gráficas. En particular, si $c > 0$, considera las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano coordenado, según se ilustra en la próxima tabla. Puesto que

$$f(a) = f([a + c] - c),$$

el punto con coordenada x igual a a en la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con coordenada x igual a $a + c$ en la gráfica de $y = f(x - c)$. Esto significa que la gráfica de $y = f(x - c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ *a la derecha* una distancia c. En forma análoga, la gráfica de $y = f(x + c)$ se obtiene corriendo la gráfica de f *a la izquierda* una distancia c, como se presenta en la gráfica.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(x - c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza en sentido horizontal a la derecha una distancia c.	
$y = f(x + c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se corre en sentido horizontal a la izquierda una distancia c.	

www.elsolucionario.net

Los desplazamientos horizontales y verticales también se denominan *traslaciones*.

EJEMPLO 4 *Desplazamiento horizontal de una gráfica*

Traza la gráfica de f:

a) $f(x) = (x-4)^2$ **b)** $f(x) = (x+2)^2$

Solución La gráfica de $y = x^2$ aparece en la figura 49.

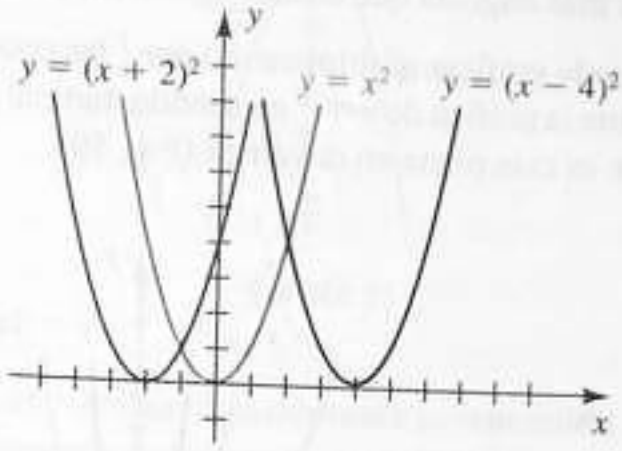


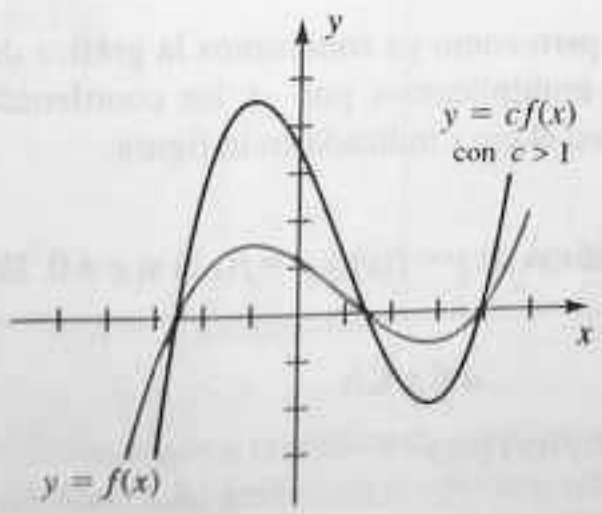
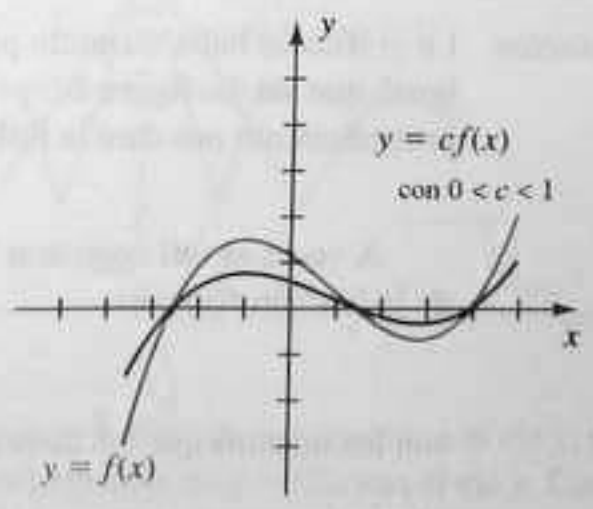
FIGURA 49

a) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ a la derecha 4 unidades nos dará la gráfica de $y = (x-4)^2$ de la figura.

b) Correr la gráfica de $y = x^2$ a la izquierda 2 unidades nos dará la gráfica $y = (x+2)^2$ de la figura.

Con objeto de obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c, *multiplicamos* por c las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$; por ejemplo, si $y = 2f(x)$, duplicamos las coordenadas y; o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ cada coordenada y. Este procedimiento se conoce como **alargar verticalmente** la gráfica de f (si $c > 1$), o **comprimir verticalmente** la gráfica (si $0 < c < 1$) y se resume en la tabla que viene.

Alargamiento y compresión vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	$y = cf(x)$ con $c > 1$	$y = cf(x) =$ con $0 < c < 1$
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se alarga en sentido vertical en un factor c.	La gráfica de f se comprime en forma vertical en un factor $1/c$.
Interpretación gráfica		

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 5 *Alargamiento o compresión vertical de una gráfica*

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 4x^2$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^2$

Solución **a)** Para graficar $y = 4x^2$, podemos consultar la gráfica de $y = x^2$ de la figura 50 y multiplicar por 4 la coordenada y de cada punto. Esto alarga verticalmente la gráfica de $y = x^2$ un factor de 4 y nos da una parábola más angosta que es más aguda en el vértice, según se ve en la figura.

b) $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede graficar multiplicando por $\frac{1}{4}$ las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = x^2$. Esto comprime la gráfica de $y = x^2$ en sentido vertical un factor de $1/\frac{1}{4} = 4$ y nos da una parábola más amplia, que es más plana en el vértice (Fig. 50).

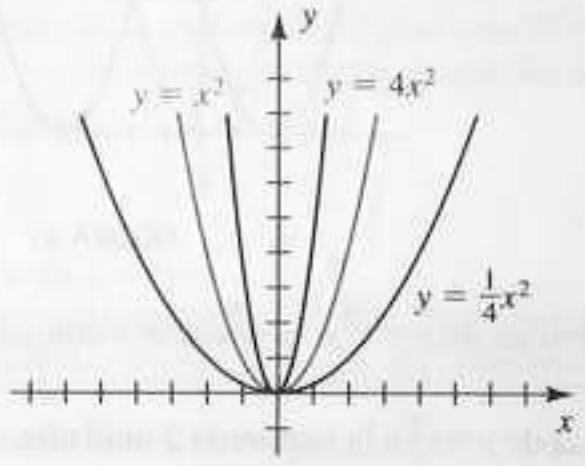


FIGURA 50

Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ multiplicando por -1 la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$; por lo tanto, todo punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentre arriba del eje x, determina un punto $(a, -b)$ de la gráfica de $y = -f(x)$ que esté abajo del eje x. En forma análoga, si (c, d) se halla abajo del eje x (esto es, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ queda arriba del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

EJEMPLO 6 *Reflejo de una gráfica en el eje x*

Traza la gráfica de $y = -x^2$.

Solución La gráfica se halla trazando puntos, pero como ya conocemos la gráfica de $y = x^2$, la dibujamos igual que en la figura 51 y luego multiplicamos por -1 las coordenadas y de puntos. Este procedimiento nos dará la reflexión en el eje x indicada en la figura.

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$ si $c \neq 0$. En este caso los valores de la función $f(x)$ para

$$a \leq x \leq b$$

son los mismos que los de la función $f(cx)$ para

$$a \leq cx \leq b \qquad \text{o bien, lo que es igual,} \qquad \frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

www.elsolucionario.net

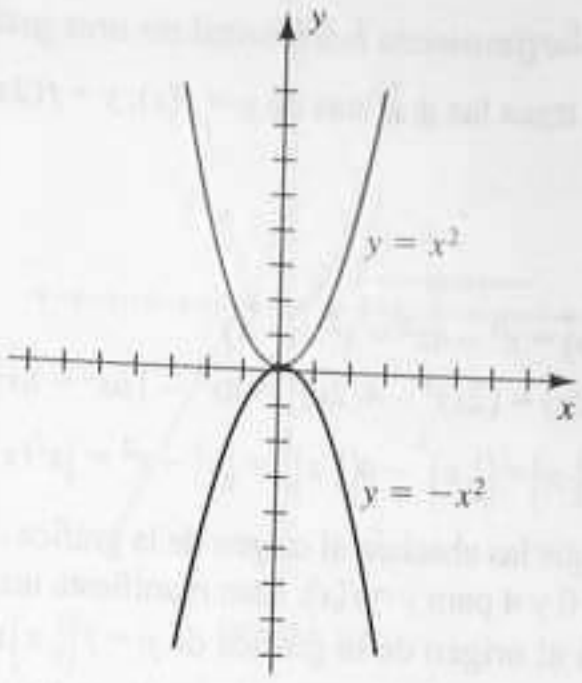
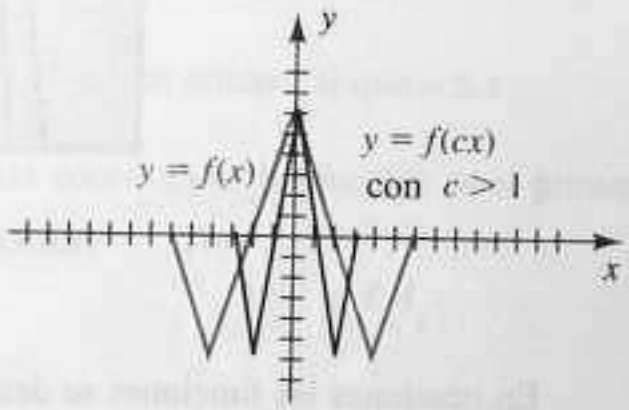
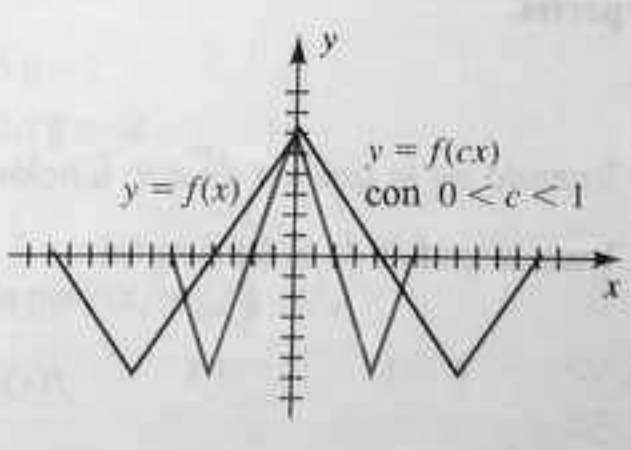


FIGURA 51

Esto significa que la gráfica de f está **horizontalmente comprimida** (si $c > 1$) u **horizontalmente alargada** (si $0 < c < 1$), de acuerdo con el resumen de la siguiente tabla.

Compresión o alargamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$ con $c > 1$	La gráfica de f se comprime en sentido horizontal en un factor de c.	
$y = f(cx)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de f se alarga horizontal en un factor de $1/c$.	

Si $c < 0$, llegamos a la gráfica de $y = f(cx)$ reflejando la gráfica de $y = f(|c|x)$ en el eje y; por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(2x)$ en el eje y. Como caso especial, la gráfica de $y = f(-x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 7 *Compresión o alargamiento horizontal de una gráfica*

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, traza las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Solución Tenemos:

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$$
$$y = f(2x) = (2x)^3 - 4(2x)^2 = 8x^3 - 16x^2 = 8x^2(x - 2)$$
$$y = f\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 - 4\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 = \tfrac{1}{8}x^3 - x^2 = \tfrac{1}{8}x^2(x - 8)$$

Observarás que las abscisas al origen de la gráfica de $y = f(2x)$ son 0 y 2, que son la mitad de las intersecciones de 0 y 4 para $y = f(x)$. Esto manifiesta una compresión horizontal en un factor de 2.

Las abscisas al origen de la gráfica de $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ son 0 y 8, que son dos veces las abscisas al origen para $y = f(x)$. Esto indica un alargamiento horizontal en un factor de $1/\frac{1}{2} = 2$.

Las gráficas, obtenidas con pantalla [−6, 15] por [−10, 4], se exhiben en la figura 52.

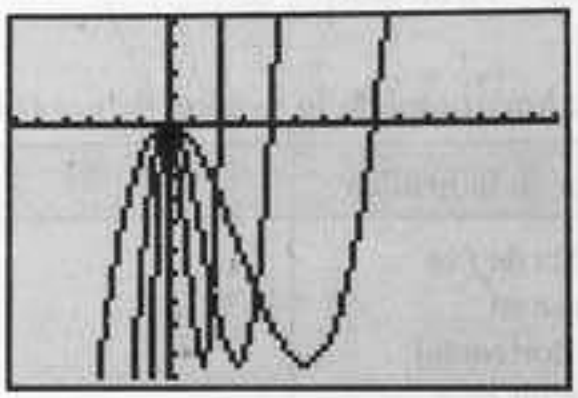


FIGURA 52 [−6, 15] por [−10, 4]

En ocasiones las funciones se describen con más de una expresión, como en los siguientes ejemplos; dichas funciones se denominan **funciones seccionadas** o **funciones definidas por partes.**

EJEMPLO 8 *Trazado de la gráfica de una función seccionada*

Traza la gráfica de la función f si

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Solución En el ejemplo 20 del apéndice I proporcionamos algunas secuencias de tecleo para la TI-82. Si $x < 0$, entonces $f(x) = 2x + 3$ y la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 3$. Esto resulta en la porción de la gráfica a la izquierda del eje y (Fig. 53). El círculo pequeño indica que el punto $(0, 3)$ *no está* en la gráfica.

www.elsolucionario.net

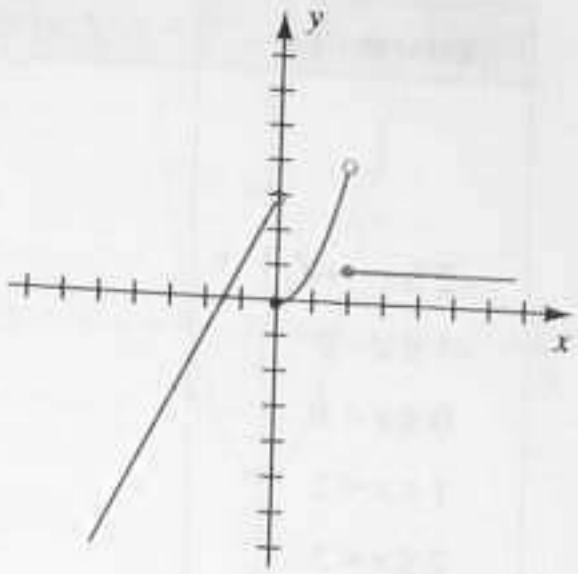


FIGURA 53

Si $0 \le x < 2$, usamos x^2 para encontrar valores de f y por lo tanto esta parte de la gráfica de f coincide con la parábola $y = x^2$, según se indica en la figura. Observarás que el punto (2, 4) no está en la gráfica.

Por último, si $x \ge 2$, los valores de f son siempre 1; así pues, la gráfica de f para $x \ge 2$ es la semirrecta horizontal de la figura 53.

Si x es un número real, definimos el símbolo $[[x]]$ de esta manera:

$$[[x]] = n, \qquad \text{donde } n \text{ es el mayor entero tal que } n \le x$$

Si identificamos a $\mathbb{R}$ con puntos en una recta coordenada, entonces n es el primer entero a la *izquierda* de (o *igual* a) x.

ILUSTRACIÓN

El símbolo $[[x]]$

- $[[0.5]] = 0$
- $[[1.8]] = 1$
- $[[\sqrt{5}]] = 2$
- $[[3]] = 3$
- $[[-3]] = -3$
- $[[-2.7]] = -3$
- $[[-\sqrt{3}]] = -2$
- $[[-0.5]] = -1$

La **función mayor entero** f está definida por $f(x) = [[x]]$.

EJEMPLO 9 *Trazo de la gráfica de la función mayor entero*

Traza la gráfica de la función mayor entero.

Solución Las coordenadas x y y de algunos puntos de la gráfica pueden enumerarse así:

www.elsolucionario.net

Valores de x	$f(x) = [[x]]$
.	.
.	.
.	.
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
.	.
.	.
.	.

Siempre que x esté entre enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal. Parte de la gráfica se traza en la figura 54. La gráfica continúa indefinidamente a derecha e izquierda.

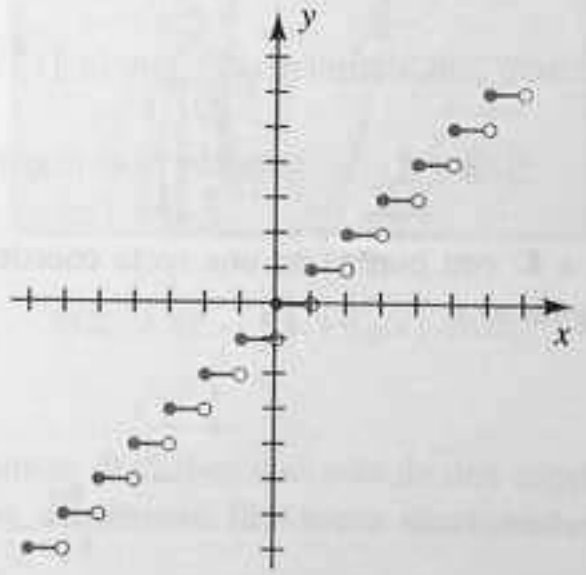


FIGURA 54

El próximo ejemplo contiene valores absolutos.

EJEMPLO 10 ***Trazo de la gráfica de una ecuación que contiene un valor absoluto***

Traza la gráfica de $y = |x^2 - 4|$.

Solución La gráfica de $y = x^2 - 4$ apareció en la figura 48 y vuelve a manejarse en la figura 55a). Observarás estos datos:

(1) Si $x \le -2$ o $x \ge 2$, luego $x^2 - 4 \ge 0$, y por lo tanto

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4.$$

www.elsolucionario.net

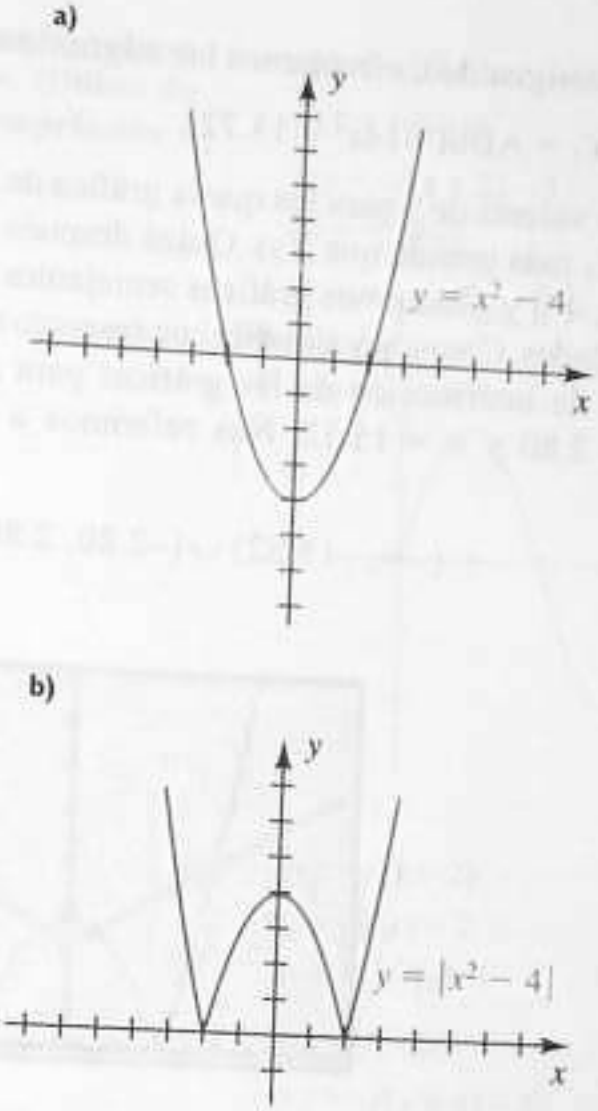


FIGURA 55

(2) Si $-2 < x < 2$, entonces $x^2 - 4 < 0$, y por lo tanto

$$|x^2 - 4| = -(x^2 - 4).$$

De (1) se deduce que las gráficas de $y = |x^2 - 4|$ y $y = x^2 - 4$ coinciden para $|x| \geq 2$. De (2) vemos que si $|x| < 2$, entonces la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el eje x. Esto nos da el trazo de la figura 55b).

En general, si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, -d)$ con d positiva, entonces la gráfica de $y = |f(x)|$ contiene al punto $Q(c, d)$; esto es, Q es la reflexión de P en el eje x. Los puntos con valores y no negativos son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$.

En el capítulo 2 usamos métodos algebraicos para resolver desigualdades con valores absolutos de polinomios de grado 1; por ejemplo

$$|2x - 5| < 7 \qquad \text{y} \qquad |5x + 2| \geq 3.$$

Es posible investigar desigualdades mucho más complicadas con una calculadora graficadora, como verás en este ejemplo.

EJEMPLO 11 *Solución gráfica de una desigualdad con valor absoluto*

Calcula las soluciones de

$$|0.14x^2 - 13.72| > |0.58x| + 11.$$

Solución Para resolver la desigualdad, efectuamos las asignaciones

$$Y_1 = \text{ABS}(0.14x^2 - 13.72) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \text{ABS}(0.58x) + 11$$

y calculamos los valores de x para los que la gráfica de Y_1 está *arriba* de la gráfica de Y_2 (ya que deseamos una Y_1 más grande que Y_2). Quizá después de varios intentos, escogemos la pantalla $[-30, 30]$ por $[0, 40]$ y obtenemos gráficas semejantes a las de la figura 56, donde cada división representa 5 unidades. Como hay simetría con respecto al eje y, es suficiente hallar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas para $x > 0$. Con la función zoom o intersect, obtenemos $x \approx 2.80$ y $x \approx 15.52$. Nos referimos a la figura 5.6 y obtenemos una solución aproximada.

$$(-\infty, -15.52) \cup (-2.80, 2.80) \cup (15.52, \infty).$$

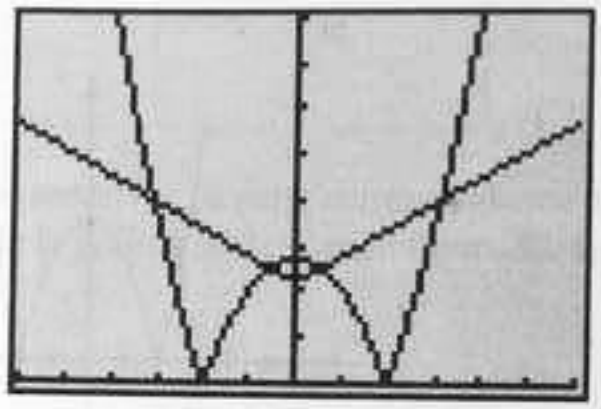


FIGURA 56 [–30, 30] por [0, 40]

Más adelante en este texto, y en cálculo, encontrarás funciones del tipo de

$$g(x) = \ln |x| \qquad \text{y} \qquad h(x) = \text{sen } |x|.$$

Ambas funciones son de la forma $y = f(|x|)$. El efecto de sustituir $|x|$ con x se puede describir de este modo: si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, d)$ con c positiva, entonces la gráfica de $y = f(|x|)$ contiene al punto $Q(-c, d)$; es decir, Q es la reflexión de P en el eje y. Los puntos del eje y ($x = 0$) son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$. Los puntos con valores negativos de x en la gráfica de $y = f(x)$ no son de la gráfica de $y = f(|x|)$, puesto que el resultado del valor absoluto es siempre no negativo.

En general, el proceso de desplazar, alargar, comprimir y reflejar una gráfica puede llamarse **transformación** de una gráfica; la gráfica resultante se denomina **transformación** de la gráfica original. El apéndice III ofrece un resumen gráfico de los tipos de transformaciones de esta sección.

3.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 10: determina si f es par, non o ninguna de las dos.

1. $f(x) = 5x^3 + 2x$
2. $f(x) = |x| - 3$
3. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5$
4. $f(x) = 7x^5 - 4x^3$
5. $f(x) = 8x^3 - 3x^2$
6. $f(x) = 12$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
8. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$
10. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

www.elsolucionario.net

Ejercicios 11 al 24: traza las gráficas de f para los valores dados de c en el mismo plano coordenado. (Utiliza de simetría, desplazamiento, alargamiento, compresión o reflexión.)

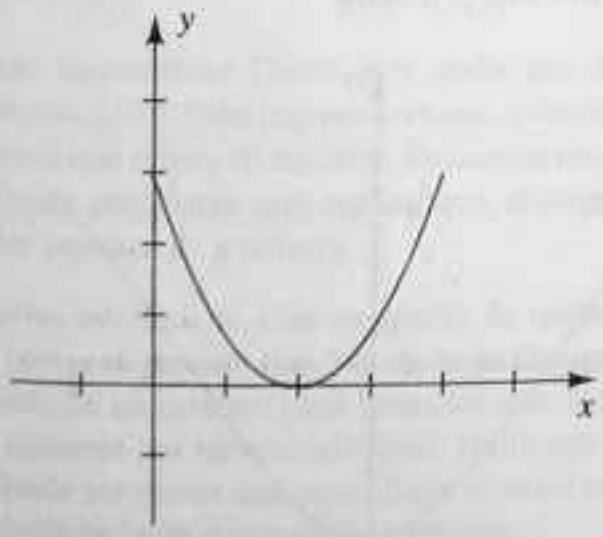
11. $f(x) = |x| + c$; $c = -3, 1, 3$
12. $f(x) = |x - c|$; $c = -3, 1, 3$
13. $f(x) = -x^2 + c$; $c = -4, 2, 4$
14. $f(x) = 2x^2 - c$; $c = -4, 2, 4$
15. $f(x) = 2\sqrt{x} + c$; $c = -3, 0, 2$
16. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$; $c = -3, 0, 2$
17. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - c}$; $c = -2, 0, 3$
18. $f(x) = -\frac{1}{2}(x - c)^2$; $c = -2, 0, 3$
19. $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$; $c = -2, 1, 3$
20. $f(x) = (x + c)^3$; $c = -2, 1, 2$
21. $f(x) = cx^3$; $c = -\frac{1}{3}, 1, 2$
22. $f(x) = (cx)^3 + 1$; $c = -1, 1, 4$
23. $f(x) = \sqrt{cx} - 1$; $c = -1, \frac{1}{9}, 4$
24. $f(x) = -\sqrt{16 - (cx)^2}$; $c = 1, \frac{1}{2}, 4$

Ejercicios 25 y 26: si el punto P está en la gráfica de una función f, encuentra el punto correspondiente en la gráfica de la función dada.

25. $P(3, -2)$; $y = 2f(x - 4) + 1$
26. $P(-2, 1)$; $y = -3f(2x) - 5$

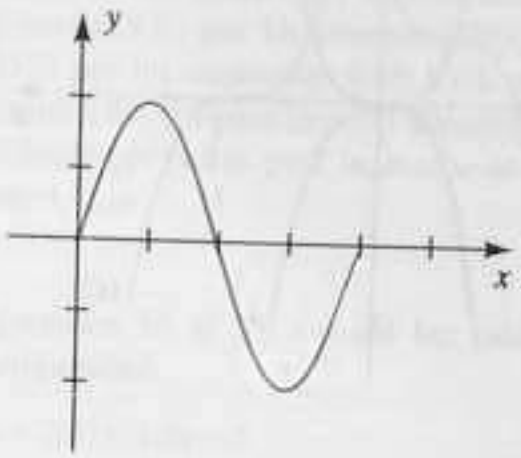
Ejercicios 27 y 28: la gráfica de la función f con dominio $[0, 4]$ se muestra en la figura. Traza la gráfica de la ecuación dada.

27.



a) $y = f(x + 3)$
b) $y = f(x - 3)$
c) $y = f(x) + 3$
d) $y = f(x) - 3$
e) $y = -3f(x)$
f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$
g) $y = f\left(-\frac{1}{3}x\right)$
h) $y = f(2x)$
i) $y = -f(x + 2) - 3$
j) $y = f(x - 2) + 3$
k) $y = |f(x)|$
l) $y = f(|x|)$

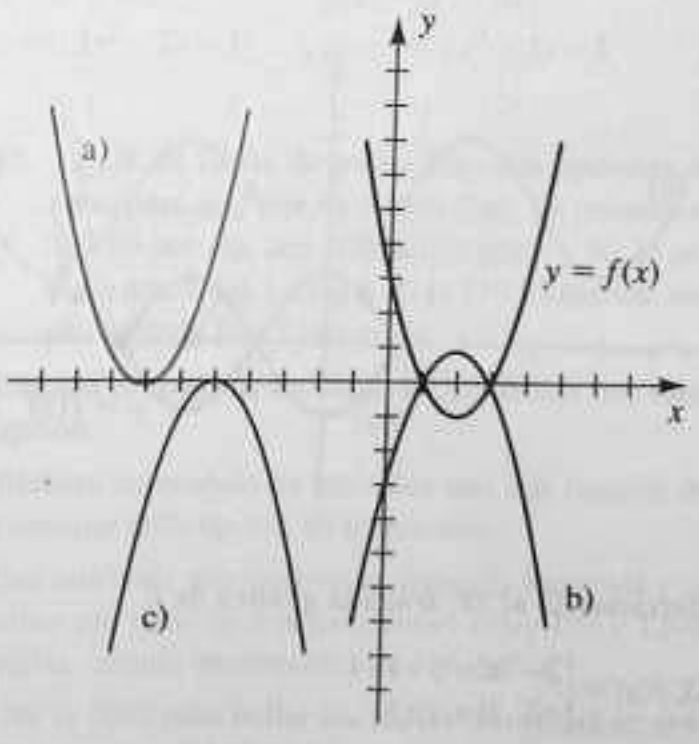
28.



a) $y = f(x - 2)$
b) $y = f(x + 2)$
c) $y = f(x) - 2$
d) $y = f(x) + 2$
e) $y = -2f(x)$
f) $y = -\frac{1}{2}f(x)$
g) $y = f(-2x)$
h) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
i) $y = -f(x + 4) - 2$
j) $y = f(x - 4) + 2$
k) $y = |f(x)|$
l) $y = f(|x|)$

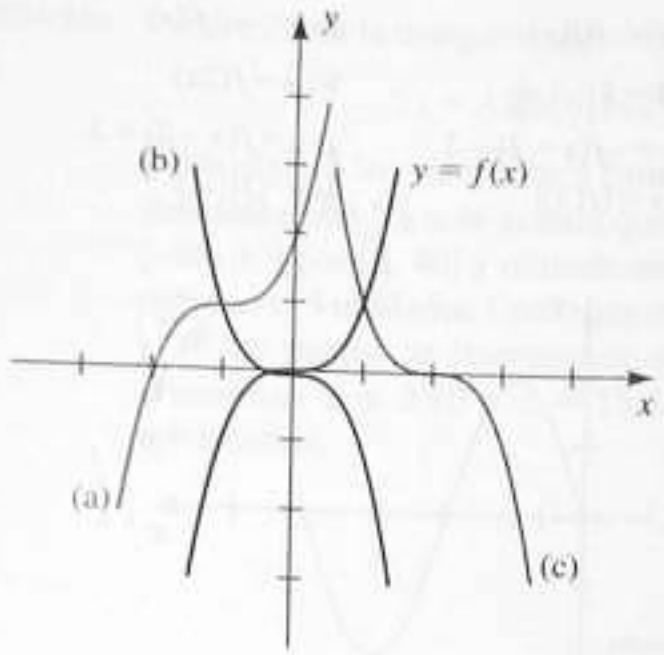
Ejercicios 29 al 32: se presentan las gráficas de las funciones f, a), b) y c). Usa las propiedades de simetría, desplazamiento y reflexión para hallar ecuaciones para las gráficas a), b) y c) en términos de f.

29.

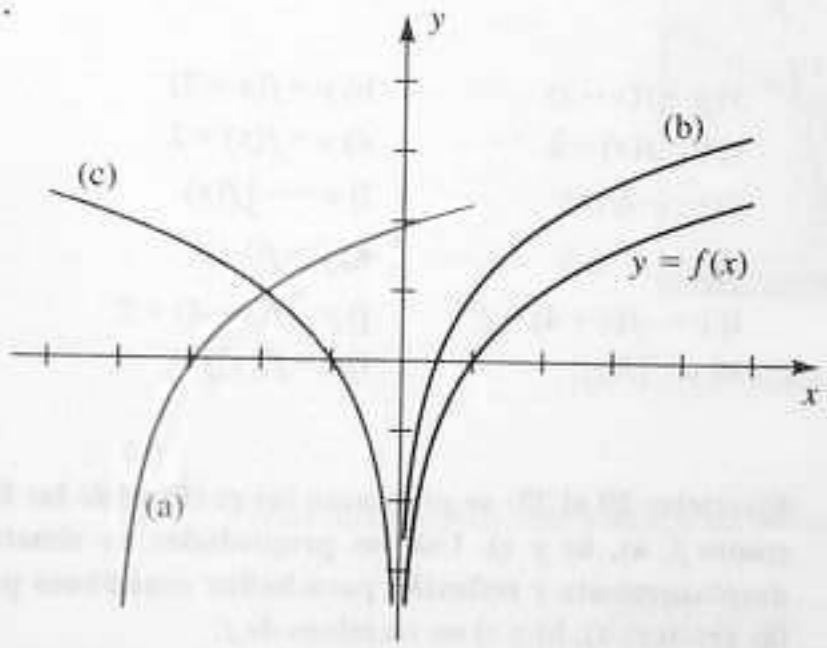


www.elsolucionario.net

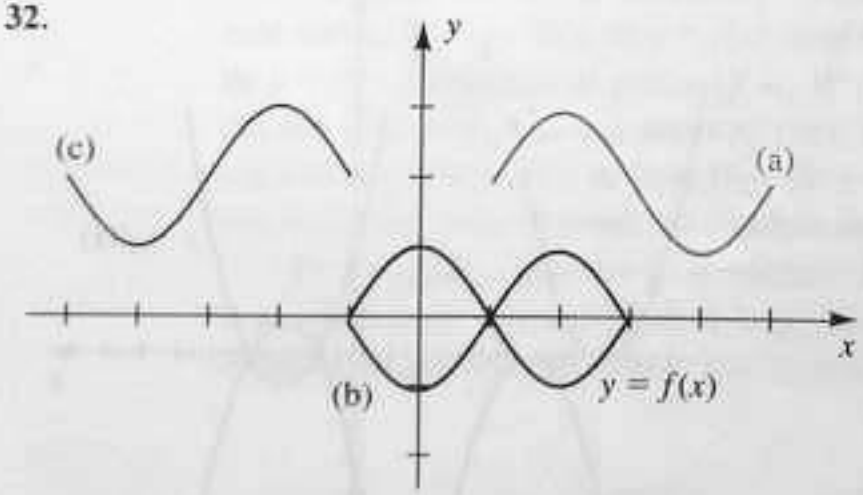
30.



31.



32.



Ejercicios 33 al 38: traza la gráfica de *f*.

33. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -2 & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x+1 & \text{si } |x| \le 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ -2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \le -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ -x+3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x+4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Ejercicios 39 y 40: el símbolo $[\![x]\!]$ denota valores de la función mayor entero. Traza la gráfica de *f*.

39. a) $f(x) = [\![x-3]\!]$ **b)** $f(x) = [\![x]\!] - 3$
c) $f(x) = 2[\![x]\!]$ **d)** $f(x) = [\![2x]\!]$
e) $f(x) = [\![-x]\!]$

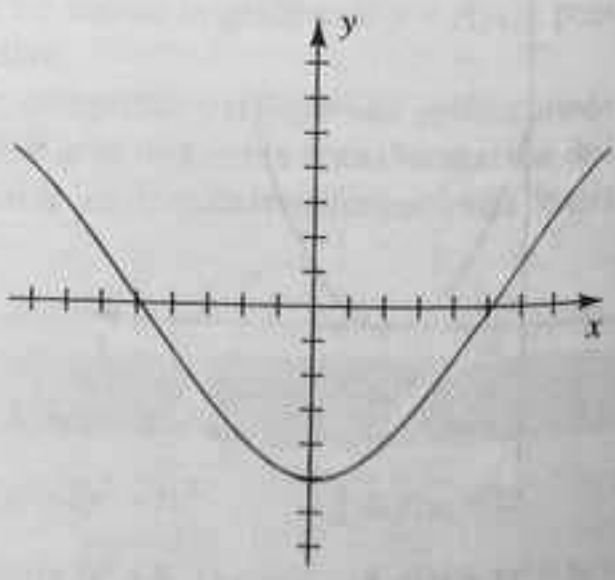
40. a) $f(x) = [\![x+2]\!]$ **b)** $f(x) = [\![x]\!] + 2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}[\![x]\!]$ **d)** $f(x) = [\![\frac{1}{2}x]\!]$
e) $f(x) = -[\![-x]\!]$

Ejercicios 41 y 42: explica por qué la gráfica de la ecuación no es la gráfica de una función.

41. $x = y^2$ **42.** $x = -|y|$

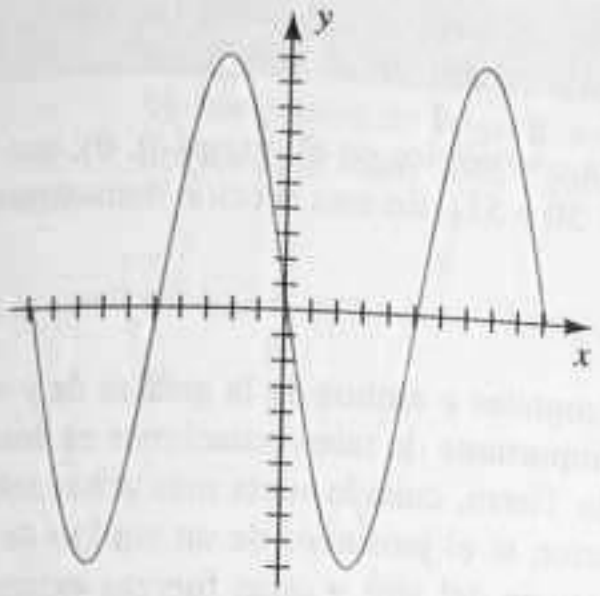
Ejercicios 43 y 44: para la gráfica de $y = f(x)$ (ve figura), traza la gráfica de $y = |f(x)|$.

43.



www.elsolucionario.net

44.



Ejercicios 45 al 48: traza la gráfica de la ecuación.

45. $y = |9 - x^2|$

46. $y = |x^3 - 1|$

47. $y = |\sqrt{x} - 1|$

48. $y = ||x| - 1|$

49. Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-2, 6]$ y rango $R = [-4, 8]$. Encuentra el dominio D y el rango R para cada función. Supón que $f(2) = 8$ y $f(6) = -4$.

a) $y = -2f(x)$

b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $y = f(x - 3) + 1$

d) $y = f(x + 2) - 3$

e) $y = f(-x)$

f) $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$

h) $y = |f(x)|$

50. Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-6, -2]$ y rango $R = [-10, -4]$. Halla el dominio D y rango R para cada función.

a) $y = \frac{1}{2}f(x)$

b) $y = f(2x)$

c) $y = f(x - 2) + 5$

d) $y = f(x + 4) - 1$

e) $y = f(-x)$

f) $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$

h) $y = |f(x)|$

51. Tasas impositivas Cierto país graba con el 15% los primeros \$20 000 del ingreso personal, y con el 20% todo ingreso que rebase dicha cifra. Encuentra una función T definida por partes que especifique el impuesto total sobre ingresos de x dólares.

52. Tarifas telefónicas Una compañía de teléfonos cobra 25 centavos por una llamada de larga distancia que no exceda de un minuto; para llamadas más largas, cobra 15 centavos por minuto adicional. Halla una función C definida por partes que especifique el costo total de una llamada de larga distancia de x minutos.

53. Porcentaje de derechos de autor Cierto libro se vende en \$12. El autor recibe derechos de 10% por los primeros 10 000 ejemplares vendidos, 12.5% por los siguientes 5000 y 15% por cualquier ejemplar adicional. Da una función R definida por partes que especifique los derechos totales del autor si se venden x ejemplares.

54. Tarifas de electricidad Una compañía generadora de energía eléctrica cobra a sus clientes \$0.0577 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1000 kWh usados, \$0.0532 por los siguientes 4000 kWh y \$ 0.0511 por cualquier kWh que pase de 5000. Encuentra una función C definida por partes para la cuenta de x kWh de un cliente.

Ejercicios 55 al 58: calcula las soluciones de la desigualdad.

55. $|1.3x + 2.8| < 1.2x + 5$

56. $|0.3x| - 2 > 2.2 - 0.63x^2$

57. $|1.2x^2 - 10.8| > 1.36x + 4.08$

58. $|\sqrt{16 - x^2} - 3| < 0.12x^2 - 0.3$

Ejercicios 59 al 64: grafica f en la pantalla $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$. Utiliza la gráfica de f para pronosticar la gráfica de g. Comprueba tu pronóstico graficando g en la misma pantalla.

59. $f(x) = 0.5x^3 - 4x - 5$; $g(x) = 0.5x^3 - 4x - 1$

60. $f(x) = 0.25x^3 - 2x + 1$; $g(x) = -0.25x^3 + 2x - 1$

61. $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

62. $f(x) = |x + 2|$; $g(x) = |x - 3| - 3$

63. $f(x) = x^3 - 5x$; $g(x) = |x^3 - 5x|$

64. $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 5$; $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 5$

65. Tarifa de renta de autos Hay dos opciones de renta para un viaje de cuatro días. La primera es \$29.95 por día, con 200 millas gratis y \$0.25 por milla adicional. La segunda es \$39.95 diarios, con un cargo de \$0.15 por milla.

a) Calcula el costo de un viaje de 500 millas con cada opción.

b) Elabora un modelo de los datos con una función de costo por cada opción de cuatro días.

c) Haz una tabla que exprese la distancia recorrida y el cobro por cada opción para viajes entre 100 y 1200 millas, usando incrementos de 100 millas.

d) Usa la tabla para hallar las millas recorridas en que cada opción es preferible.

www.elsolucionario.net

3.6 Funciones cuadráticas

Si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (ve las Figs. 50 y 51). En esta sección demostraremos que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede obtener por desplazamientos verticales, horizontales o ambos de la gráfica de $y = ax^2$, por lo cual también es una parábola. Una aplicación importante de tales ecuaciones es describir la trayectoria de un objeto cerca de la superficie de la Tierra, cuando nada más actúa sobre el objeto la atracción gravitacional. Para ilustrar lo anterior, si el jardinero de un equipo de beisbol lanza una pelota al campo (Fig. 57), y si la resistencia del aire y otras fuerzas externas se desprecian, la trayectoria de la bola es una parábola. Si se introducen ejes coordenados apropiados, la trayectoria coincide con la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para alguna a, b y c. La función determinada por esta ecuación recibe el nombre de *función cuadrática*.

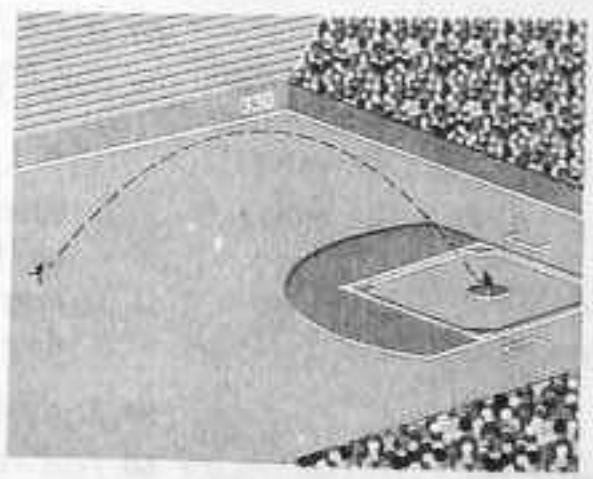


FIGURA 57

Definición de función cuadrática

Una función f es una **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición anterior, entonces $f(x) = ax^2$ y la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

y, de acuerdo con nuestro análisis de desplazamientos verticales de la sección 3.5, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ en el eje de las y. El próximo ejemplo proporciona demostraciones específicas.

EJEMPLO 1 *Trazo de la gráfica de una función cuadrática*

Traza la gráfica de f si

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

www.elsolucionario.net

Solución **a)** Dado que f es par, la gráfica de f (esto es, de $y = -\frac{1}{2}x^2$) es simétrica con respecto al eje y. Es similar en forma, pero más ancha que la parábola $y = -x^2$, trazada en la figura 51 de la sección 3.5. Varios puntos de la gráfica son $(0, 0)$, $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $(2, -2)$ y $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$. Graficamos y usamos simetría y llegamos al trazo de la figura 58.

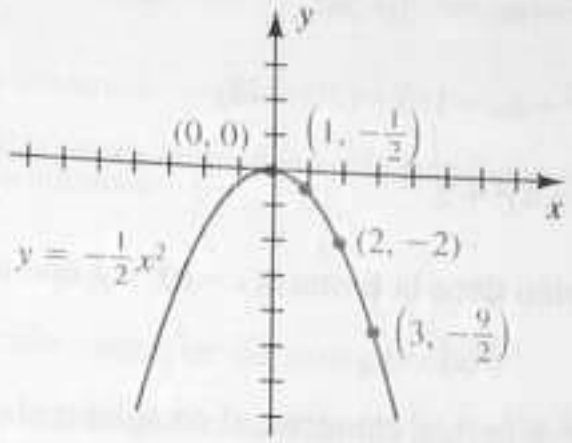


FIGURA 58

b) Para hallar la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, desplazamos hacia arriba la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ una distancia de 4 y obtenemos el trazo de la figura 59.

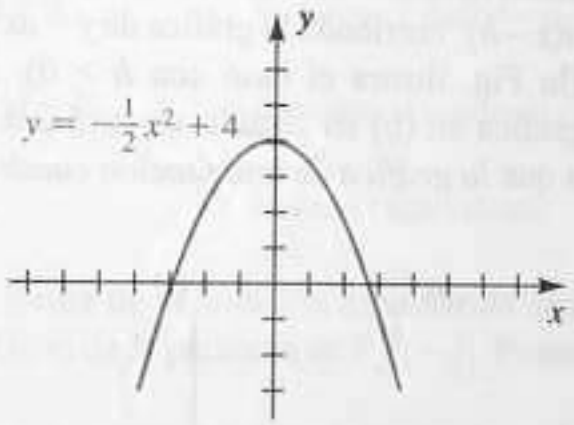


FIGURA 59

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, completamos el cuadrado y podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k. Esta técnica se presenta en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 2 ***Expresión de una función cuadrática como*** $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, expresa $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

Solución Antes de completar el cuadrado, *es esencial factorizar el coeficiente de* x^2 *de los primeros dos términos de* $f(x)$, de esta manera

$$f(x) = 3x^2 + 24x + 50 \qquad \text{dado}$$

$$= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 \qquad \text{factorizar 3 de } 3x^2 + 24x$$

www.elsolucionario.net

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro del paréntesis sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; esto es, $(8/2)^2$, o sea 16. Sin embargo, si sumamos 16 a la expresión dentro del paréntesis, entonces, debido al factor 3, en realidad estamos sumando 48 a $f(x)$; por lo tanto, debemos compensar restando 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{dado} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{completar el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, al completar el cuadrado como en el ejemplo 2, vemos que la gráfica de f es la misma que la gráfica de una ecuación del tipo

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

Podemos obtener la gráfica de esta ecuación a partir de la gráfica de $y = ax^2$ [Fig. 60a)] por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical: primero, igual que en la figura 60b)], obtenemos la gráfica de $y = a(x - h)^2$ corriendo la gráfica de $y = ax^2$ a la izquierda o a la derecha, dependiendo del signo de h (la Fig. ilustra el caso con $h > 0$). A continuación, como en la figura 60c), desplazamos la gráfica en (b) en sentido vertical una distancia $|k|$ (la Fig. presenta el caso con $k > 0$). Se deduce que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical.*

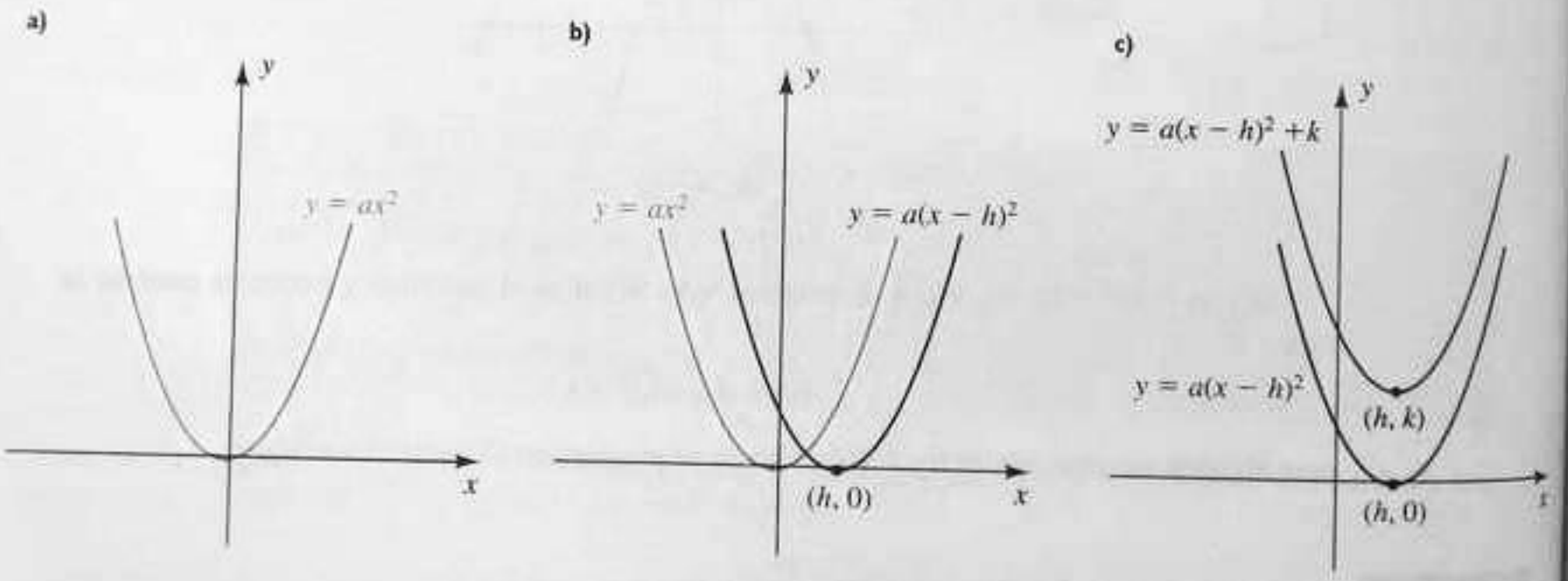


FIGURA 60

El dibujo de la figura 60c) ilustra una posible gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el más bajo de la parábola, y la función f tiene un **valor mínimo** $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y su punto (h, k) es el punto más alto. En este caso, la función f tiene un **valor máximo** $f(h) = k$.

Hemos obtenido este resultado:

www.elsolucionario.net

Ecuación estándar de una parábola con eje vertical

La gráfica de la ecuación

$$y = a(x - h)^2 + k$$

para $a \neq 0$ es una parábola con vértice $V(h, k)$ y un eje vertical. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Por conveniencia, muchas veces consultamos la *parábola* $y = ax^2 + bx + c$ al considerar la gráfica de esta ecuación.

EJEMPLO 3 *Determinación de la ecuación estándar de una parábola*

Expresa $y = 2x^2 - 6x + 4$ como una ecuación estándar de una parábola con un eje vertical. Encuentra el vértice y traza la gráfica.

Solución

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x + 4 && \text{dados} \\ &= 2(x^2 - 3x + \quad) + 4 && \text{factorizar 2 de } 2x^2 - 6x \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \tfrac{9}{4}\right) + \left(4 - \tfrac{9}{2}\right) && \text{completa el cuadrado para } x^2 - 3x \\ &= 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última ecuación tiene la forma de la ecuación estándar de una parábola con $a = 2$, $h = \frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$; por lo tanto, el vértice $V(h, k)$ de la parábola es $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Puesto que $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba.

A fin de hallar la ordenada al origen de la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$, hacemos $x = 0$, con lo cual $y = 4$. Para encontar las abscisas al origen, igualamos y a 0, resolvemos la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente $2(x - 1)(x - 2) = 0$ y llegamos a $x = 1$ y $x = 2$. Trazamos el vértice y usamos las abscisa y ordenada al origen, con lo que obtenemos suficientes puntos para un dibujo razonablemente preciso (Fig. 61).

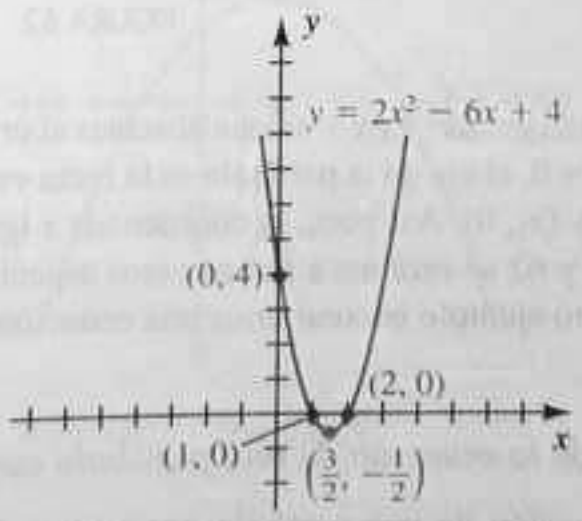


FIGURA 61

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación estándar de una parábola*

Expresa $y = -x^2 - 2x + 8$ como ecuación estándar de una parábola con un eje vertical. Encuentra el vértice y traza la gráfica.

Solución

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 8 && \text{dado} \\ &= -(x^2 + 2x + \quad) + 8 && \text{factorizar } -1 \text{ de } -x^2 - 2x \\ &= -(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1) && \text{completar el cuadrado para } x^2 + 2x \\ &= -(x + 1)^2 + 9 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

Es la ecuación estándar de una parábola con $h = -1$, $k = 9$ y, por lo tanto, el vértice es $(-1, 9)$. Dado que $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

La ordenada al origen de la gráfica de $y = -x^2 - 2x + 8$ es el término constante 8. Para hallar las abscisas al origen, resolvemos $-x^2 - 2x + 8$ o bien, lo que es equivalente, $x^2 + 2x - 8 = 0$. Al factorizar obtenemos $(x + 4)(x - 2) = 0$; en consecuencia, las intersecciones son $x = -4$ y $x = 2$. El uso de esta información nos dará el trazo de la figura 62.

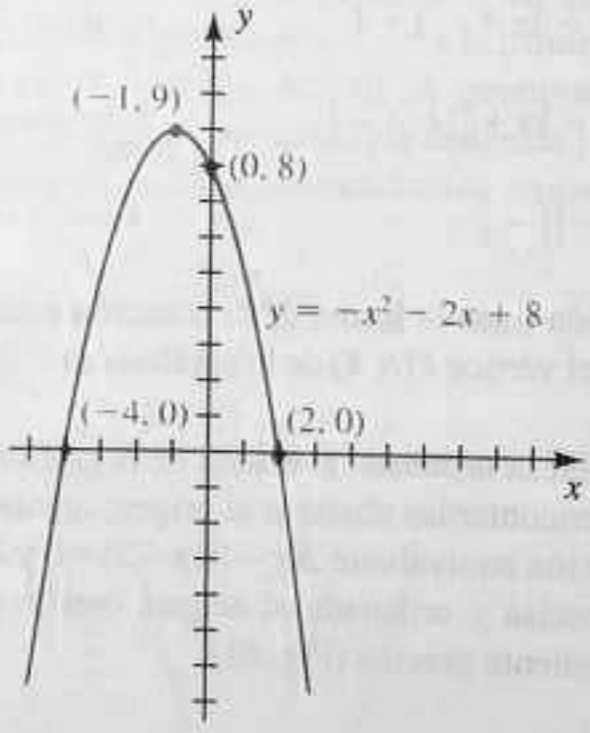


FIGURA 62

Si una parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene abscisas al origen de x_1 y x_2, como se ilustra en la figura 63 para el caso $a < 0$, el eje de la parábola es la recta vertical $x = (x_1 + x_2)/2$ que pasa por el punto medio de $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Así pues, la coordenada x igual a h del vértice (h, k) es $h = (x_1 + x_2)/2$. En las figuras 61 y 62 se exhiben algunos casos especiales.

En el próximo ejemplo encontramos una ecuación de una parábola de los datos dados.

EJEMPLO 5 *Determinación de la ecuación de una parábola con un vértice dado*

Encuentra la ecuación de una parábola con vértice $V(2, 3)$ y un eje vertical que pasa por el punto $(5, 1)$.

www.elsolucionario.net

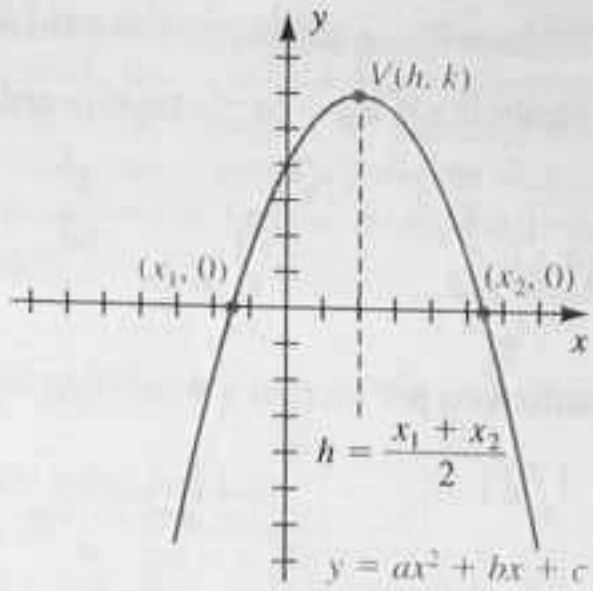


FIGURA 63

Solución La figura 64 muestra el vértice V, el punto (5, 1) y una posible posición de la parábola. Con la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

con $h = 2$ y $k = 3$ obtenemos

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para hallar a, aprovechamos que (5, 1) está en la parábola; así pues, es una solución de la última ecuación; por lo tanto,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3, \qquad \text{o} \qquad a = -\tfrac{2}{9}.$$

En consecuencia, una ecuación para la parábola es

$$y = -\tfrac{2}{9}(x - 2)^2 + 3.$$

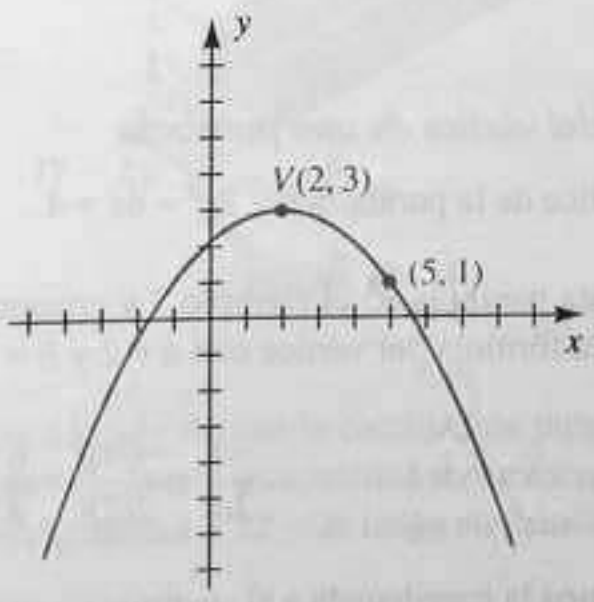


FIGURA 64

El teorema adjunto nos da una fórmula sencilla para localizar el vértice de una parábola.

www.elsolucionario.net

Teorema para localizar el vértice de una parábola

El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene coordenada x

$$-\frac{b}{2a}.$$

PRUEBA Comencemos por escribir $y = ax^2 + bx + c$ como

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \quad\right) + c.$$

En seguida completamos el cuadrado sumando $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión dentro del paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Notarás que si $b^2/(4a^2)$ *dentro* del paréntesis, entonces, debido al factor a de *fuera*, hemos sumado $b^2/(4a)$ a y; por lo tanto, debemos compensarlo restando $b^2/(4a)$. La última ecuación se escribe

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Es la ecuación de una parábola que tiene vértice (h, k) con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$.

No es necesario recordar la fórmula para la coordenada y del vértice de la parábola en el resultado anterior. Una vez que encontremos la coordenada x, estamos en posibilidad de calcular la coordenada y al sustituir $-b/(2a)$ para x en la ecuación de la parábola.

EJEMPLO 6 *Determinación del vértice de una parábola*

Encuentra el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 4$.

Solución Consideramos esta parábola en el ejemplo 3 y encontramos el vértice al completar el cuadrado; ahora usaremos la fórmula del vértice con $a = 2$ y $b = -6$ y obtendremos la coordenada x

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Luego encontramos la coordenada y al sustituir x con $\frac{3}{2}$ en la ecuación dada:

$$y = 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4 = -\tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto, el vértice es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (Fig. 61).

www.elsolucionario.net

Puesto que la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a \neq 0$ es una parábola, podemos usar la fórmula del vértice para ayudarnos a encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. En términos específicos, dado que la coordenada x del vértice V es $-b/(2a)$, la coordenada y de V es el valor de función $f(-b/(2a))$. Además, como la parábola abre hacia abajo si $a < 0$ y hacia arriba si $a > 0$, este valor de función es el valor máximo o mínimo, respectivamente, de f. Estos datos se pueden resumir de esta manera:

Teorema del valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es

(1) el valor máximo de f si $a < 0$

(2) el valor mínimo de f si $a > 0$

Usaremos este teorema en el ejemplo que viene.

EJEMPLO 7 *Determinación del valor máximo de una función cuadrática*

A partir de una lámina metálica rectangular y larga, de 12 in de ancho, hay que fabricar un canal doblando hacia arriba dos lados, de modo que sean perpendiculares a la lámina. ¿Cuántas pulgadas deben doblarse para dar al canal su máxima capacidad?

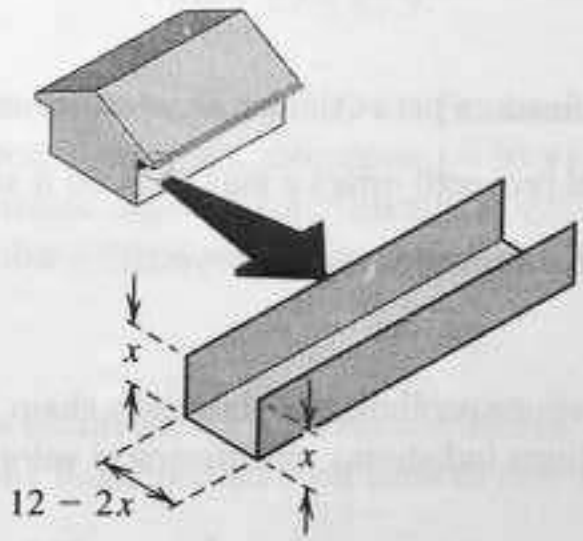


FIGURA 65

Solución El canal se ilustra en la figura 65. Si x denota la cantidad de pulgadas dobladas en cada lado, el ancho de la base del canal es de $12 - 2x$ in. La capacidad será máxima cuando la sección transversal del rectángulo con lados de longitudes x y $12 - 2x$ tenga su valor máximo. Denotamos este valor por $f(x)$ y llegamos a

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x, \end{aligned}$$

www.elsolucionario.net

que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a = -2$, $b = 12$ y $c = 0$. En vista de que f es una función cuadrática y $a = -2 < 0$, del teorema anterior se deduce que el valor máximo de f ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3.$$

Por lo tanto, hay que doblar hacia arriba 3 in en cada lado a fin de alcanzar la capacidad máxima.

Como solución alternativa, podemos observar que la gráfica de la función $f(x) = x(12 - 2x)$ tiene intersecciones x en $x = 0$ y $x = 6$. En consecuencia, el promedio de las intersecciones,

$$x = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

es la coordenada x del vértice de la parábola y el valor que produce la capacidad máxima.

En el capítulo 2 resolvimos algebraicamente algunas ecuaciones cuadráticas y desigualdades. El próximo ejemplo indica cómo proceder con ayuda de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 8 *Análisis del vuelo de un proyectil*

Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde una altura de 600 ft sobre el suelo. Su altura $h(t)$ en pies sobre el suelo, después de t segundos, está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 803t + 600.$$

a) Define una pantalla razonable que incluya todas las características pertinentes de la gráfica de h.

b) Utiliza una graficadora para calcular el momento en que la altura del proyectil sea de 5000 ft.

c) Indica cuándo el proyectil estará a más de 5000 ft sobre el suelo.

d) ¿Cuánto tiempo estará en vuelo el proyectil?

Solución **a)** La gráfica de h es una parábola que abre hacia abajo. Para evaluar Ymáx (advertirás que usamos x y y con t y h en foma indistinta), calculemos el valor máximo de h. Con

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{803}{2(-16)} \approx 25.1,$$

vemos que la altura máxima es aproximadamente $h(25) = 10\,675$.

El proyectil sube durante los primeros 25 s aproximadamente, y debido a que su altura de 600 ft en $t = 0$ es pequeña en comparación a 10 675, tardará sólo un poco más de otros 25 s en caer a tierra. Puesto que h y t son positivas, una pantalla adecuada es

$$[0, 60] \quad \text{por} \quad [0, 11\,000].$$

b) Deseamos evaluar cuándo cortará la gráfica de h la recta horizontal $h(t) = 5000$, por lo que efectuamos las asignaciones

$$Y_1 = -16x^2 + 803x + 600 \quad \text{y} \quad Y_2 = 5000$$

www.elsolucionario.net

y obtenemos una imagen semejante a la de la figura 66. Es importante recordar que la gráfica de Y_1 muestra sólo la altura en el tiempo t, *no es* la trayectoria del proyectil, que es vertical. Con la función zoom o intersect, encontramos que el mínimo valor de t para el que $h(t) = 5000$ es de unos 6.3 segundos.

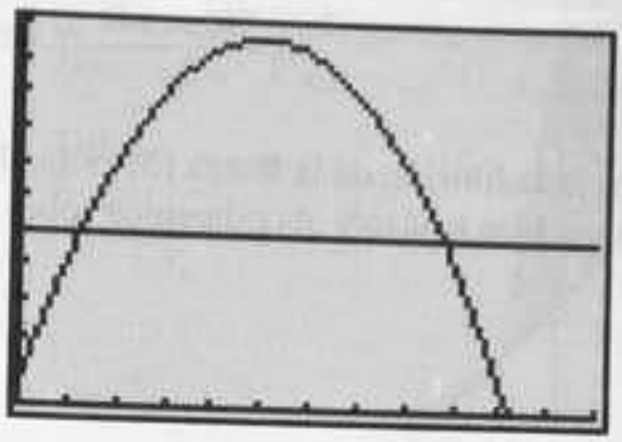


FIGURA 66 [0, 60] por [0, 11 000]

En virtud de que el vértice está en el eje de la parábola, el otro tiempo en que $h(t)$ es 5000 es de alrededor de $25.1 - 6.3$, o sea 18.8 s *después* de 25.1; esto es, en $t \approx 25.1 + 18.8 = 43.9$ segundos.

c) El proyectil estará a más de 5000 ft sobre el suelo cuando la gráfica de la parábola de la figura 66 se encuentre sobre la recta horizontal; esto es, cuando

$$6.3 < t < 43.9.$$

d) El proyectil permanecerá en vuelo hasta que $h(t) = 0$. Esto corresponde a la intersección x de la figura 66. Con una función zoom o intersect, obtenemos $t \approx 50.9$ s. [Notarás que como la ordenada al origen no es cero, es incorrecto duplicar simplemente el valor de t del vértice para hallar el tiempo total del vuelo; sin embargo, esto *sería* aceptable en problemas en que $h(0) = 0$.]

Al trabajar con funciones cuadráticas, a menudo nos interesa encontrar el vértice y las intersecciones x. Por lo general, una función cuadrática dada es muy similar a una de las tres formas que se enumeran en la tabla.

Relación entre formas de función cuadrática y su vértice y abscisa al origen

Forma	Vértice	Abscisas al origen (si hay alguna)
(1) $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$	h y k como en la forma	$x = h \pm \sqrt{-k/a}$ (ve abajo)
(2) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $k = f(h)$	$x = x_1, x_2$
(3) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$h = -\dfrac{b}{2a}$, $k = f(h)$	$x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ve adelante)

www.elsolucionario.net

Si los radicandos en (1) y (3) son negativos, no hay *intersecciones* x. Para hallar las intersecciones x con la forma (1), usamos la ecuación cuadrática especial de la página 72. Si tienes una función cuadrática de la forma (3) y deseas hallar el vértice e intersecciones x, primero encuentra las intersecciones x mediante la fórmula cuadrática. Entonces podrás obtener la coordenada x del vértice, h, con facilidad porque

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = h \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Por supuesto que si la función de la forma (3) es fácilmente factorizable, no es necesario usar la fórmula cuadrática. Más adelante abundaremos sobre las parábolas.

3.6 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: encuentra la ecuación estándar de cualquier parábola que tenga vértice V.

1. $V(-3, 1)$
2. $V(4, -2)$
3. $V(0, -3)$
4. $V(-2, 0)$

Ejercicios 5 al 12: expresa $f(x)$ en la forma $a(x-h)^2 + k$

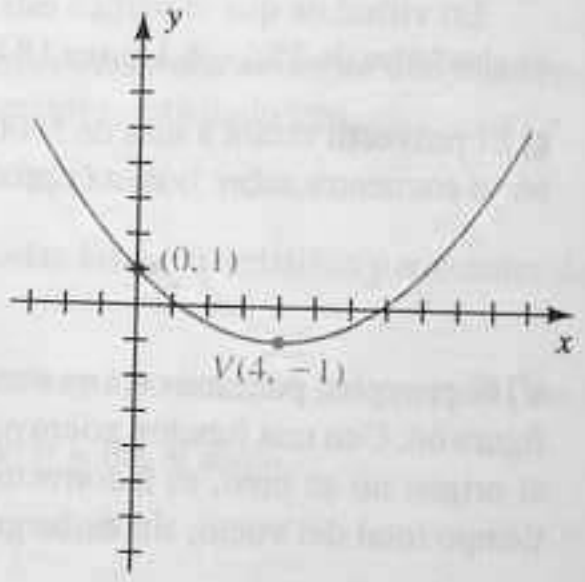
5. $f(x) = -x^2 - 4x - 8$
6. $f(x) = x^2 - 6x + 11$
7. $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$
8. $f(x) = 5x^2 + 20x + 17$
9. $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$
10. $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$
11. $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$
12. $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{23}{5}$

Ejercicios 13 al 22: a) usa la fórmula cuadrática para hallar los ceros de f; b) encuentra el valor máximo y mínimo de $f(x)$, y c) traza la gráfica de f.

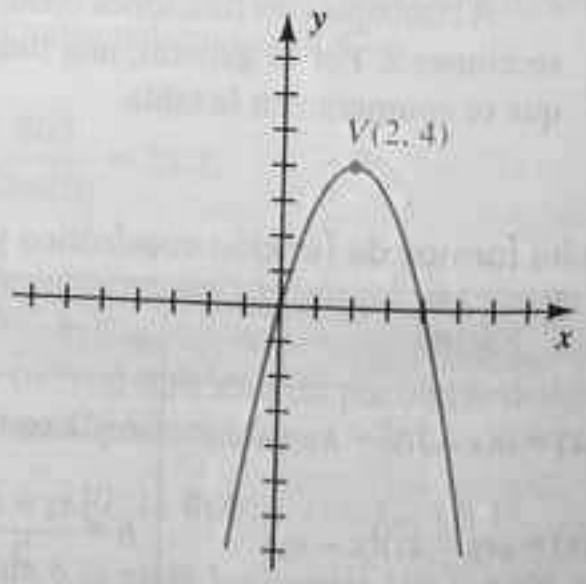
13. $f(x) = x^2 - 4x$
14. $f(x) = -x^2 - 6x$
15. $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$
16. $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$
17. $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$
18. $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$
19. $f(x) = x^2 + 4x + 9$
20. $f(x) = -3x^2 - 6x - 6$
21. $f(x) = -2x^2 + 20x - 43$
22. $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$

Ejercicios 23 al 26: encuentra la ecuación estándar de la parábola mostrada en la figura.

23.

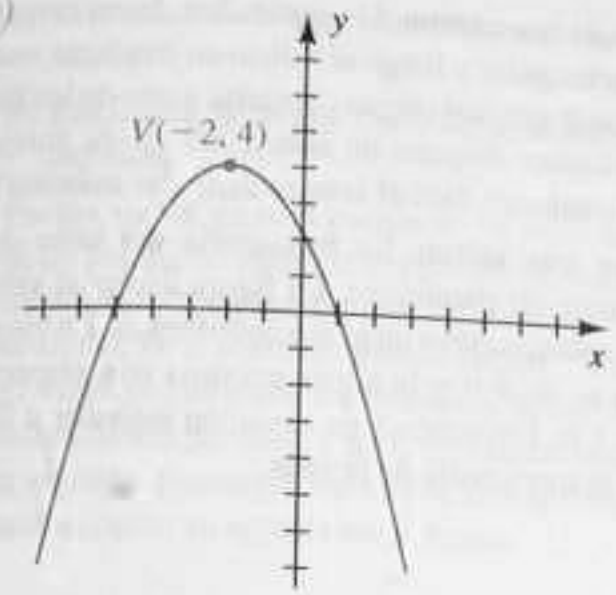


24.

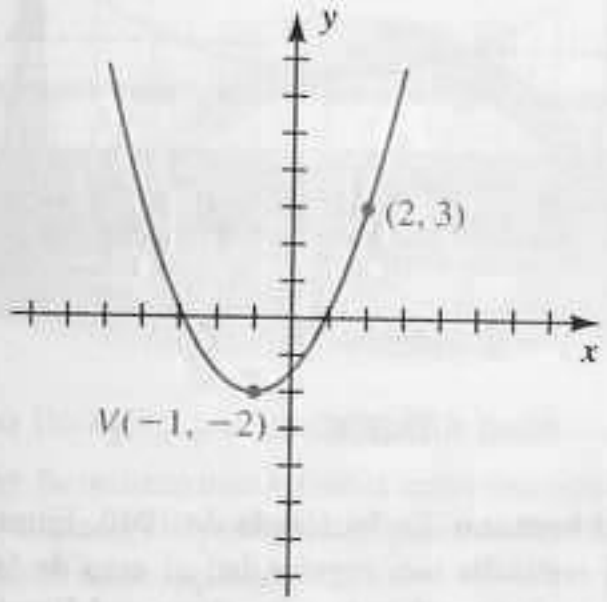


www.elsolucionario.net

25.



26.



Ejercicios 27 al 32: determina la ecuación estándar de una parábola que tenga un eje vertical y satisfaga las condiciones dadas.

27. Vértice (0, –2), que pase por (3, 25).

28. Vértice (0, 5), que pase por (2, –3).

29. Vértice (3, 5), intersección en x igual a 0.

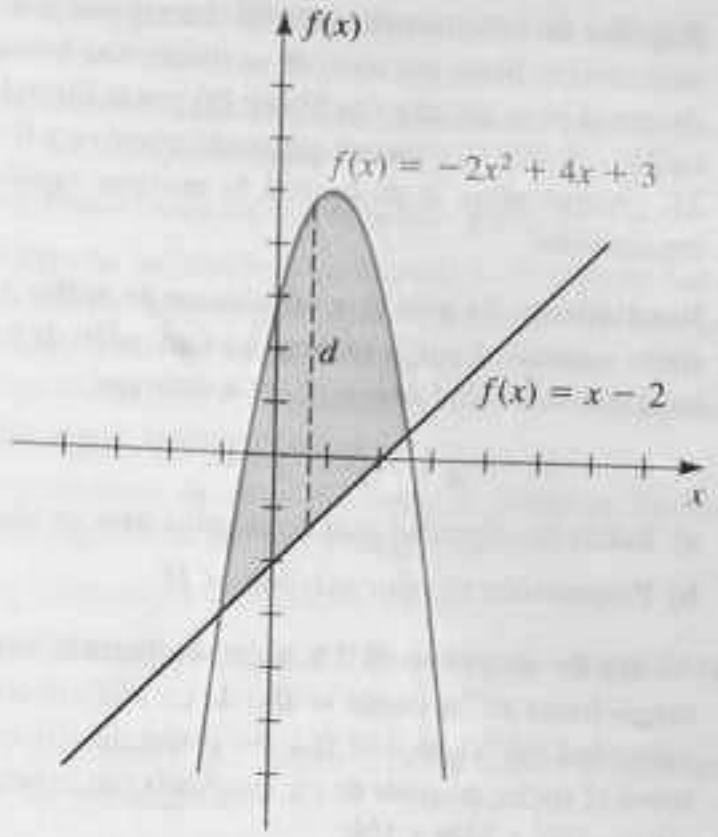
30. Vértice (4, –7), intersección en x igual a −4.

31. Intersecciones en x –3 y 5, el punto más alto tiene coordenada y de 4.

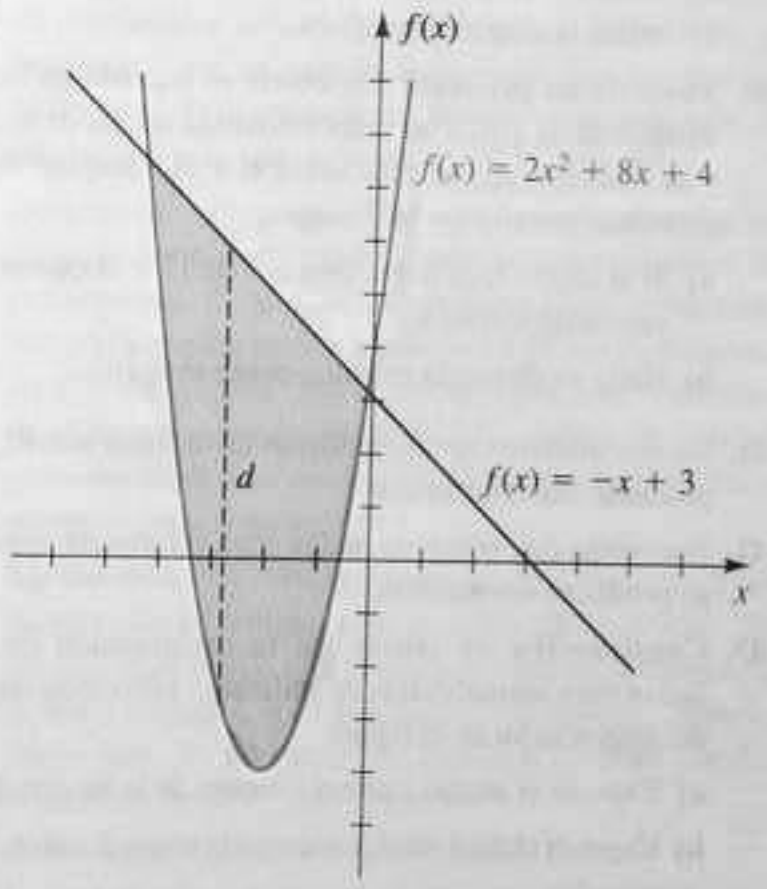
32. Intersecciones en x 8 y 0, el punto más bajo tiene coordenada y de –48.

Ejercicios 33 y 34: encuentra la máxima distancia vertical d entre la parábola y la recta para la región en color.

33.



34.



Ejercicios 35 y 36: el ozono se presenta en todos los niveles de la atmósfera terrestre y su densidad varía según la estación del año y la latitud. En Edmonton, Canadá, la densidad $D(h)$ del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes h entre 20 km y 35 km se determinó a nivel experimental. Para cada $D(h)$ y estación del año, calcula la altitud a la que la densidad del ozono es máxima.

35. $D(h) = -0.058h^2 + 2.867h - 24.239$ (otoño)

36. $D(h) = -0.078h^2 + 3.811h - 32.433$ (primavera)

www.elsolucionario.net

37. **Rapidez de crecimiento infantil** La rapidez y de crecimiento (en libras por mes) de un menor está relacionada con el peso actual x (en libras: lb) por la fórmula $y = cx(21 - x)$, donde c es una constante positiva y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se presentará la máxima rapidez de crecimiento?

38. **Rendimiento de gasolina** El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina, a una velocidad de v mph, está dado por

$$M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \quad \text{para } 0 < v < 70.$$

a) Indica la velocidad más económica para un viaje.

b) Proporciona el valor máximo de M.

39. **Altura de un proyectil** Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio con una velocidad inicial de 144 ft/s. Su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo, después de t s, está dada por la ecuación $s(t) = -16t^2 + 144t + 100$.

a) Encuentra su máxima distancia arriba del suelo.

b) Indica la altura del edificio.

40. **Vuelo de un proyectil** Un objeto es lanzado en forma vertical hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 ft/s, y su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t s está dada por $s(t) = -16t^2 + v_0t$.

a) Si el objeto toca tierra después de 12 s, encuentra su velocidad inicial v_0.

b) Halla su distancia máxima sobre el suelo.

41. Da dos números reales positivos cuya suma sea 40 y su producto sea un máximo.

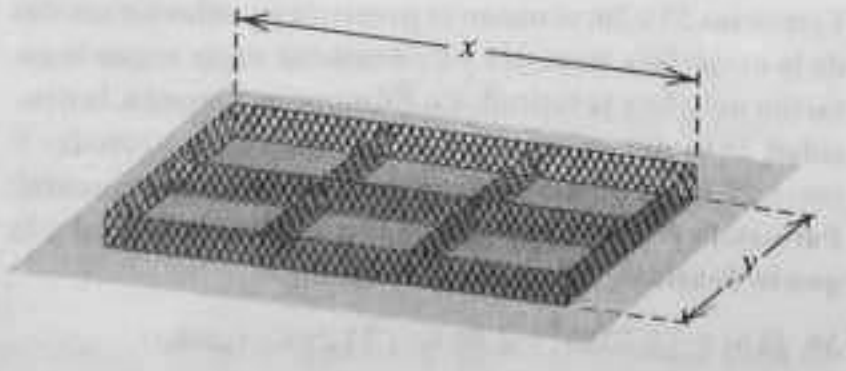
42. Encuentra dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo.

43. **Construcción de jaulas** En la construcción de seis jaulas para animales han de utilizarse 1000 ft de enrejado, según se ve en la figura.

a) Expresa el ancho y como función de la longitud x.

b) Expresa el área total A encerrada como función de x.

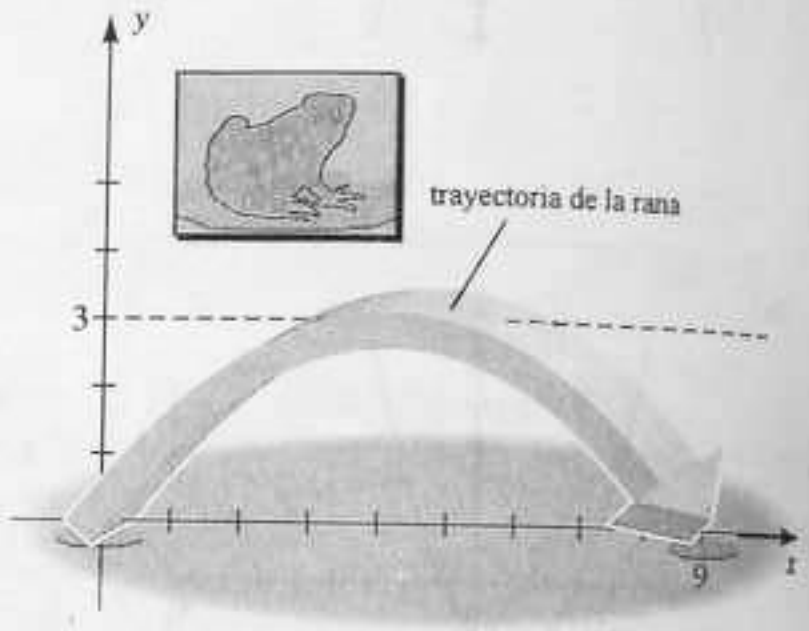
c) Encuentra las dimensiones que maximicen el área encerrada.



EJERCICIO 43

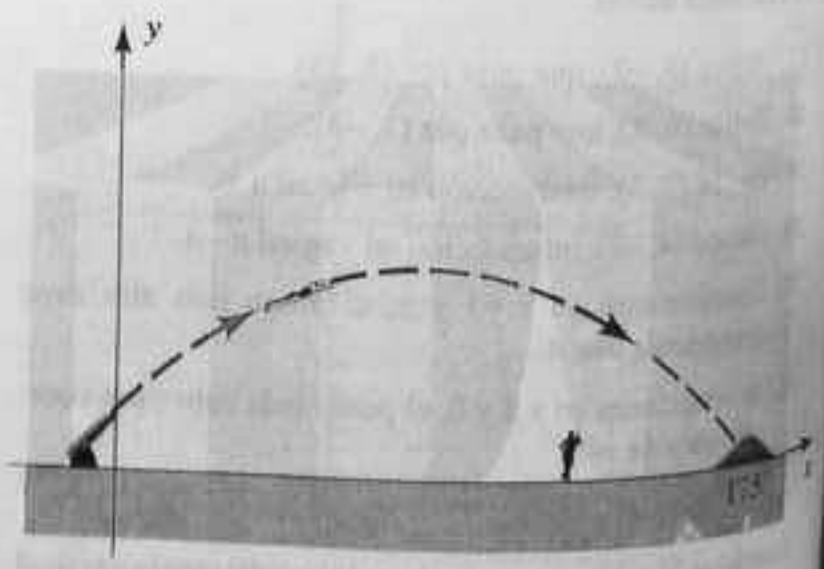
44. **Cercado de un campo** Un agricultor desea cercar un campo rectangular y luego dividirlo en tres lotes rectangulares mediante dos cercas paralelas a uno de los lados. Si el agricultor dispone de sólo 1000 yd de enrejado, ¿qué dimensiones dará el área rectangular máxima?

45. **Animales que saltan** La trayectoria del salto de un animal suele ser parabólica. La figura ilustra el salto de una rana sobrepuesto a un plano coordenado. La longitud del salto es de 9 ft y la altura máxima con respecto al suelo es 3 ft. Encuentra una ecuación estándar a fin de calcular la trayectoria de la rana.



EJERCICIO 45

46. **Proyectil humano** En la década de 1940, Emmanuel Zacchini realizaba con regularidad el acto de la bala humana en el circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey. La boca del cañón estaba a 15 ft del suelo y la distancia horizontal total que recorría era de 175 ft. Cuando el cañón se apunta a un ángulo de 45°, la ecuación del tiro parabólico (ve la figura) tiene la forma $y = ax^2 + x + c$.



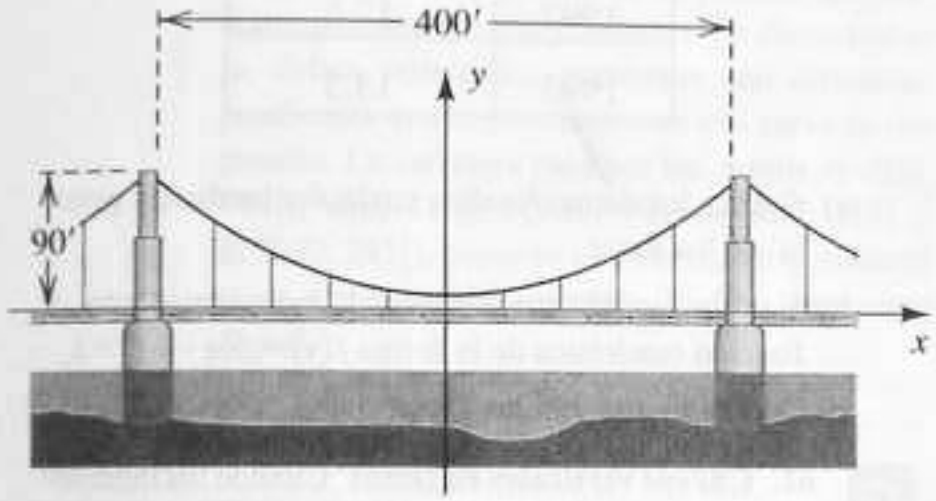
EJERCICIO 46

www.elsolucionario.net

a) Con la información dada, determina una ecuación del vuelo.

b) Encuentra la altura máxima alcanzada por la bala humana.

47. Forma de un puente colgante El peso de una sección de un puente colgante se distribuye de manera uniforme entre dos torres gemelas que están a 400 ft una de otra y se elevan 90 ft sobre la calzada horizontal (ve la figura). El cable sujeto entre los extremos de las torres tiene la forma de una parábola y su punto central está a 10 ft sobre la calzada. Supongamos que se introducen ejes coordenados, como se aprecia en la figura.

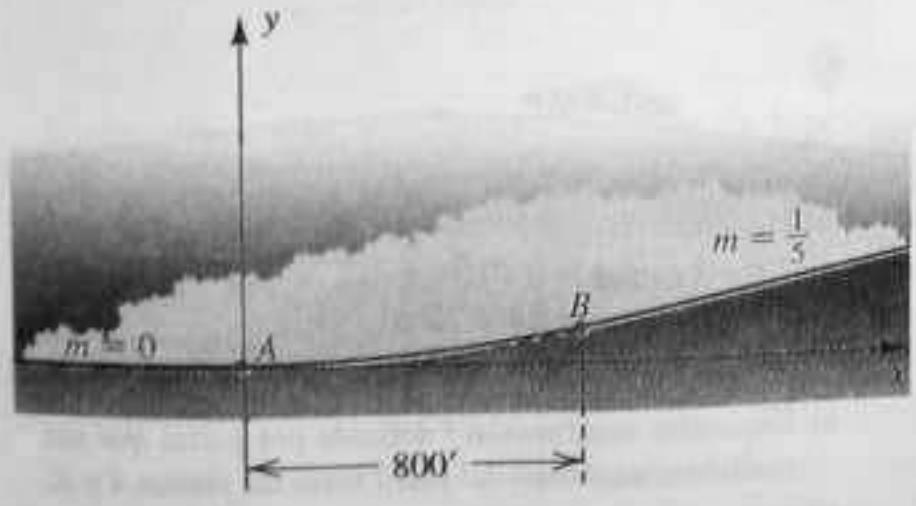


EJERCICIO 47

a) Encuentra una ecuación de la parábola.

b) Se utilizan nueve cables verticales equidistantes para sostener el puente (ve figura). Indica la longitud total de estos soportes.

48. Diseño de una carretera Un grupo de ingenieros diseña un tramo que enlazará una autopista horizontal con otra que tiene una pendiente de 20% (esto es, pendiente $\frac{1}{5}$), según se ilustra en la figura. La transición suave se efectuará a lo largo de 800 ft, y un tramo parabólico de la carretera servirá para enlazar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, es posible demostrar que la pendiente de la línea tangente al punto $P(x, y)$ sobre la parábola está dada por $m = 2ax + b$.



EJERCICIO 48

a) Encuentra una ecuación de la parábola que tenga una línea tangente de pendiente 0 en A y $\frac{1}{5}$ en B.

b) Proporciona las coordenadas de B.

49. Entrada parabólica La entrada a un edificio tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 ft de alto en el centro y 6 ft de ancho en la base. Si hay que meter una caja rectangular de 8 ft de alto, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?

50. Un alambre de 24 in de largo se dobla en forma de rectángulo con ancho x y longitud y.

a) Expresa y como función de x.

b) Determina el área A del rectángulo como función de x.

c) Demuestra que el área A es máxima si el rectángulo es un cuadrado.

51. Descuento por volumen Una empresa comercial vende tenis a \$40 el par si el pedido es menor de 50 pares. Si un distribuidor solicita 50 o más pares (hasta 600), el precio por par se reduce 4 centavos por la cantidad solicitada. ¿De cuántos pares debe ser el pedido a fin de producir la máxima utilidad para el fabricante?

52. Descuento por grupo Una agencia ofrece viajes en grupo a razón de \$60 por persona para los primeros 30 participantes. En grupos más grandes, hasta de 90, cada integrante recibe un descuento de \$0.50 por participante después de los primeros 30; por ejemplo, con 31 turistas, el costo por persona es de \$59.50. Indica de cuántas personas debe ser el grupo a fin de que resulte la máxima ganancia para la agencia.

53. Tarifas de cable Una compañía de televisión por cable da servicio a 5000 usuarios y cobra \$20 por mes. Un estudio de mercado indica que por cada dólar menos en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Ahora bien, $R(x)$ denota el ingreso total mensual cuando el cobro es de x dólares mensuales.

a) Determina la función de ingreso R.

b) Traza la gráfica de R para hallar el valor de x que produzca un ingreso máximo mensual.

54. Renta de departamentos Una inmobiliaria posee 180 departamentos, que mantiene ocupados cuando los renta a \$300 al mes. La compañía estima que por cada \$10 de aumento en la renta, se desocuparán cinco departamentos. ¿Cuál debe ser el monto de la renta de modo que la compañía reciba el máximo ingreso mensual?

C **Ejercicios 55 y 56: grafica $y = x^3 - x^{1/3}$ y f en el mismo plano coordenado y calcula los puntos de intersección.**

www.elsolucionario.net

55. $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{4}$

56. $f(x) = -x^2 + 0.5x + 0.4$

C 57. En el mismo plano coordenado, grafica $y = ax^2 + x + 1$, para $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ y 4, y describe cómo es que el valor de a afecta la gráfica.

C 58. En el mismo plano coordenado grafica, $y = x^2 + bx + 1$, para $b = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3, y describe cómo es que el valor de b afecta la gráfica.

C 59. **Precipitación en Seattle** La precipitación mensual promedio (en in) para Seattle aparece en esta tabla, excepto abril.

Mes	Precipitación
Ene.	5.7
Feb.	4.2
Mar.	3.8
May.	1.7
Jun.	1.6
Jul.	0.8
Ago.	1.0
Sept.	1.8
Oct.	2.1
Nov.	4.0
Dic.	5.4

a) Grafica la precipitación mensual promedio.

b) Elabora un modelo matemático de los datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Grafica f y los datos en los mismos ejes coordenados.

c) Pronostica el promedio de lluvia en abril con f. Compara tu pronóstico con el valor real de 2.4 in.

C 60. **Homicidios con arma de fuego** En la tabla que sigue aparecen los números anuales de homicidios con arma de fuego (en miles).

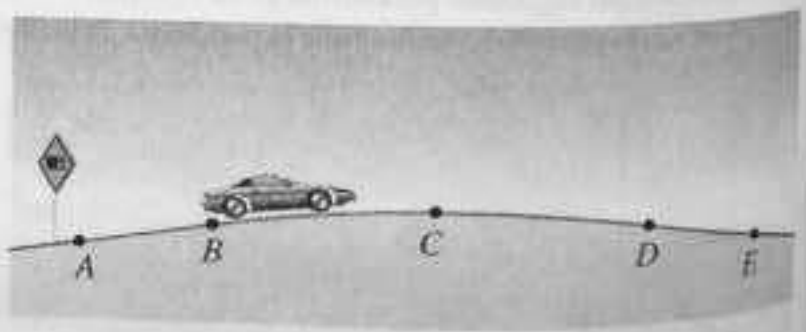
Año	Homicidios
1982	8.3
1983	8.0
1984	7.6
1985	7.9
1986	8.3
1987	8.0
1988	8.3
1989	9.2
1990	10.0
1991	11.6
1992	12.5
1993	13.3

a) Grafica los datos. Analiza cualquier tendencia general de los datos.

b) Haz un modelo matemático de estos datos con la función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

c) Grafica f junto con los datos.

C 61. **Curvas verticales en cimas** Cuando los ingenieros planean la construcción de carreteras, deben diseñar colinas a fin de producir una visibilidad adecuada para los conductores; las colinas se conocen como *curvas verticales en cimas*. Los ingenieros usan una forma parabólica para una colina de carretera, con el vértice ubicado en la cima. Dos carriles con diferentes pendientes han de unirse con una curva de cima parabólica. La carretera pasa por los puntos $A(-800, -48)$, $B(-500, 0)$, $C(0, 40)$ $D(500, 0)$ y $E(800, -48)$, según se aprecia en la figura. El carril es lineal entre A y B, parabólico entre B y D, y otra vez lineal entre D y E.

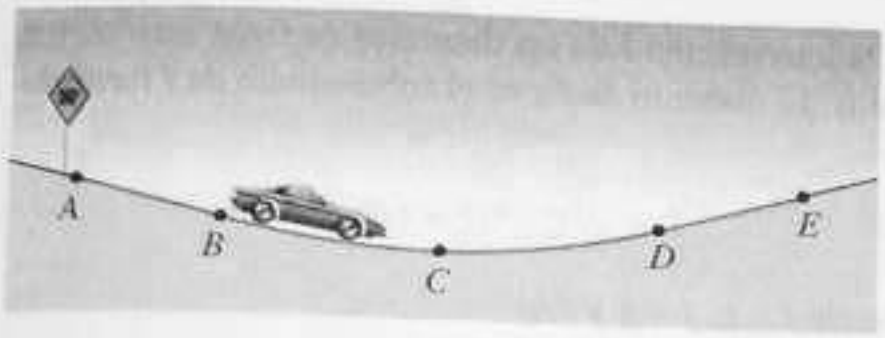


EJERCICIO 61

a) Encuentra una función f definida por partes que sea modelo matemático del carril entre los puntos A y E.

b) Grafica f en la pantalla $[-800, 800]$ por $[-100, 200]$

www.elsolucionario.net



EJERCICIO 62

C **62. Curvas verticales en depresiones** Consulta el ejercicio 61. Los valles u hondonadas en autopistas se conocen como *curvas verticales en depresiones*, mismas que también se pueden modelar matemáticamente con parábolas. En cierto trabajo, deben unirse dos carreteras con diferentes pendientes que se encuentran en una curva en depresión. La carretera pasa por los puntos $A(-500, 243\frac{1}{3})$, $B(0, 110)$, $C(750, 10)$, $D(1500, 110)$ y $E(2000, 243\frac{1}{3})$, como se ve en la figura, y es lineal entre A y B, parabólica entre B y D y lineal entre D y E.

a) Halla una función f definida por partes que sea modelo matemático de la carretera entre los puntos A y E.

b) Grafica f en la pantalla $[-500, 2000]$ por $[0, 800]$.

C **63. Trayectoria parabólica** En condiciones ideales, un objeto lanzado desde el suelo seguirá una trayectoria parabólica de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, donde a y b son constantes y x representa la distancia horizontal recorrida por el objeto.

a) Determina a y b de modo que el objeto alcance una altura máxima de 100 ft y recorra una distancia horizontal de 150 ft antes de tocar tierra.

b) Grafica $f(x) = ax^2 + bx$ en la pantalla $[0, 180]$ por $[0, 120]$.

c) Grafica $y = kax^2 + bx$, donde $k = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$, en la misma pantalla de $[0, 600]$ por $[0, 400]$. ¿En qué forma afecta la constante k la trayectoria del objeto?

3.7 Operaciones sobre funciones

A menudo las funciones se definen en términos de sumas, diferencias, productos o divisiones de varias expresiones; por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

podemos considerar $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

Nos referimos a h como la *suma* de f y g y la denotamos con $f + g$. Así,

$$h(x) = (f + g)(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1}.$$

En general, si f y g son funciones *cualesquiera*, usamos la terminología y notación de la siguiente tabla.

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Términos	Valor de función
suma $f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
diferencia $f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
producto fg	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
cociente $\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

www.elsolucionario.net

Los dominios de $f+g$, $f-g$, y fg son la intersección I de los dominios de f y g: esto es, los números que son *comunes* a ambos dominios. El dominio de f/g es el subconjunto de I formado por toda x en I tal que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 *Determinación de los valores de función de $f+g$, $f-g$ y f/g*

Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^3$, encuentra $(f+g)(2)$, $(f-g)(2)$, $(fg)(2)$ y $(f/g)(2)$.

Solución Como $f(2) = 3(2) - 2 = 4$ y $g(2) = 2^3 = 8$, tenemos

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 8 = 12$$

$$(f-g)(2) = f(2) - g(2) = 4 - 8 = -4$$

$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (4)(8) = 32$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2 *Determinación de $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$*

Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, halla $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, y $(f/g)(x)$ e indica los dominios de las funciones respectivas.

Solución El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y el dominio de g es $\mathbb{R}$. La intersección de estos dominios es $[-2, 2]$, que es el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg. Para el dominio de f/g, se excluye todo número x en $[-2, 2]$ tal que $g(x) = 3x + 1 = 0$ (es decir, $x = -\frac{1}{3}$); por lo tanto, tenemos:

$$(f+g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}(3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, \qquad -2 \le x \le 2 \text{ y } x \neq -\frac{1}{3}$$

Una función f es una **función polinomial** si $f(x)$ es un polinomio; esto es, si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo cx^k, donde c es un número real y k es un entero no negativo. Observarás que las funciones cuadráticas consideradas en la sección anterior son funciones polinomiales.

Una **función algebraica** es una función que se puede manejar en términos de sumas, diferencias, productos, cocientes o raíces finitos de funciones polinomiales.

www.elsolucionario.net

ILUSTRACIÓN

Función algebraica

■ $$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x}}}$$

Las funciones que no son algebraicas son **trascendentales**; por ejemplo, las funciones exponenciales y logarítmicas (Cap. 5).

En el resto de esta sección estudiaremos la forma en que dos funciones f y g se pueden usar para obtener las *funciones composición* $f \circ g$ y $g \circ f$ (que se leen «f círculo g" y "g círculo f», respectivamente). Las funciones de este tipo son muy importantes en cálculo. La función $f \circ g$ se define en seguida.

Definición de función composición

La **función composición** $f \circ g$ de dos funciones f y g está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ esté en el dominio de f.

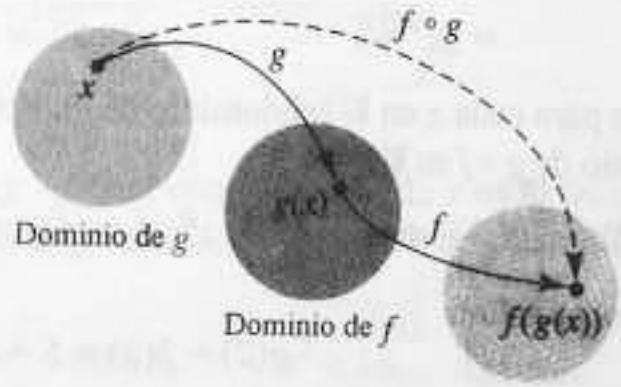


FIGURA 67

La figura 67 es un esquema de las relaciones entre f, g, y $f \circ g$. Notarás que para x en el dominio de g, *primero encontramos* $g(x)$ (que debe estar en el dominio de f) y *luego hallamos* $f(g(x))$.

Para la función composición $g \circ f$ invertimos el orden; o sea, primero nos enfocamos en $f(x)$ y después en $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en el dominio de f tal que $f(x)$ esté en el dominio de g.

Puesto que la notación $g(x)$ se lee "g de x", a veces decimos que g es una *función de* x. Para la función composición $f \circ g$, la notación $f(g(x))$ se lee "f de g de x", y podríamos ver f como una función de $g(x)$. En este sentido, *una función composición es la función de una función* o, en términos más precisos, una función de los valores de otra función.

EJEMPLO 3 *Determinación de funciones composición*

Sea $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$.

a) Encuentra $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

www.elsolucionario.net

b) Halla $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

c) Determina $f(g(2))$ en dos formas: primero con las funciones f y g por separado y luego con la función composición $f \circ g$.

Solución

a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g\\ &= f(3x+5) && \text{definición de } g\\ &= (3x+5)^2 - 1 && \text{definición de } f\\ &= 9x^2 + 30x + 24 && \text{simplificar}\end{aligned}$$

Los dominios de f y g son $\mathbb{R}$. Puesto que para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el valor de función $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el dominio de $f \circ g$ también es $\mathbb{R}$.

b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f\\ &= g(x^2 - 1) && \text{definición de } f\\ &= 3(x^2 - 1) + 5 && \text{definición de } g\\ &= 3x^2 + 2 && \text{simplificar}\end{aligned}$$

En vista de que para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el valor de función $f(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R}$.

c) A fin de hallar $f(g(2))$ usando $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ por separado, procedemos de esta manera:

$$g(2) = 3(2) + 5 = 11$$
$$f(g(2)) = f(11) = 11^2 - 1 = 120$$

Para encontrar $f(g(2))$ utilizando $f \circ g$, consultamos la parte a), donde hay

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 9x^2 + 30x + 24.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f(g(2)) &= 9(2)^2 + 30(2) + 24\\ &= 36 + 60 + 24 = 120.\end{aligned}$$

En el ejemplo 3, notarás que $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no son siempre las mismas; esto es, $f \circ g \neq g \circ f$.

Si dos funciones f y g poseen ambas un dominio $\mathbb{R}$, el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ también es $\mathbb{R}$ (Ejem. 3). El ejemplo que viene muestra que el dominio de una función composición puede diferir de los de las dos funciones dadas.

EJEMPLO 4 *Determinación de funciones de composición*

Sean $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

www.elsolucionario.net

a) Encuentra $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

b) Halla $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

Solución Primero observa que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el dominio de g es el conjunto de todos los números reales no negativos; esto es, el intervalo $[0, \infty)$. Procedemos de este modo:

a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g\\ &= f(\sqrt{x}) && \text{definición de } g\\ &= (\sqrt{x})^2 - 16 && \text{definición de } f\\ &= x - 16 && \text{simplificar}\end{aligned}$$

Si tomamos sólo la expresión final $x - 16$, podemos creer que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}$ porque $x - 16$ está definida para todo número real x; pero no es el caso. Por definición, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en $[0, \infty)$ (el dominio de g) tal que $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f). Puesto que $g(x) = \sqrt{x}$ está en $\mathbb{R}$ para toda x en $[0, \infty)$, se deduce que el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$.

b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f\\ &= g(x^2 - 16) && \text{definición de } f\\ &= \sqrt{x^2 - 16} && \text{definición de } g\end{aligned}$$

Por definición, el dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f) tal que $f(x) = x^2 - 16$ se halla en $[0, \infty)$. La expresión "$x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$" equivale a cada una de las desigualdades

$$x^2 - 16 \geq 0, \qquad x^2 \geq 16, \qquad |x| \geq 4.$$

Así pues, el dominio de $g \circ f$ es la unión $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Notarás que este dominio es diferente de los dominios de f y de g.

El próximo ejemplo ilustra la forma en que los valores especiales de funciones composición, se pueden llegar a obtener a partir de tablas.

EJEMPLO 5 *Determinación de los valores de una función composición mediante tablas*

En las tablas que siguen se enumeran diversos valores de dos funciones f y g.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	2	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	4	1	3	2

Encuentra $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ f)(2)$, y $(g \circ g)(2)$.

www.elsolucionario.net

Solución Con la definición de función composición y las tablas citadas, obtenemos

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$$
$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 1$$
$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g\,(1) = 4.$$

En algunos problemas aplicados es necesario expresar una cantidad y como función del tiempo t. El ejemplo adjunto ilustra que a menudo es más fácil introducir una tercera variable x, expresar x como función de t (esto es, $x = g(t)$), y y como función de x (es decir, $y = f(x)$), y terminar tomando la función composición dada por $y = f(x) = f(g(t))$.

EJEMPLO 6 *Uso de una función composición para hallar el volumen de un globo*

Un meteorólogo infla un globo esférico con helio. Si el radio del globo cambia a razón de 1.5 cm/s, expresa el volumen V del globo como función del tiempo t (en segundos: s).

Solución La literal x denota el radio del globo. Si suponemos que el radio primero es 0 entonces, después de t s,

$$x = 1.5t \qquad \text{radio del globo luego de } t \text{ s}$$

A modo de aclaración: después de 1 s, el radio es 1.5 cm; al cabo de 2 s, es 3.0 cm; luego de 3, es de 4.5 cm, etcétera.

A continuación se escribe

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3. \qquad \text{volumen de una esfera de radio } x$$

Esto nos dará una relación de función composición en que V es una función de x y x es una función de t. Por sustitución, obtenemos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{3}{2}t\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{27}{8}t^3\right).$$

Simplificamos y obtenemos la siguiente fórmula para V como función de t:

$$V = \tfrac{9}{2}\pi t^3$$

Si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \qquad \text{y} \qquad u = g(x),$$

entonces sustituimos u con $y = f(u)$ y llegamos a

$$y = f(g(x)).$$

Para ciertos problemas en cálculo se *invierte* este procedimiento; esto es, dada $y = h(x)$ para alguna función h, encontramos una *forma de función composición* $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tal que $h(x) = f(g(x))$.

EJEMPLO 7 *Determinación de una forma de función composición*

Expresa $y = (2x + 5)^8$ como forma de función composición.

www.elsolucionario.net

Solución Supongamos que se desea evaluar la expresión $(2x + 5)^8$ para un número real x, usando calculadora. Primero calcularíamos el valor de $2x + 5$ y luego elevaríamos el resultado a la octava potencia. Esto sugiere que haríamos

$$u = 2x + 5 \qquad \text{y} \qquad y = u^8,$$

que es una forma de función composición para $y = (2x + 5)^8$.

Este método se puede ampliar a otras funciones. En general, supongamos que nos dan $y = h(x)$. Para escoger la expresión *interior* $u = g(x)$ en una forma de función composición utilizando calculadora, nos preguntaríamos ¿qué parte de la expresión $h(x)$ debo evaluar primero? Esto nos lleva muchas veces a una opción apropiada para $u = g(x)$. Después de escoger u, nos referimos a $h(x)$ a fin de hallar $y = f(u)$. En la ilustración que sigue te ofrecemos problemas característicos.

ILUSTRACIÓN

Formas de función composición

Valor de función	**Opción para $u = g(x)$**	**Opción para $y = f(u)$**
■ $y = (x^3 - 5x + 1)^4$	$u = x^3 - 5x + 1$	$y = u^4$
■ $y = \sqrt{x^2 - 4}$	$u = x^2 - 4$	$y = \sqrt{u}$
■ $y = \dfrac{2}{3x + 7}$	$u = 3x + 7$	$y = \dfrac{2}{u}$

La forma de función composición nunca es única; por ejemplo, consideremos la primera expresión en la ilustración anterior:

$$y = (x^3 - 5x + 1)^4$$

Si n es un entero distinto de cero, escogeríamos

$$u = (x^3 - 5x + 1)^n \qquad \text{y} \qquad y = u^{4/n}.$$

Por lo tanto, hay un número *ilimitado* de formas de función composición. Por lo general, nuestra meta es escoger una forma tal que la expresión para y sea sencilla, según hicimos en la ilustración.

El próximo ejemplo aclara cómo una calculadora graficadora puede ayudar a determinar el dominio de una función composición. Usamos las funciones del ejemplo 4.

EJEMPLO 8 *Análisis gráfico de una función composición*

Sean $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$

a) Encuentra $f(g(3))$.

b) Traza $y = (f \circ g)(x)$ y con la gráfica halla el dominio de $f \circ g$.

Solución En el ejemplo 10 del apéndice I se dan algunas secuencias de tecleo específicas para la TI-82.

a) Comenzamos estableciendo las asignaciones

$$Y_1 = \sqrt{x} \qquad y \qquad Y_2 = (Y_1)^2 - 16.$$

www.elsolucionario.net

Notarás que sustituimos Y_1 con x en $f(x)$ y asignamos esta expresión a Y_2, de un modo muy parecido a como sustituimos x con $g(x)$ en el ejemplo 4.

A continuación guardamos en memoria el valor 3 para x y luego pedimos el valor de Y_2. Vemos que el valor de Y_2 en 3 es -13; esto es, $f(g(3)) = -13$.

b) Para determinar la pantalla de la gráfica de $f \circ g$, observamos primero que $f(x) \geq -16$ para toda x y, por lo tanto, escogemos Ymín *menos* que -16; por ejemplo, Ymín $= -20$. Si queremos que la pantalla tenga una dimensión vertical de 40, escogemos Ymáx $= 20$.

Si la pantalla está en proporción 1:1 (horizontal:vertical), una opción razonable para [Xmín, Xmáx] sería $[-10, 30]$, una dimensión horizontal de 40; si está en proporción de 3:2, ponemos a [Xmín, Xmáx] en $[-10, 50]$ (es decir, una dimensión horizontal de 60).

Al seleccionar Y_2 y luego visualizar la gráfica de Y_2 en la pantalla $[-10, 50]$ por $[-20, 20]$ llegamos a una gráfica similar a la figura 68. Se trata de una semirrecta con punto extremo $(0, -16)$; por lo tanto, el dominio de Y_2 es toda $x \geq 0$.

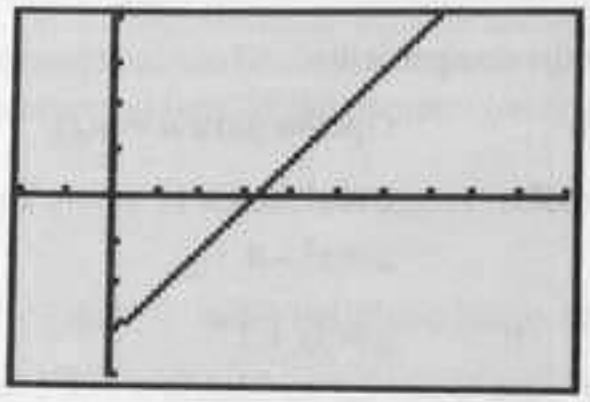


FIGURA 68 $[-10, 50]$ por $[-20, 20]$

El ejemplo adjunto demuestra cómo usar una calculadora graficadora para graficar funciones compuestas de la forma $af(bx)$. Aplicaremos la función del ejemplo 7, sección 3.5.

EJEMPLO 9 *Graficación de funciones composición*

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, traza la gráfica de $y = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Solución Con base en nuestro estudio sobre compresión y alargamiento de gráficas de la sección 3.5 reconocemos que la gráfica de f se comprimirá un factor 2 y se alargará un factor de 3. A fin de vincular este problema con funciones composición, podemos pensar que

$$y = -\tfrac{1}{2} f\left(\tfrac{1}{3}x\right) \quad \text{con} \quad y = -\tfrac{1}{2} f(g(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \tfrac{1}{3}x.$$

La última ecuación para y sugiere las asignaciones

$$Y_1 = \tfrac{1}{3}x, \quad Y_2 = (Y_1)^3 - 4(Y_1)^2 \quad \text{y} \quad Y_3 = -\tfrac{1}{2} Y_2.$$

Observarás que $Y_2 = f(Y_1) = f(g(x))$. Nada más seleccionamos Y_3 para graficar y escogemos la pantalla $[-7, 14]$ por $[-3, 11]$, a fin de obtener la figura 69.

Hay dos ventajas al asignar las funciones en la forma arriba indicada:

www.elsolucionario.net

(1) No tenemos que calcular la función polinomial a graficar, como hicimos en el ejemplo 7 sección 3.5.

(2) Con sólo cambiar los coeficientes de Y_1 y Y_2, comprobamos su efecto en la gráfica de Y_3.

Como ilustración del segundo punto, grafica $y = \frac{1}{2}f(3x)$ cambiando Y_1 por $3x$, Y_3 por $\frac{1}{2}Y_2$, la pantalla a [−1, 3] por [−5, 1] y luego grafica Y_3 para obtener la figura 70.

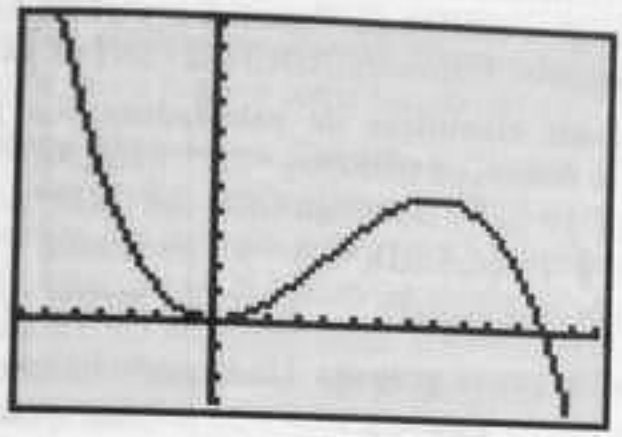


FIGURA 69 [−7, 14] por [−3, 11]

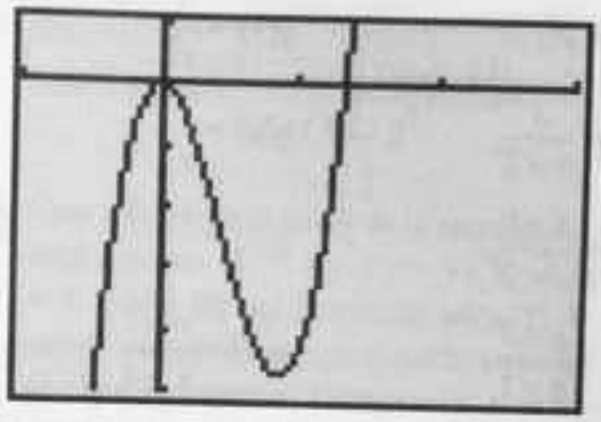


FIGURA 70 [−1, 3] por [−5, 1]

3.7 EJERCICIOS

Ejercicios 1 y 2: encuentra

a) $(f+g)(3)$ **b)** $(f-g)(3)$

c) $(fg)(3)$ **d)** $(f/g)(3)$

1. $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$
2. $f(x) = -x^2$, $g(x) = 2x - 1$

Ejercicios 3 al 8: halla

a) $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, y $(f/g)(x)$

b) El dominio de $f+g$, $f-g$, y fg

c) El dominio de f/g

3. $f(x) = x^2 + 2$ $g(x) = 2x^2 - 1$
4. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 3$
5. $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$
6. $f(x) = \sqrt{3-2x}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$
7. $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+5}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{3x}{x+4}$

Ejrcicios 9 y 10: determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ g)(x)$

9. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x^2$
10. $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x - 1$

Ejercicios 11 al 20: encuentra

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

c) $f(g(-2))$ **d)** $g(f(3))$

11. $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 3x + 7$
12. $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 6x - 1$
13. $f(x) = 3x^2 + 4$, $g(x) = 5x$
14. $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4x^2$
15. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $g(x) = 2x - 1$
16. $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = 3x^2 - x + 2$
17. $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^3 - 5x$
18. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x$
19. $f(x) = |x|$, $g(x) = -7$
20. $f(x) = 5$, $g(x) = x^2$

Ejercicios 21 al 34: halla a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$ y b) $(g \circ f)(x)$ y dominio de $g \circ f$.

21. $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$
22. $f(x) = \sqrt{x-15}$, $g(x) = x^2 + 2x$
23. $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{3x}$
24. $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
25. $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

www.elsolucionario.net

26. $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

27. $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

28. $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x-5}$

29. $f(x) = \dfrac{3x+5}{2}$, $g(x) = \dfrac{2x-5}{3}$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = x - 1$

31. $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

32. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{3}{x}$

33. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$

34. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-5}{x+4}$

Ejercicios 35 y 36: resuelve la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$

35. $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x + 3$

36. $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = 2x - 1$

37. En las siguientes tablas se enumeran diversos valores de dos funciones f y g.

x	5	6	7	8
$f(x)$	8	7	6	5

x	5	6	7	8
$g(x)$	7	8	6	5

Encuentra

a) $(f \circ g)(6)$ **b)** $(g \circ f)(6)$

c) $(f \circ f)(6)$ **d)** $(g \circ g)(6)$

38. En las tablas que siguen se listan diversos valores de dos funciones T y S:

t	0	1	2	3
$T(t)$	2	3	1	0

x	0	1	2	3
$S(x)$	1	0	3	2

Encuentra

a) $(T \circ S)(1)$ **b)** $(S \circ T)(1)$

c) $(T \circ T)(1)$ **d)** $(S \circ S)(1)$

39. Si $D(t) = \sqrt{400 + t^2}$ y $R(x) = 20x$, halla $(D \circ R)(x)$

40. Si $S(r) = 4\pi r^2$ y $D(t) = 2t + 5$, encuentra $(S \circ D)(t)$.

41. Si f es una función non y g es una función par, ¿g será par, non o ninguna de las dos?

42. Hay una función con dominio $\mathbb{R}$ que es par y non; encuéntrala.

43. Funciones de lista de pago La función de impuesto del seguro social SSTAX se define como $\text{SSTAX}(x) = 0.0715x$, donde $x \geq 0$ en el ingreso semanal. Sea ROUND2 la función que redondea una cifra a dos lugares decimales. Encuentra $(\text{ROUND2} \circ \text{SSTAX})(437.21)$.

44. Funciones científicas de calculadoras La función CHR se define con CHR(65) = "A", CHR(66) = "B", ..., CHR(91) = "Z" y la función ORD con ORD("A") = 65, ORD("B") = 66, ORD("Z") = 91. Encuentra

a) (CHR ∘ ORD)("C") **b)** CHR(ORD("A") + 3)

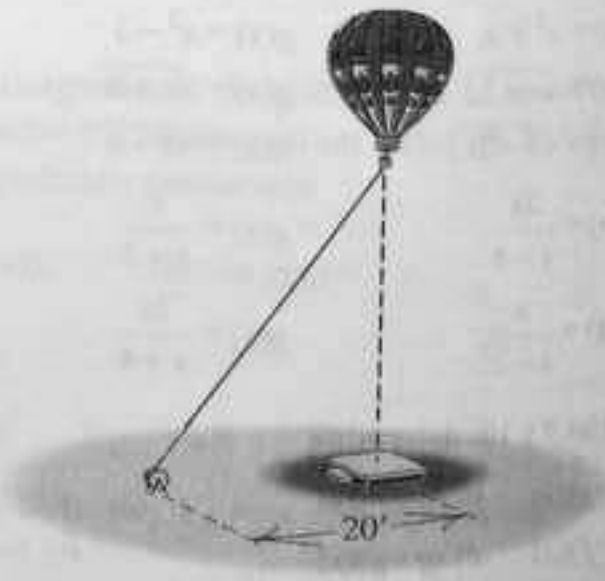
45. Incendio que se propaga Un incendio ha comenzado en un campo abierto y seco y se propaga en forma de círculo. Si el radio de éste aumenta a razón de 6 ft/min, da el área total A del incendio como función del tiempo t (en min).

46. Dimensiones de un globo Se infla un globo esférico a $\frac{9}{2}\pi$ ft^3/min. Expresa su radio r como función del tiempo t (en min). Sea $r = 0$ cuando $t = 0$.

47. Dimensiones de un montón de arena El volumen de un montón cónico de arena aumenta a 243π ft^3/min, y la altura del montón siempre es igual al radio r de la base. Determina r como función del tiempo t (en min). Sea $r = 0$ cuando $t = 0$.

48. Diámetro de un cubo El diámetro d de un cubo es la distancia entre dos vértices opuestos. Expresa d como función del borde x del cubo. (*Sugerencia*: expresa primero la diagonal y de una cara como función de x.)

49. Altitud de un globo Un globo de aire caliente sube verticalmente desde el suelo 5 ft/s conforme se suelta una cuerda atada a su base (ve la figura). La polea que



EJERCICIO 49

www.elsolucionario.net

suelta la cuerda está a 20 ft de la plataforma en que los pasajeros abordan el globo. Encuentra la altitud h del globo como función del tiempo t.

50. Equilibrista de la cuerda floja Consulta el ejercicio 64, sección 3.4. El equilibrista comienza en el punto más bajo y avanza por la cuerda a razón de 2 ft/s. Si la cuerda está sujeta en un punto a 30 ft de la base del poste, halla la altura h del equilibrista sobre el suelo como función del tiempo t. (*Sugerencia:* d denota la distancia total recorrida a lo largo del alambre. Expresa primero d como función de t y luego h como función de d.)

51. Despegue de aviones Consulta el ejercicio 65, sección 3.4. Cuando el avión ha avanzado 500 ft por la pista, ha alcanzado una velocidad de 150 ft/s (alrededor de 102 mph), que mantendrá hasta el despegue. Expresa la distancia d del aeroplano desde la torre de control como función del tiempo t (en s). (*Sugerencia:* en la figura, escribe primero x como función de t.)

52. Corrosión de cables Un cable de 100 ft de largo y 4 in de diámetro está sumergido en el mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye a razón de 750 in^2 por año. Expresa el diámetro d del cable como función del tiempo t (en años). Desprecia la corrosión en los extremos del cable.

Ejercicios 53 al 60: encuentra una forma de función composición para y.

53. $y = (x^2 + 3x)^{1/3}$

54. $y = \sqrt[4]{x^4 - 16}$

55. $y = \dfrac{1}{(x-3)^4}$

56. $y = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

57. $y = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$

58. $y = \dfrac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$

59. $y = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$

60. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

61. Si $f(x) = \sqrt{x} - 1$ y $g(x) = x^3 + 1$, calcula $(f \circ g)(0.0001)$. Para evitar calcular un valor cero para $(f \circ g)(0.0001)$, reescribe la fórmula de $f \circ g$ como

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 1} + 1}.$$

62. Si $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 2}$ y $g(x) = (\sqrt{3x} - x^3)^{3/2}$, calcula

$$\frac{(f+g)(1.12) - (f/g)(1.12)}{[(f \circ f)(5.2)]^2}.$$

C **63.** Consulta el ejercicio 49 de la sección 3.5. Haz las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(Y_1 + 2)(6 - Y_1)} - 4$. Halla las asignaciones para Y_1 y Y_3 que permitirán graficar cada función en a)-h), y luego graficar la función. Comprueba el dominio y el rango con la respuesta al ejercicio indicado.

a) $y = -2f(x)$ **b)** $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $y = f(x - 3) + 1$ **d)** $y = f(x + 2) - 3$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$ **h)** $y = |f(x)|$

C **64.** Consulta el ejercicio 50, sección 3.5. Haz las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(-Y_1 - 6)(Y_1 + 2)} - 10$. Encuentra las asignaciones para Y_1 y Y_3 que harán posible graficar cada función, y luego grafica la función.

a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ **b)** $y = f(2x)$

c) $y = f(x - 2) + 5$ **d)** $y = f(x + 4) - 1$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$ **h)** $y = |f(x)|$

3.8 Funciones inversas

Una función f puede tener el mismo valor para diferentes números en su dominio; por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Para definir *la inversa de una función*, es esencial que distintos números del dominio *siempre* den diferentes valores de f. Tales funciones se llaman *funciones biunívocas* (*o uno a uno*).

Definición de función biunívoca

Una función f con dominio D y rango R es una **función biunívoca** si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) Siempre que $a \neq b$ en D, entonces, $f(a) \neq f(b)$ en R.

(2) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R, entonces $a = b$ en D.

www.elsolucionario.net

El diagrama de flechas de la figura 71 ilustra una función biunívoca. Observarás que cada valor de función del rango R corresponde a *exactamente un* elemento del dominio D. La función de la figura 37 de la sección 3.4 no es biunívoca, puesto que $f(w) = f(z)$, pero $w \neq z$.

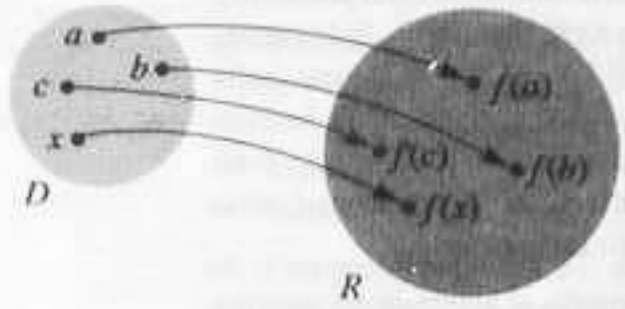


FIGURA 71

EJEMPLO 1 *Determinación de la biunivocidad de una función*

a) Si $f(x) = 3x + 2$, demuestra que f es biunívoca.

b) Si $g(x) = x^4 + 2x^2$, demuestra que g no es biunívoca.

Solución **a)** Usaremos la condición 2 de la definición anterior. Supongamos que $f(a) = f(b)$ para algunos números a y b del dominio de f. Esto dará

$$3a + 2 = 3b + 2 \qquad \text{definición de } f(x)$$

$$3a = 3b \qquad \text{restar 2}$$

$$a = b \qquad \text{dividir entre 3}$$

En consecuencia, f es biunívoca.

b) Demostrar que una función *es* biunívoca requiere una prueba *general*, como en la parte a). Para probar que g *no es* biunívoca basta encontrar dos números reales distintos en el dominio que produzcan el mismo valor de función; por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $g(-1) = g(1)$. De hecho, como g es una función par, $f(-a) = f(a)$ para todo número real a.

Si conocemos la gráfica de una función f, es fácil determinar si f es biunívoca; por ejemplo, la función cuya gráfica se traza en la figura 72 no es biunívoca porque $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$. Notarás que la recta horizontal $y = f(a)$ (o $y = f(b)$) corta la gráfica en más de un punto. En general, podemos usar la siguiente prueba gráfica para averiguar si una función es biunívoca.

Prueba de la recta horizontal

Una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal corta la gráfica de f cuando mucho en un punto.

Dado que toda función creciente o decreciente pasa la prueba de la recta horizontal, se obtiene este resultado:

www.elsolucionario.net

Teorema las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

(1) Una función creciente en su dominio es biunívoca.

(2) Una función decreciente en su dominio es biunívoca.

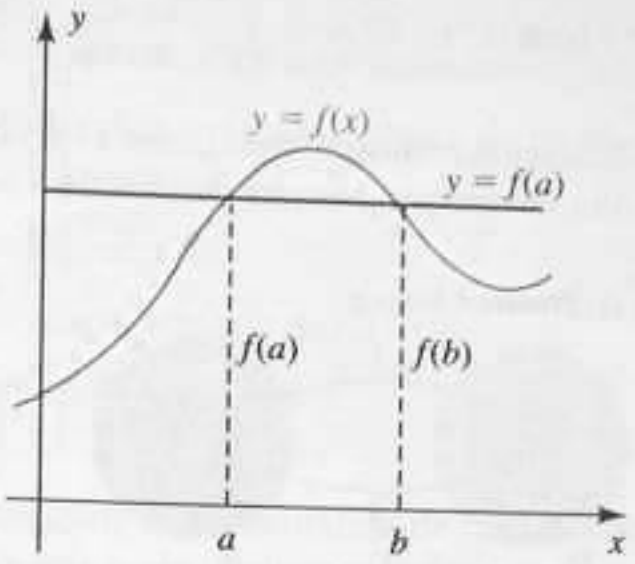


FIGURA 72

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R; por lo tanto, para cada número y en R, hay *exactamente un* número x en D tal que $y = f(x)$, según presenta la flecha de la figura 73a). En consecuencia, podemos definir una función g de R a D por medio de la siguiente regla:

$$x = g(y)$$

Puesto que en la figura 73b), *g invierte la correspondencia dada por f.* Llamamos g a la *función inversa de f*, como en esta definición:

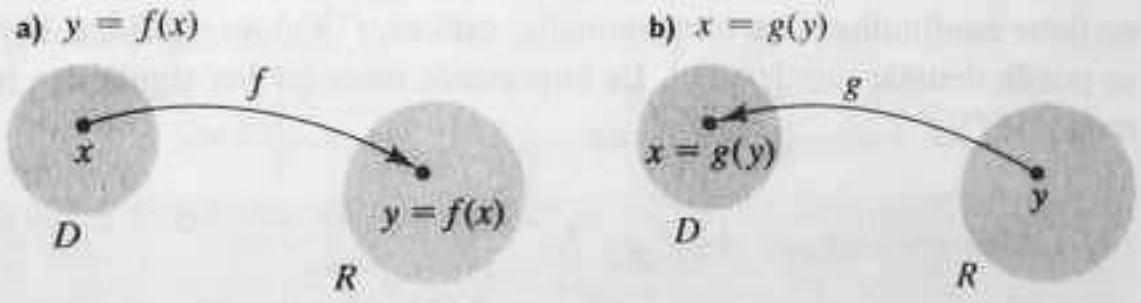


FIGURA 73

Definición de función inversa

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Una función g con dominio R y rango D es la **función inversa** de f, siempre que sea cierta la siguiente condición para toda x en D y toda y en R:

$$y = f(x) \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = g(y)$$

Recuerda que para definir la inversa de una función f, es *indispensable que f sea biunívoca.* El siguiente teorema, establecido sin prueba, es útil para verificar que una función g es la inversa de f.

www.elsolucionario.net

Teorema sobre funciones inversas

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Si g es una función con dominio R y rango D, entonces g es la función inversa de f si y sólo si son ciertas estas dos condiciones:

(1) $g(f(x)) = x$ para toda x en D

(2) $f(g(y)) = y$ para toda y en R

Dichas condiciones se ilustran en la figura 74a) y b), donde la flecha indica que f es una función de D a R y la otra flecha, que g es una función de R a D.

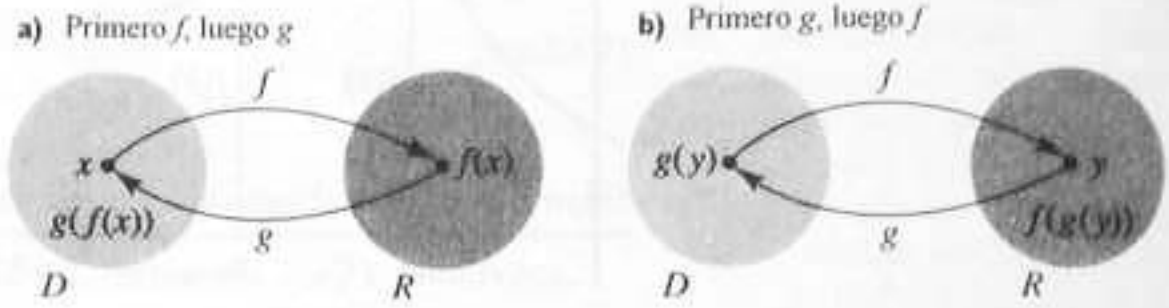


FIGURA 74

En la figura 74a) notarás que aplicamos primero f al número x en D y obtuvimos el valor de función $f(x)$ en R, luego aplicamos g a $f(x)$, y llegamos al número $g(f(x))$ en D. La condición (1) del teorema expresa que $g(f(x)) = x$ para toda x; esto es, g *invierte* la correspondencia dada por f.

En la figura 74b) usamos el orden opuesto para las funciones. Primero aplicamos g al número y en R y obtuvimos el valor de función $g(y)$ en D, luego aplicamos f a $g(y)$, y llegamos al número $f(g(y))$ en R. La condición (2) del teorema expresa que $f(g(y)) = y$ para toda y; esto es, f *invierte* la correspondencia dada por g.

Si una función f tiene una función inversa g, a menudo f^{-1} denota a g. El -1 de esta notación no debe confundirse con un exponente; esto es, $f^{-1}(y)$ *no significa* $1/[f(y)]$. El reciproco $1/[f(y)]$ se puede denotar con $[f(y)]^{-1}$. Es importante recordar los siguientes hechos sobre el dominio y rango de f y f^{-1}.

Dominio y rango de f y f^{-1}

$$\text{Dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{Rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Cuando estudiamos funciones, muchas veces x denota un número arbitrario en el dominio; por lo tanto, para la función inversa f^{-1} podemos considerar $f^{-1}(x)$, *donde x está en el dominio de f^{-1}*. En este caso, las dos condiciones del teorema sobre funciones inversas se escriben de esta manera

(1) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f

(2) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

En la figura 74 presentamos una sugerencia a fin de hallar la inversa de una función biunívoca en ciertos casos: si es posible, *resolvemos la ecuación $y = f(x)$ para toda x en términos de y*, con

www.elsolucionario.net

lo cual obtenemos una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si son ciertas las dos condiciones $g(f(x)) = x$ y $f(g(x))$ para toda x en los dominios de f y g, respectivamente, entonces g es la función inversa requerida f^{-1}. Los siguientes lineamientos resumen este procedimiento; en la guía 2, antes de hallar f^{-1}, escribimos $x = f^{-1}(y)$ en vez de $x = g(y)$.

Guías para hallar f^{-1} en casos sencillos

(1) Comprobar que f sea función biunívoca en su dominio.

(2) Despejar x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y a fin de obtener una ecuación del tipo $x = f^{-1}(y)$.

(3) Confirmar estas dos condiciones:

a) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f

b) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

El éxito de este método depende de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, ya que debemos despejar x en términos de y. Por esta razón, incluimos la frase *en casos sencillos* en el título de las guías. Seguiremos estas recomendaciones en los próximos tres ejemplos.

EJEMPLO 2 *Determinación de la inversa de una función*

Sea $f(x) = 3x - 5$. Encuentra la función inversa de f.

Solución **Guía 1** La gráfica de la función lineal f es una recta de pendiente 3; por lo tanto, f es creciente en $\mathbb{R}$. En consecuencia, f es biunívoca y la función inversa f^{-1} existe. Además, como el dominio y rango de f es $\mathbb{R}$, lo mismo es cierto para f^{-1}.

Guía 2 Despejar x de la ecuación $y = f(x)$:

$$y = 3x - 5 \qquad \text{sea } y = f(x)$$

$$x = \frac{y+5}{3} \qquad \text{despejar } x \text{ en términos de } y$$

Ahora hacemos $x = f^{-1}(y)$; esto es,

$$f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}.$$

En vista de que el símbolo de la variable no tiene importancia, podemos escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3},$$

donde x es en el dominio de f^{-1}.

Guía 3 Dado que el dominio y rango de f y f^{-1} es $\mathbb{R}$, debemos comprobar las condiciones a) y b) para todo número real x:

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 5)$ definición de f

$$= \frac{(3x-5)+5}{3} \qquad \text{definición de } f^{-1}$$

$$= x \qquad \text{simplificar}$$

www.elsolucionario.net

b) $$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+5}{3}\right)$$ definición de f^{-1}

$$= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5$$ definición de f

$$= x$$ simplificar

Estas comprobaciones demuestran que la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}.$$

EJEMPLO 3 *Determinación de la inversa de una función*

Sea $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$. Encuentra la función inversa de f.

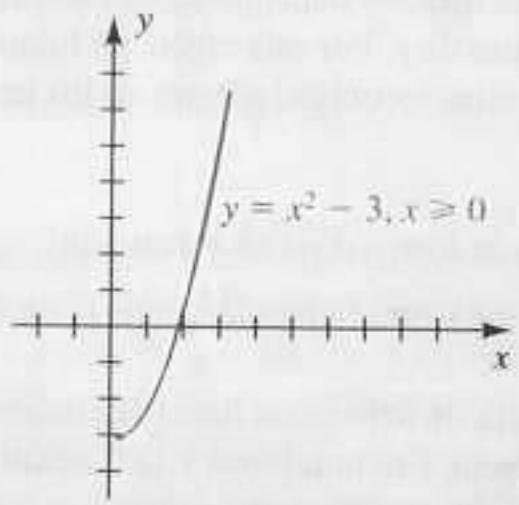


FIGURA 75

Solución **Guía 1** La gráfica de f aparece en la figura 75. El dominio de f es $[0, \infty)$, y el rango es $[-3, \infty)$. Puesto que f es creciente, es biunívoca y, por lo tanto, tiene una función inversa f^{-1} con dominio $[-3, \infty)$ y rango $[0, \infty)$.

Guía 2 Consideramos la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

y al despejar x obtenemos

$$x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Ya que x es no negativa, rechazamos $x = -\sqrt{y+3}$ y hacemos

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

(Observarás que si la función f tuviera dominio $x \leq 0$, escogeríamos la función $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$).

Guía 3 Confirmamos las condiciones a) y b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

a) $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3)$$

$$= \sqrt{(x^2 - 3) + 3} = \sqrt{x^2} = x \text{ para } x \geq 0$$

www.elsolucionario.net

b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x+3})$

$= (\sqrt{x+3})^2 - 3 = (x+3) - 3 = x$ para $x \geq -3$

Por lo tanto, la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{para} \quad x \geq -3.$$

Hay una relación interesante entre la gráfica de una función f y la de su inversa f^{-1}. Primero vemos que $b = f(a)$ equivale a $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones representan que *el punto* (a, b) *está en la gráfica de* f *si y sólo si el punto* (b, a) *se encuentra en la gráfica de* f^{-1}.

A manera de ilustración, en el ejemplo 3 encontramos que las funciones f y f^{-1} dadas por

$$f(x) = x^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

son funciones inversas siempre que x se limite en forma adecuada. Algunos puntos de la gráfica de f son $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes de la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} se trazan en el mismo plano coordenado en la figura 76. Si la página se dobla a lo largo de la recta $y = x$ que corta los cuadrantes primero y tercero (como indica la línea punteada de la Fig.), las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Las dos gráficas son *reflexiones* una de otra en toda la recta $y = x$, o son *simétricas* con respecto a esta recta. Esto es característico de la gráfica de toda función f que tenga una función inversa f^{-1} (Ejer. 40).

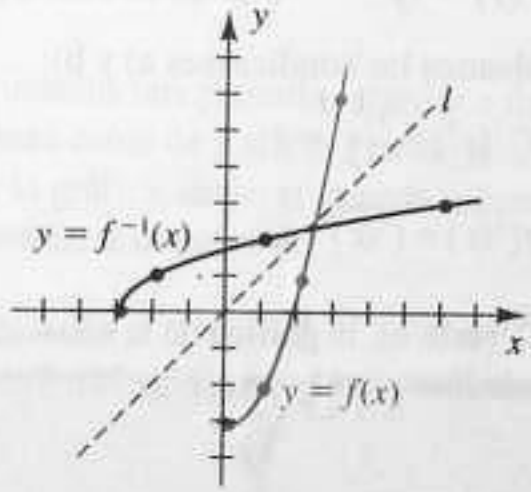


FIGURA 76

EJEMPLO 4 *Relación entre las gráficas de* f *y* f^{-1}

Sea $f(x) = x^3$. Encuentra la función inversa f^{-1} de f y traza las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.

Solución La gráfica de f aparece en la figura 77. Observarás que f es una función non y por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Guía 1 Puesto que f es creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$, es biunívoca y en consecuencia tiene una función inversa f^{-1}.

Guía 2 Consideramos la ecuación

$$y = x^3$$

www.elsolucionario.net

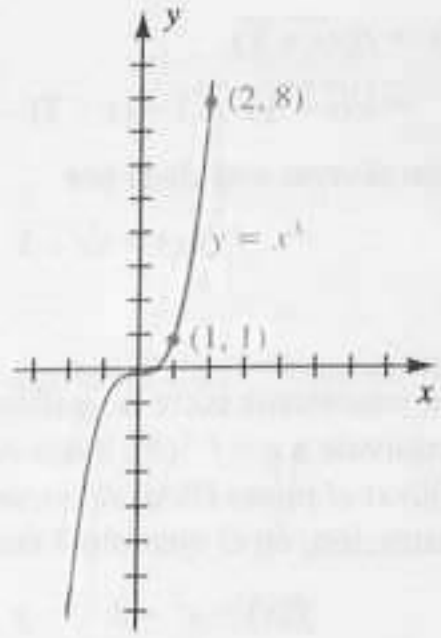


FIGURA 77

y despejamos x tomando la raíz cúbica de cada lado:

$$x = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}.$$

Ahora

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \qquad \text{o bien, lo cual equivale a} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Guía 3 Comprobamos las condiciones a) y b):

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ para toda x en ℝ

b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$ para toda x en ℝ

La gráfica de f^{-1} (esto es, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$) se obtiene reflejando la gráfica de la figura 77 en toda la línea recta $y = x$ (Fig. 78). Tres puntos de la gráfica de f^{-1} son (0, 0), (1, 1) y (8, 2).

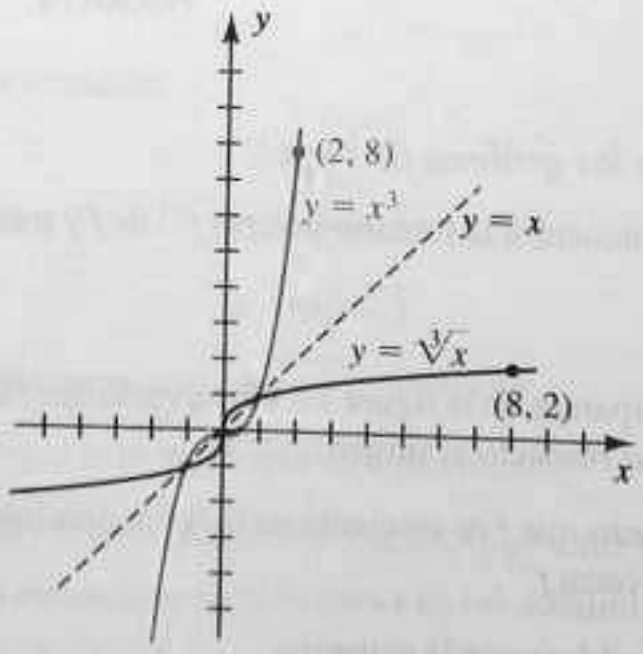


FIGURA 78

www.elsolucionario.net

En el próximo ejemplo exponemos la utilidad de algunos de los conceptos presentados en esta sección para determinar el trazo de una gráfica con ayuda de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 5 *Trazado de la gráfica de la inversa de una función*

a) Traza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) Explica por qué f es biunívoca y traza la gráfica de f^{-1}.

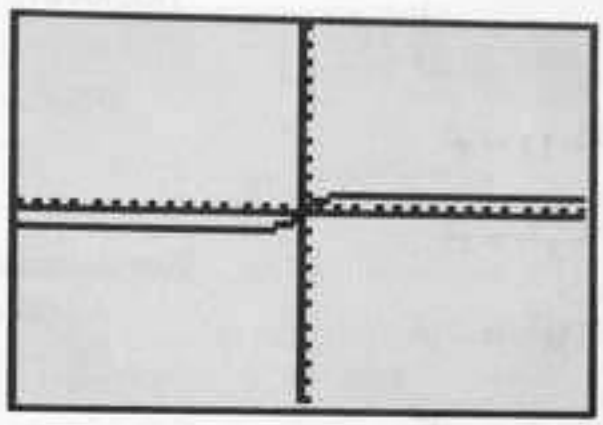


FIGURA 79 [−15, 15] por [−10, 10]

Solución **a)** Asignamos $x/\sqrt{x^2+1}$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar a fin de obtener una imagen similar a la figura 79. La coordenada y está cerca de 1 si x es grande positiva y cerca de −1 si x es grande negativa. Con objeto de mejorar la gráfica, dimensionamos la pantalla a [−15, 15] por [−1, 1], con lo que obtenemos una imagen similar a la figura 80.

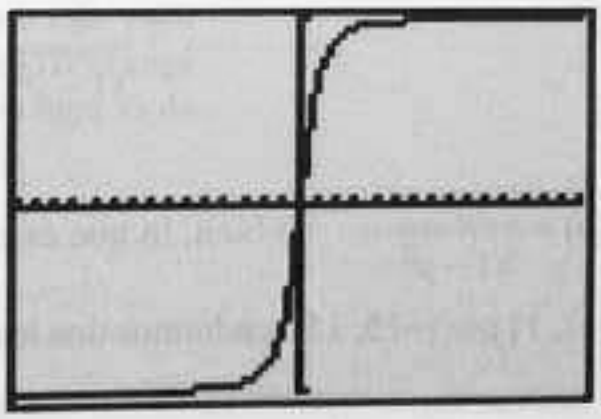


FIGURA 80 [−15, 15] por [−1, 1]

b) De acuerdo con la prueba de la recta horizontal, la función f parece biunívoca con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-1, 1)$. (Estos datos se pueden demostrar algebraicamente pero no lo haremos aquí.) Por lo tanto, f tiene una función inversa f^{-1} con dominio $(-1, 1)$ y rango $\mathbb{R}$.

Para hallar f^{-1}, despejamos x de la ecuación $y = f(x)$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{dados}$$

$$y\sqrt{x^2+1} = x \qquad \text{multiplicar por } \sqrt{x^2+1}$$

(continúa)

www.elsolucionario.net

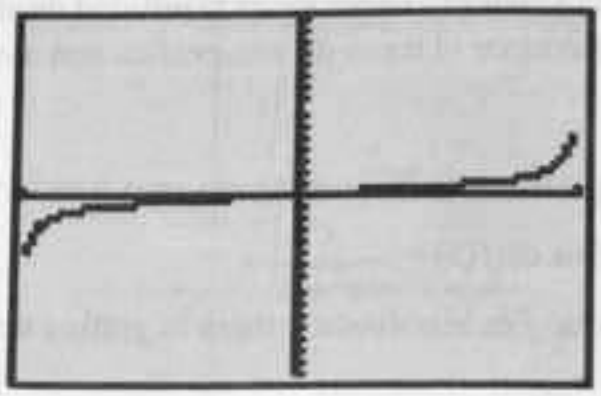


FIGURA 81 $[-1, 1]$ por $[-15, 15]$

$$y^2(x^2+1) = x^2 \qquad \text{elevar al cuadrado ambos lados}$$

$$y^2x^2 + y^2 = x^2 \qquad \text{multiplicar}$$

$$(y^2-1)x^2 = -y^2 \qquad \text{combinar términos en } x^2$$

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \qquad \text{dividir entre } 1-y^2 \text{ y cambiar signos}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}} = \pm\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

$$x = \pm\frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \sqrt{y^2} = |y|$$

Al consultar la figura 80 vemos que x y y *siempre son ambas positivas o negativas ambas*, de modo que la última ecuación se puede simplificar a

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Así pues

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{o bien, lo que es equivalente, } f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Con la pantalla $[-1, 1]$ por $[-15, 15]$ tendremos una imagen similar a la de la figura 81.

3.8 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 12: determina si la función *f* es biunívoca.

1. $f(x) = 3x - 7$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
3. $f(x) = x^2 - 9$
4. $f(x) = x^2 + 4$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
7. $f(x) = |x|$
8. $f(x) = 3$
9. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
10. $f(x) = 2x^3 - 4$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejercicios 13 al 16: utiliza el teorema sobre funciones inversas a fin de probar que *f* y *g* son funciones inversas y traza las gráficas de *f* y *g* en el mismo plano coordenado.

13. $f(x) = 3x - 2$; $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

Glosario.net

14. $f(x) = x^2 + 5, x \le 0$; $g(x) = -\sqrt{x-5}, x \ge 5$

15. $f(x) = -x^2 + 3, x \ge 0$; $g(x) = \sqrt{3-x}, x \le 3$

16. $f(x) = x^3 - 4$; $g(x) = \sqrt[3]{x+4}$

Ejercicios 17 al 32: encuentra la función inversa de *f*.

17. $f(x) = 3x + 5$

18. $f(x) = 7 - 2x$

19. $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

21. $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-5}$

22. $f(x) = \dfrac{4x}{x-2}$

23. $f(x) = 2 - 3x^2, x \le 0$

24. $f(x) = 5x^2 + 2, x \ge 0$

25. $f(x) = 2x^3 - 5$

26. $f(x) = -x^3 + 2$

27. $f(x) = \sqrt{3-x}$

(*Nota:* en el Ejem. 11 del Ap. I se dan instrucciones para graficar la inversa de una función en la TI-82).

28. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, 0 \le x \le 2$

29. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

30. $f(x) = (x^3 + 1)^5$

31. $f(x) = x$

32. $f(x) = -x$

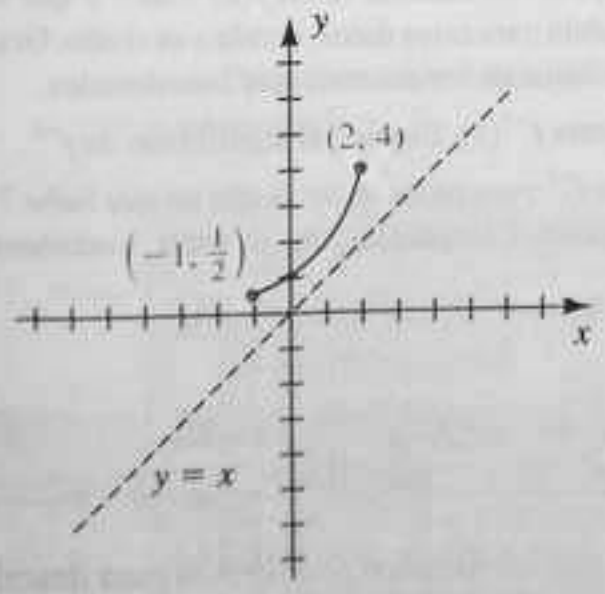
Ejercicios 33 y 34: encuentra $f^{-1}(x)$ para la función y condición dadas

33. $f(x) = x^2 - 4$; $f^{-1}(5) = -3$

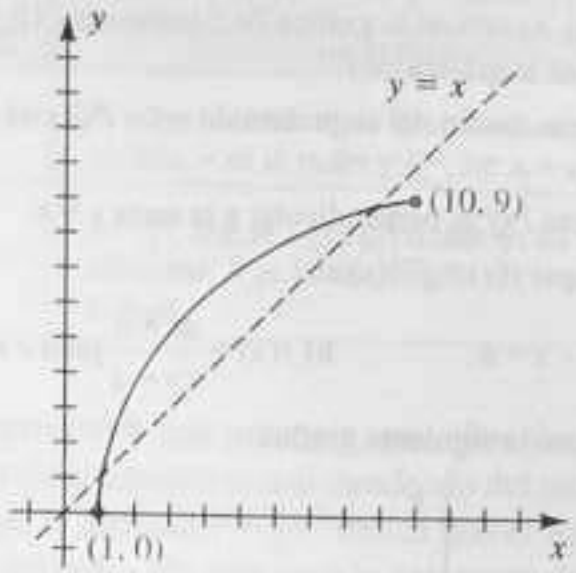
34. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $f^{-1}(3) = 0$

Ejericios 35 al 38: se muestra la gráfica de una función biunívoca *f*; a) utiliza la propiedad de reflexión para trazar la gráfica de f^{-1}; b) encuentra el dominio *D* y rango *R* de la función *f*, y c) halla el dominio D_1 y rango R_1 de la función inversa f^{-1}.

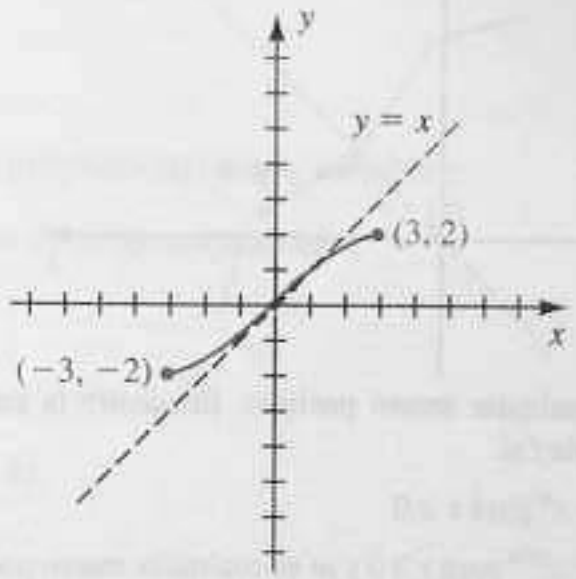
35.



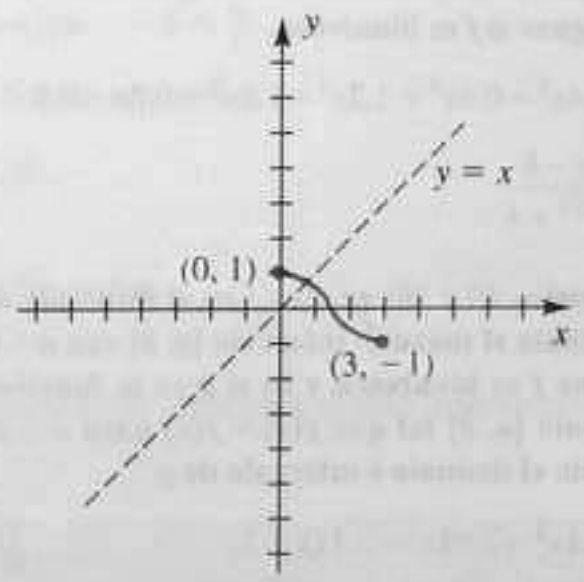
36.



37.



38.



39. a) Demuestra que la función definida por $f(x) = ax + b$ (una función lineal) para $a \neq 0$ cuenta con una función inversa y halla $f^{-1}(x)$.

b) ¿Una función constante tiene una inversa? Explicate.

40. Demuestra que la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de *f* en toda la línea recta $y = x$ comprobando las siguientes condiciones:

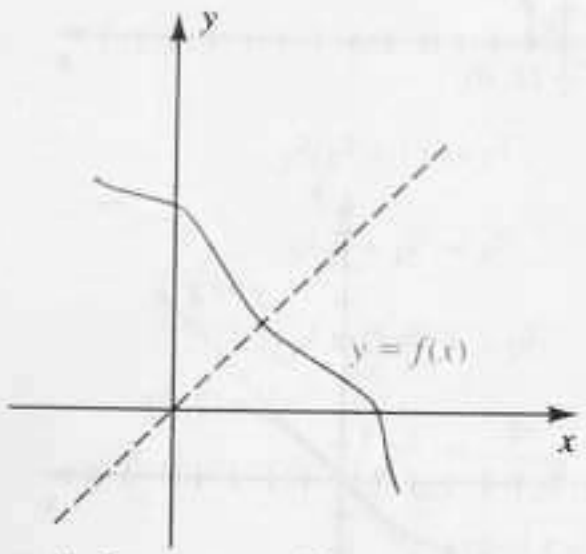
www.elsolucionario.net

1) Si $P(a, b)$ está en la gráfica de f, entonces $Q(b, a)$ se halla en la gráfica de f^{-1}.
2) El punto medio del segmento de recta PQ está en la recta $y = x$.
3) La recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$.

41. Verifica que $f(x) = f^{-1}(x)$ si

a) $f(x) = -x + b$ **b)** $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$ para $c \neq 0$

c) $f(x)$ tiene la siguiente gráfica:



42. Sea n cualquier entero positivo. Encuentra la función inversa de f si

a) $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$

b) $f(x) = x^{m/n}$ para $x \geq 0$ y m es cualquier entero positivo

C **Ejercicios 43 y 44: utiliza la gráfica de f para averiguar si f es biunívoca.**

43. $f(x) = 0.4x^5 - 0.4x^4 + 1.2x^3 - 1.2x^2 + 0.8x - 0.8$

44. $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^{2/3} + 4}$

C **Ejercicios 45 y 46: grafica f en el intervalo dado; a) calcula el máximo intervalo $[a, b]$ con $a < 0 < b$ en que f es biunívoca y b) si g es la función con dominio $[a, b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, calcula el dominio e intervalo de g^{-1}.**

45. $f(x) = 2.1x^3 - 2.98x^2 - 2.11x + 3$; $[-1, 2]$

46. $f(x) = 0.05x^4 - 0.24x^3 - 0.15x^2 + 1.18x + 0.24$; $[-2, 2]$

C **Ejercicios 47 y 48: grafica f en la pantalla dada. Con la gráfica de f pronostica la forma de la gráfica de f^{-1}. Comprueba tu pronóstico graficando f^{-1} y la recta $y = x$ en la misma pantalla.**

47. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$; $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

48. $f(x) = 2(x - 2)^2 + 3, x \geq 2$; $[0, 12]$ por $[0, 8]$

49. Necesidades de ventilación La ventilación es una forma eficiente de mejorar la calidad del aire en interiores. En restaurantes donde no se permite fumar, las necesidades de circulación del aire (en ft^3/min) están dadas por la función $V(x) = 35x$, donde x es la cantidad de personas en el comedor.

a) Halla las necesidades de ventilación para 23 comensales.

b) Encuentra $V^{-1}(x)$. Explica el significado de V^{-1}.

c) Utiliza V^{-1} para establecer el cupo máximo de un restaurante con una capacidad de ventilación de 2350 ft^3/min.

C **50. Estaciones de radio** En la tabla que sigue se enumeran las cantidades totales de estaciones de radio en Estados Unidos en ciertos años.

Año	Número
1950	2 773
1960	4 133
1970	6 760
1980	8 566
1990	10 819

a) Grafica los datos.

b) Determina una función lineal $f(x) = ax + b$ que sirva de modelo para estos datos, donde x es el año. Grafica f y los datos en los mismos ejes coordenados.

c) Encuentra $f^{-1}(x)$. Explica el significado de f^{-1}.

d) Utiliza f^{-1} para pronosticar el año en que hubo 7744 estaciones. Compáralo con el valor verdadero de 1975.

3.9 Variación

En algunas investigaciones científicas, se usan los términos *variación* o *proporción* para describir relaciones entre cantidades variables. En la tabla vecina, k es un número real diferente de cero y se llama **constante de variación** o **constante de proporcionalidad.**

www.elsolucionario.net

Terminología	Fórmula general	Ejemplo
y **varía en forma directamente** con x, o y es **directamente proporcional** a x	$y = kx$	$C = 2\pi r$, donde C es la circunferencia de un círculo, r es el radio y $k = 2\pi$.
y **varía en forma inversamente** con x, o y es **inversamente proporcional** a x	$y = \frac{k}{x}$	$I = \frac{110}{R}$, donde I es l corriente en un circuito eléctrico, R es la resistencia y $k = 110$ es el voltaje.

La variable x de la tabla también puede representar una potencia; por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ expresa que el área A de un círculo varía directamente con el *cuadrado* del radio r, donde π es la constante de variación. De manera análoga, la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi^3$ indica que el volumen V de una esfera es directamente proporcional al *cubo* del radio. En este caso la constante de proporcionalidad es $\frac{4}{3}\pi$.

EJEMPLO 1 *Variables directamente proporcionales*

Supongamos que una variable q es directamente proporcional a una variable z.

a) Si $q = 12$ cuando $z = 5$, determina la constante de proporcionalidad.

b) Encuentra el valor de q cuando $z = 7$.

Solución Como q es directamente proporcional a z,

$$q = kz,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

a) Al sustituir $q = 12$ y $z = 5$ obtenemos

$$12 = k \cdot 5 \qquad \text{o bien} \qquad k = \frac{12}{5}.$$

b) Dado que $k = 12/5$, la fórmula $q = kz$ tiene la forma específica

$$q = \frac{12}{5}z.$$

Por lo tanto, cuando $z = 7$,

$$q = \frac{12}{5} \cdot 7 = \frac{84}{5} = 16.8.$$

Podemos usar estas guías a fin de resolver problemas aplicados donde intervenga variación o proporción:

Guías para resolver problemas de variación

(1) Escribir una fórmula *general* donde intervengan las variables y una constante de variación (o proporción) k.

(2) Encontrar el valor de k de la guía (1) usando los datos iniciales dados en el enunciado del problema.

(3) Sustituir el valor de k, encontrado en la guía (2), en la fórmula de la guía 1 para obtener una fórmula *específica* con las variables.

(4) Usar los nuevos datos a fin de resolver el problema.

www.elsolucionario.net

Seguiremos estas guías en la solución del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 *Presión y volumen son cantidades inversamente proporcionales*

Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas confinado es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 in de radio es 20 lb/in^2. Si el radio del globo aumenta a 12 in, calcula la nueva presión del gas.

Solución **Guía 1** Si denotamos la presión por P (en lb/in^2) y el volumen por V (en in^3), puesto que P es inversamente proporcional a V,

$$P = \frac{k}{V}$$

para alguna constante de proporcionalidad k.

Guía 2 Encontramos la constante de proporcionalidad k en la guía (1). Dado que el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el volumen inicial del globo es $V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi$ in^3. Esto lleva a lo siguiente:

$$20 = \frac{k}{972\pi} \qquad P = 20 \text{ cuando } V = 972\pi$$

$$k = 20(972\pi) = 19\,440\pi \qquad \text{despejar } k$$

Guía 3 Al sustituir $k = 19\,440\pi$ en $P = k/V$, encontramos que la presión correspondiente a cualquier volumen V está dada por

$$P = \frac{19\,440\pi}{V}.$$

Guía 4 Si el nuevo radio del globo es 12 in, entonces

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(12)^3 = 2304\pi \text{ in}^3.$$

Al sustituir este número con V en la fórmula de la guía (3), obtendremos

$$P = \frac{19\,440\pi}{2304\pi} = \frac{135}{16} = 8.4375.$$

Por lo tanto, la presión disminuye unas 8.4 lb/in^2 cuando el radio aumenta a 12 in.

Hay otros tipos de variación. Si x, y y z son variables y $y = kxz$ para algún número real k decimos que *y varía directamente con el producto de x y z* o *y **conjuntamente con** x y z*. Si $y = k(x/z)$, entonces *y varía directamente con x e inversamente con z*. Como ilustración final, si una variable w varía directamente con el producto de x y el cubo de y e inversamente con el cuadrado de z, entonces

$$w = k\frac{xy^3}{z^2},$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3 *Combinado de diversos tipos de variación*

Una variable w varía directamente con el producto de u y v e inversamente con el cuadrado de s.

a) Si $w = 20$ cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, encuentra la constante de variación.

b) Halla el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$.

Solución Una fórmula general para w es

$$w = k\frac{uv}{s^2},$$

donde k es una constante de variación.

a) Al sustituir $w = 20$, $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$ se obtiene

$$20 = k\frac{3 \cdot 5}{2^2}, \qquad \text{o} \qquad k = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}.$$

b) En vista de que $k = \frac{16}{3}$, la fórmula específica para w es

$$w = \frac{16}{3}\frac{uv}{s^2}.$$

Por lo tanto, cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$,

$$w = \frac{16}{3}\frac{7 \cdot 4}{3^2} = \frac{448}{27} \approx 16.6.$$

En el próximo ejemplo seguimos otra vez las guías expresadas en esta sección.

EJEMPLO 4 *Determinación de la carga de soporte de una viga rectangular*

El peso que puede soportar con seguridad una viga de sección rectangular varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad de sección, e inversamente con la longitud de la viga. Si una viga de 2×4 in que mide 8 ft de largo soporta con seguridad una carga de 500 lb, ¿qué peso puede resistir con seguridad una viga de 2×8 in y 10 ft de largo? (Supón que el ancho es la dimensión *más corta* de la sección transversal.)

Solución **Guía 1** Si w, d, l y W denotan ancho, profundidad, longitud y peso, respectivamente, entonces una fórmula general para hallar W es

$$W = k\frac{wd^2}{l},$$

donde k es una constante de variación.

Guía 2 Para hallar el valor de k de la guía (1), con base en los datos vemos que

$$500 = k\frac{2(4^2)}{8}, \qquad \text{o} \qquad k = 125.$$

www.elsolucionario.net

Guía 3 Sustituimos $k = 125$ en la fórmula de la guía (1) y llegamos a la fórmula específica

$$w = 125\,\frac{wd^2}{l}.$$

Guía 4 Reemplazamos $w = 2$, $d = 8$ y $l = 10$ en la fórmula de la guía (3) y obtenemos

$$W = 125 \cdot \frac{2 \cdot 8^2}{10} = 1600 \text{ lb}.$$

3.9 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 12: expresa el enunciado como fórmula donde intervengan las variables dadas y una constante de proporcionalidad k, y luego encuentra el valor de k a partir de las condiciones dadas.

1. u es directamente proporcional a v. Si $v = 30$, entonces $u = 12$.
2. s varía directamente con t. Si $t = 10$, entonces $s = 18$.
3. r varía directamente con s e inversamente con t. Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.
4. w varía directamente con z e inversamente con la raíz cuadrada de u. Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.
5. y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.
6. q es inversamente proporcional a la suma de x y y. Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.
7. z es directamente proporcional al producto del cuadrado de x y el cubo de y. Si $x = 7$ y $y = -2$, entonces $z = 16$.
8. r es directamente proporcional al producto de s y v e inversamente proporcional al cubo de p. Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.
9. y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Si $x = 4$ y $z = 3$, entonces $y = 16$.
10. y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la suma de r y s. Si $x = 3$, $r = 5$ y $s = 7$, entonces $y = 2$.
11. y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 9$ y $z = 2$, entonces $y = 5$.
12. y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z. Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.
13. **Presión en líquidos** La presión P que actúa en un punto en un líquido es directamente proporcional a la distancia d desde la superficie del líquido al punto.
    a) Expresa P como función de d por medio de una fórmula con una constante de proporcionalidad k.
    b) En cierto tanque de petróleo, la presión a una profundidad de 2 ft es de 118 lb/ft^3. Encuentra el valor de k de la parte a).
    c) Halla la presión a una profundidad de 5 pies para el tanque de petróleo de la parte b).
14. **Ley de Hooke** La ley de Hooke señala que la fuerza F requerida para alargar un resorte x unidades, más allá de su longitud natural, es directamente proporcional a x.
    a) Encuentra F como función de x por medio de una fórmula con una constante de proporcionalidad k.
    b) Un peso de 4 lb alarga cierto resorte desde su longitud natural de 10 in a una longitud de 10.3 in. Encuentra el valor de k de la parte b).
    c) ¿Qué peso alargará el resorte de la parte b) hasta 11.5 in?
15. **Resistencia eléctrica** La resistencia eléctrica R de un alambre varía directamente con su longitud l e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.
    a) Expresa R en términos de l, d y una constante de variación k.
    b) Un alambre de 100 ft de largo y 0.01 in de diámetro tiene una resistencia de 25 Ω. Encuentra el valor de k de la parte a).
    c) Escribe la resistencia de un alambre hecho del mismo material con un diámetro de 0.015 in y 50 ft de largo.
16. **Intensidad de iluminación** La intensidad de iluminación I desde una fuente de luz varía en sentido inverso al cuadrado de la distancia d desde la fuente.
    a) Expresa I en términos de d y una constante de variación k.
    b) Un reflector tiene una intensidad de 1 000 000 de bujías a 50 ft. Da el valor de k de la parte a).

www.elsolucionario.net

c) Calcula la intensidad del faro de b) a 1 mi de distancia.

17. **Periodo de un péndulo** El periodo P de un péndulo sencillo; es decir, el tiempo requerido para una oscilación completa, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l.

a) Expresa P en términos de l y una constante de proporcionalidad k.

b) Si un péndulo de 2 ft de largo tiene un periodo de 1.5 s, encuentra el valor de k de la parte a).

c) Proporciona el periodo de un péndulo de 6 ft de largo.

18. **Dimensiones de una extremidad humana** En fisiología, a veces se utiliza un cilindro circular como representación sencilla de una extremidad humana.

a) Expresa el volumen V de un cilindro en términos de su longitud L y el cuadrado de su circunferencia C.

b) La fórmula obtenida en la parte a) sirve para calcular el volumen de un miembro a partir de medidas de longitud y de circunferencia. Supón que la circunferencia (promedio) de un brazo humano es 22 cm y la longitud promedio es 27 cm. Calcula el volumen del brazo al centímetro cúbico más cercano.

19. **Periodo de un planeta** La tercera ley de Kepler expresa que el periodo T (tiempo necesario para completar una revolución alrededor del Sol) de un planeta es directamente proporcional a la potencia 3/2 de su distancia promedio d desde el Sol.

a) Expresa T como función de d por medio de una fórmula donde intervenga una constante de proporcionalidad k.

b) Para la Tierra, $T = 365$ días y $d = 93$ millones de millas. Halla el valor de la parte a).

c) Calcula el periodo de Venus si su distancia promedio del Sol es de 67 millones de millas.

20. **Alcance de un proyectil** Por física sabemos que el alcance R de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad v.

a) Expresa R como función de v por medio de una fórmula con una constante de proporcionalidad k.

b) Un motociclista acróbata ha hecho un salto de 150 ft. Si la velocidad al salir de la rampa era de 70 mph, encuentra el valor de k de la parte a).

c) Si el motociclista puede alcanzar 80 mph al salir de la rampa y mantener el equilibro apropiado, calcula la posible longitud del salto.

21. **Marcas de derrape de un automóvil** La velocidad V a que se desplazaba un automóvil antes de aplicar los frenos se puede calcular a partir de la longitud L de las marcas de derrape. Supón que V es directamente proporcional a la raíz cuadrada de L.

a) Expresa V como función de L por medio de una fórmula donde haya una constante de proporcionalidad k.

b) Para cierto automóvil que se mueve en una superficie seca, $L = 50$ ft cuando $V = 35$ mph. Encuentra el valor de k de la parte a).

c) Calcula la velocidad inicial del automóvil de la parte b) si las marcas de derrape miden 150 ft de largo.

22. **Ley de Coulomb** La ley de Coulomb en teoría eléctrica expresa que la fuerza F de atracción entre dos partículas con cargas opuestas varía directamente con el producto de las magnitudes Q_1 y Q_2 de las cargas, e inversamente con el cuadrado de la distancia d entre las partículas.

a) Encuentra una fórmula para hallar F en términos de Q_1, Q_2, d y una constante de variación k.

b) ¿Cuál es el efecto de reducir la distancia entre las partículas por un factor de $\frac{1}{4}$?

23. **Peso de umbral** El peso de umbral W se define como el peso que al ser excedido incrementa en forma importante el riesgo de muerte. Para hombres de edad mediana, W es directamente proporcional a la tercera potencia de la estatura h.

a) Expresa W como función de h por medio de una fórmula donde haya una constante de proporcionalidad k.

b) Para un hombre de 6 ft de estatura, W es alrededor de 200 lb. Encuentra el valor de k de la parte a).

c) Calcula, a la libra más cercana, el peso de umbral para un individuo de 5 ft, 6 in de estatura.

24. **Ley del gas ideal** La ley del gas ideal señala que el volumen V que ocupa un gas es directamente proporcional al producto del número n de moles de gas y la temperatura T (en K), e inversamente proporcional a la presión P (en atmósferas).

a) Expresa V en términos de n, T, P y una constante de proporcionalidad k.

b) ¿Cuál es el efecto del volumen si la cantidad de moles se duplica y tanto la temperatura y presión se reducen a la mitad?

25. **Ley de Poiseuille** La ley de Poiseuille indica que la rapidez de la circulación sanguínea F (en l/min), que hay en una arteria principal, es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r y la presión sanguínea P.

a) Encuentra F en términos de P, r y una constante de proporcionalidad k.

www.elsolucionario.net

b) Durante el ejercicio fuerte, la rapidez normal de la circulación sanguínea a veces se triplica. Si el radio de una arteria importante aumenta un 10%, ¿cuánto más rápido debe bombear el corazón?

26. Población de truchas Supongamos que se atrapan 200 especímenes, se marcan y se sueltan entre la población de peces de un lago. Por T denota la cantidad de peces marcados que son recapturados cuando se pesca una muestra de n truchas tiempo después. La validez del método de marca y recaptura, para calcular la población total de truchas del lago, se basa en la suposición de que T es directamente proporcional a n. Si se recuperan 10 ejemplares marcados de una muestra de 300, calcula la población total de truchas del lago.

27. Desintegración radiactiva del gas radón Cuando el uranio se desintegra y se convierte en plomo, un paso en el proceso es la desintegración radiactiva del radio en gas radón. El radón entra por el suelo en los sótanos de las casas, donde se presenta un riesgo de salud si es inhalado. En el caso más sencillo de detección de radón, se toma una muestra de aire de volumen V. Una vez establecido el equilibrio, la desintegración radiactiva D del gas radón se cuenta con eficiencia E durante el tiempo t. La concentración C de radón presente en la muestra de aire varía directamente con el producto D y E, e inversamente con el producto de V y t. Para una concentración C fija de radón y un tiempo t, encuentra el cambio en la cuenta D de desintegración radiactiva si V se duplica y E se reduce en 20 por ciento.

28. Concentración de radón Consulta el ejercicio 27. Halla el cambio en la concentración C de radón si D aumenta en 30%, t se incrementa en 60%, V disminuye en 10% y E permanece constante.

29. Densidad en un punto Una placa plana y delgada se sitúa en un plano xy tal que la densidad d (en lb/ft^2) en el punto $P(x, y)$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen. ¿Cuál es el efecto en la densidad en P si las coordenadas x y y se multiplican cada una por 1/3?

30. Temperatura en un punto Una placa metálica plana se sitúa en un plano xy tal que la temperatura T (en °C) en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia desde el origen. Si la temperatura en el punto $P(3, 4)$ es 20 °C, encuentra la temperatura en $Q(24, 7)$.

Ejercicios 31 al 34: examina la expresión para el conjunto dado de puntos de datos de la forma (x, y). Encuentra la constante de variación y una fórmula que describa cómo varía y con respecto a x.

31. y/x; {(0.6, 0.72), (1.2, 1.44), (4.2, 5.04), (7.1, 8.52), (9.3, 11.6)}

32. xy; {(0.2, −26.5), (0.4, −13.25), (0.8, −6.625), (1.6, −3.3125), (3.2, −1.65625)}

33. x^2y; {(0.16, −394.53125), (0.8, −15.78125), (1.6, −3.9453125), (3.2, −0.986328125)}

34. y/x^3; {(0.11, 0.00355377), (0.56, 0.46889472), (1.2, 4.61376), (2.4, 36.91008)}

C **35. Distancias de parada** Consulta el ejercicio 74 de la sección 3.4. La distancia D (en ft) requerida para que un auto frene y se detenga con seguridad varía directamente con su velocidad S (en mph).

a) Utiliza la tabla para hallar un valor aproximado para k en la fórmula de variación $D = kS^{2.3}$.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

b) Comprueba tu cálculo graficando los datos y D en los mismos ejes coordenados.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Describe el conjunto de todos los puntos (x, y) de un plano coordenado tal que $y/x < 0$.

2. Demuestra que el triángulo con vértices $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$ es un triángulo rectángulo y encuentra su área.

3. Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, halla

a) La distancia $d(P, Q)$

b) El punto medio del segmento PQ

c) Un punto R tal que Q sea el punto medio de PR

4. Encuentra todos los puntos del eje y localizados a una distancia 13 de $P(12, 6)$.

5. ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 1)$ y $Q(-2, a)$ es menor de 3?

6. Encuentra una ecuación del círculo que tenga centro $C(7, -4)$ y pasa por $P(-3, 3)$.

7. Formula una ecuación del círculo que tenga puntos extremos de un diámetro $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

www.elsolucionario.net

8. Halla una ecuación para la mitad izquierda del círculo dado por $(x + 2)^2 + y^2 = 9$.

9. Determina la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-8, 6)$.

10. Demuestra que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son vértices de un trapecio.

11. Encuentra una ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ que es

    a) Paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

    b) Perpendicular a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

12. Expresa $8x + 3 + 3y - 24 = 0$ en forma de punto-pendiente.

13. Formula una ecuación del círculo que tenga centro $C(-5, -1)$ y sea tangente a la recta $x = 4$.

14. Encuentra una ecuación de la recta que tiene intersección x de -3 y pase por el centro del círculo con $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.

15. Halla la forma general de una ecuación de la recta que pasa por $P(4, -3)$ con pendiente 5.

16. Dados $A(-1, 2)$ y $B(3, -4)$, encuentra una forma general de una ecuación para la mediatriz del segmento AB.

Ejercicios 17 y 19: encuentra el centro y radio del círculo con la ecuación dada.

17. $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$

18. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 16y + 39 = 0$

19. Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+3}}$, halla

    a) $f(1)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(0)$ **d)** $f(-x)$

    e) $-f(x)$ **f)** $f(x^2)$ **g)** $[f(x)]^2$

Ejercicios 20 y 21: determina *el signo* de $f(4)$ sin hallar en realidad $f(4)$.

20. $f(x) = \dfrac{-32(x^2 - 4)}{(9 - x^2)^{5/3}}$

21. $f(x) = \dfrac{-2(x^2 - 20)(5 - x)}{(6 - x^2)^{4/3}}$

22. Encuentra el dominio y rango de f si

    a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

Ejercicios 23 y 24: halla $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si $h \neq 0$.

23. $f(x) = -x^2 + x + 5$ 24. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

25. Expresa una función f tal que $f(1) = 2$ y $f(3) = 7$.

26. Determina si f es par, non o ninguna de las dos.

    a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

    c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$

Ejercicios 27 al 40: traza la gráfica de la ecuación y nombra (o etiqueta) las intersecciones x y y.

27. $x + 5 = 0$ 28. $2y - 7 = 0$

29. $2y + 5x - 8 = 0$ 30. $x = 3y + 4$

31. $9y + 2x^2 = 0$ 32. $3x - 7y^2 = 0$

33. $y = \sqrt{1 - x}$ 34. $y = (x - 1)^3$

35. $y^2 = 16 - x^2$

36. $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$

37. $x^2 + y^2 - 8x = 0$ 38. $x = -\sqrt{9 - y^2}$

39. $y = (x - 3)^2 - 2$ 40. $y = -x^2 - 2x + 3$

Ejercicios 41 al 50: a) traza la gráfica de f; b) encuentra el dominio D y el rango R de f, y c) halla los intervalos en que f es creciente, decreciente o constante.

41. $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2}$ 42. $f(x) = 1000$

43. $f(x) = |x + 3|$ 44. $f(x) = -\sqrt{10 - x^2}$

45. $f(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$ 46. $f(x) = \sqrt{2 - x}$

47. $f(x) = 9 - x^2$ 48. $f(x) = x^2 + 6x + 16$

49. $f(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ 50. $f(x) = 1 + 2\,[[x]]$

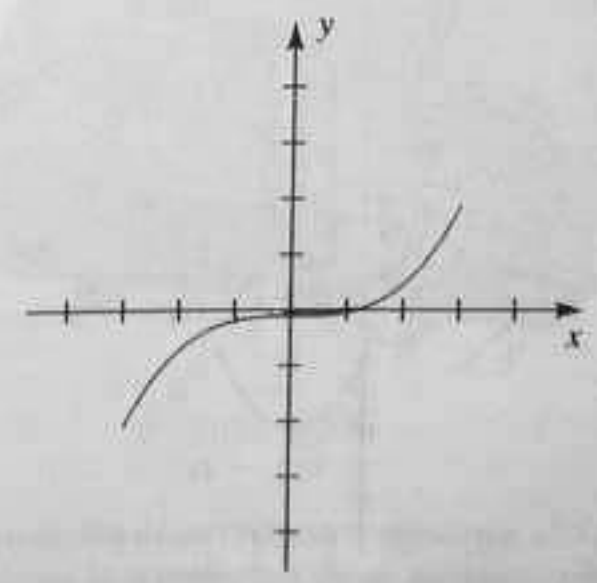
51. Traza las gráficas de las siguientes ecuaciones, usando desplazamiento, alargamiento o reflexión:

    a) $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = \sqrt{x + 4}$ **c)** $y = \sqrt{x} + 4$

    d) $y = 4\sqrt{x}$ **e)** $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ **f)** $y = -\sqrt{x}$

52. En la figura se muestra la gráfica de la función f con dominio $[-3, 3]$. Traza la gráfica de la ecuación dada.

    a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = f(x) - 2$



EJERCICIO 52

www.elsolucionario.net

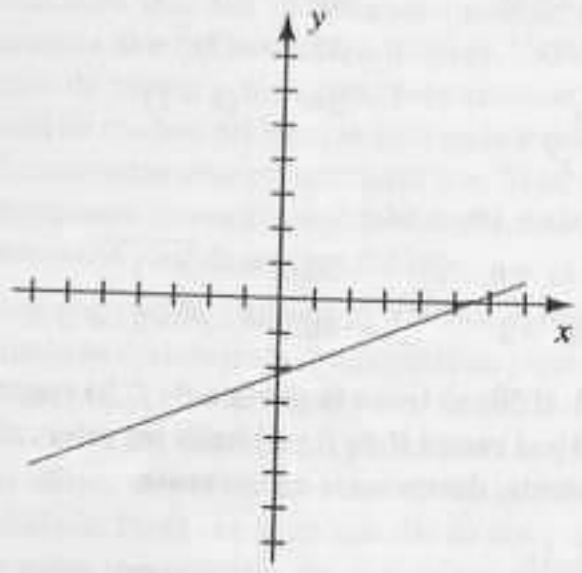
c) $y = f(-x)$ d) $y = f(2x)$

e) $y = f(\frac{1}{2}x)$ f) $y = f^{-1}(x)$

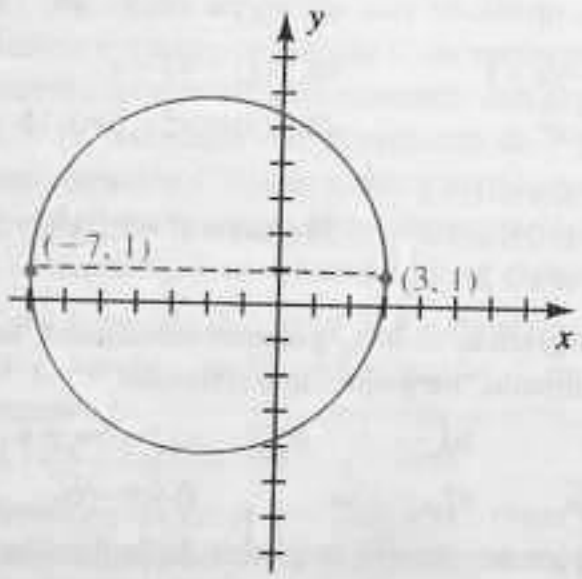
g) $y = |f(x)|$ h) $y = f(|x|)$

Ejercicios 53 al 56: formula una ecuación para la gráfica de la figura.

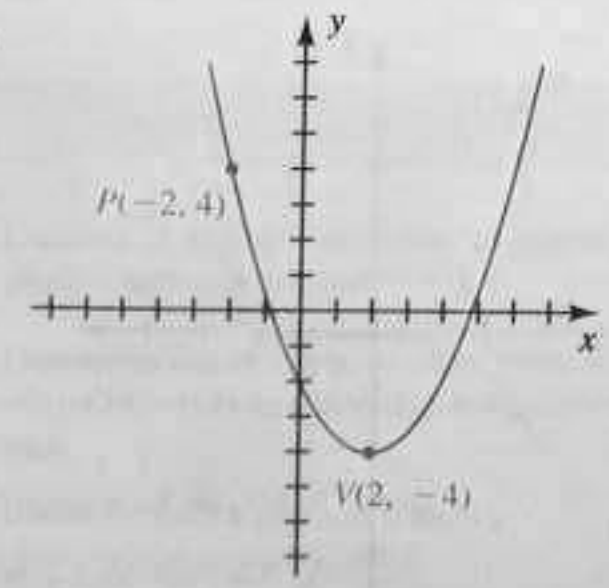
53.



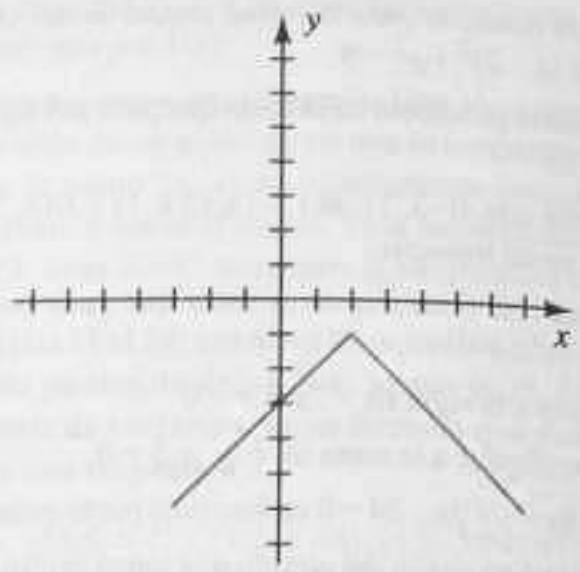
54.



55.



56.



Ejercicios 57 al 60: encuentra el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

57. $f(x) = 5x^2 + 30x + 49$

58. $f(x) = -3x^2 + 30x - 82$

59. $f(x) = -12(x + 1)^2 - 37$

60. $f(x) = 3(x + 2)(x - 10)$

61. Expresa la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

62. Halla la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que tenga vértice $V(3, -2)$ y pase por $(5, 4)$.

63. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentra el dominio de

a) fg b) f/g

64. Si $f(x) = 8x - 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, halla

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(2)$

Ejercicios 65 y 66: encuentra a) $(f \circ g)(x)$ y b) $(g \circ f)(x)$.

65. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ $g(x) = 3x + 2$

66. $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, $g(x) = 1/x^2$

Ejercicios 67 y 68: determina a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$ y b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

67. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

68. $f(x) = \dfrac{x}{3x + 2}$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$

69. Encuentra una forma de función composición para $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$.

70. ¿$f(x) = 2x^3 - 5$ es una función biunívoca?

Ejercicios 71 y 72: a) halla $f^{-1}(x)$ y b) traza las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.

71. $f(x) = 10 - 15x$ 72. $f(x) = 9 - 2x^2, x \le 0$

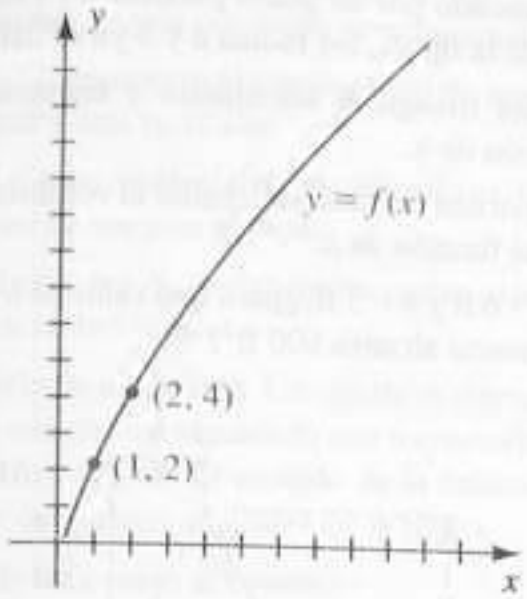
73. Consulta la figura para hallar:

a) $f(1)$ b) $(f \circ f)(1)$ c) $f^{-1}(4)$

www.elsolucionario.net

d) y toda x tal que $f(x) = 4$

e) y toda x tal que $f(x) > 4$



EJERCICIO 73

74. Supongamos que f y g son funciones biunívocas tales que $f(2) = 7$, $f(4) = 2$ y $g(2) = 5$. Encuentra el valor, si es posible.

a) $(g \circ f^{-1})(7)$ **b)** $(f \circ g^{-1})(5)$

c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$ **d)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$

75. Supongamos que y es directamente proporcional a la raíz cúbica de x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Halla la constante de proporcionalidad si $y = 6$ cuando $x = 8$ y $z = 3$.

76. **Rampas para sillas de ruedas** La ley para norteamericanos discapacitados, de 1990, garantiza a todas las personas el derecho al acceso a lugares públicos. El acceso a un edificio a menudo representa la construcción de una rampa para sillas de ruedas. Las rampas tienen alrededor de 1 in de ascenso vertical por cada 12 o 20 in de distancia horizontal. Si la base de una puerta exterior está 3 ft sobre la banqueta, encuentra el rango de longitudes apropiadas de una rampa para sillas de ruedas.

77. **Lanzamiento de disco** Con base en las marcas olímpicas, la distancia ganadora en el lanzamiento de disco se puede calcular mediante la ecuación $d = 175 + 1.75t$, donde d está en ft y $t = 0$ corresponde a 1948.

a) Pronostica la distancia ganadora para los Juegos Olímpicos del verano 2000.

b) Calcula el año en que la distancia ganadora será de 280 ft.

78. **Avalúos de casas** Hace seis años se compró una casa en \$89 000; este año fue valuada en \$125 000. Supongamos que el valor V de la casa después de la compra es una función lineal del tiempo t (en años).

a) Expresa V en términos de t.

b) ¿Cuántos años después de la fecha de compra la casa valía \$103 000?

79. **Escalas de temperatura** El punto de congelación del agua es 0 °C, o 32 °F, y el de ebullición es 100 °C, o 212 °F.

a) Expresa la temperatura F Fahrenheit como función lineal de la temperatura C Celsius.

b) ¿Qué aumento de temperatura en °F corresponde a un incremento de 1 °C?

80. **Rendimiento de gasolina** Consideremos que el costo de conducir un automóvil es una función lineal del número x de millas recorridas, y que la gasolina cuesta \$1.25 por galón. Cierto automóvil recorre 20 mpg y una afinación del motor que mejorará su rendimiento en 10% cuesta \$50.

a) Halla el costo C_1 de usar el automóvil sin afinación en términos de x.

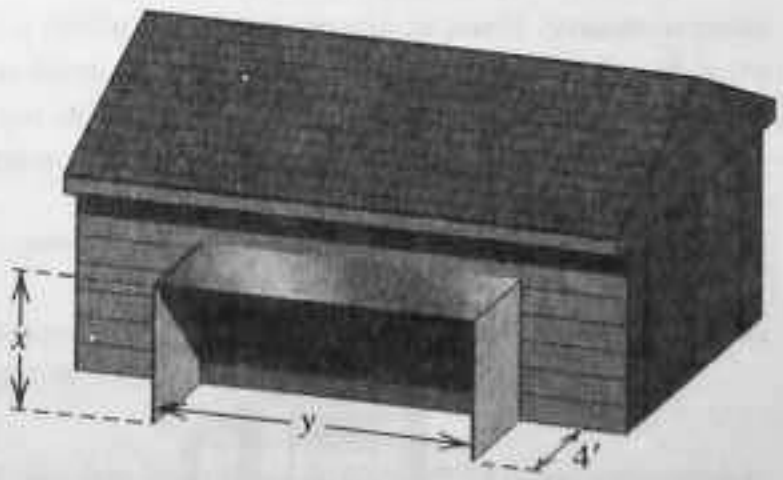
b) Expresa el costo C_2 de usar el auto afinado en términos de x.

c) ¿Cuántas millas debe recorrer el automóvil después de una afinación para recuperar el costo de la misma?

81. **Construcción de un cobertizo** Un cobertizo rectangular abierto, hecho de dos lados verticales de 4 ft de ancho y un techo plano, ha de construirse junto a una estructura ya existente, como se ilustra en la figura. El techo plano está hecho de hojalata y cuesta \$5 por ft^2, y los dos lados son de madera contrachapada que cuesta \$2 por ft^2.

a) Si se dispone de \$400 para la construcción, expresa la longitud y como función de la altura x.

b) Encuentra el volumen V dentro del cobertizo como función de x.



EJERCICIO 81

82. **Construcción de un recipiente cilíndrico** Una compañía planea la manufactura de un recipiente cilíndrico, abierto en la parte superior, con capacidad de 24π in^3.

www.elsolucionario.net

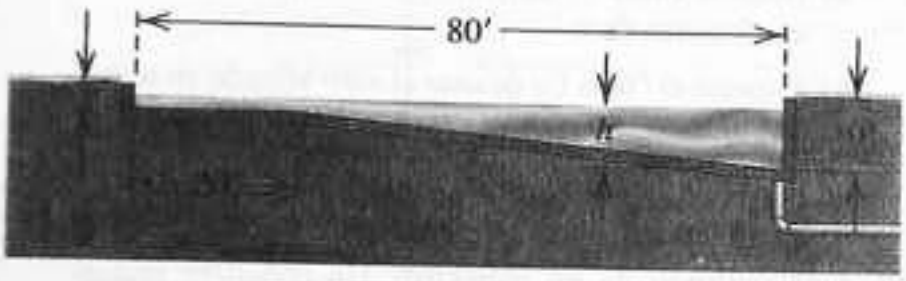
Si el costo del material para el fondo es \$0.30 por in^2 y el de los lados curvos es \$0.10 por in^2, expresa el costo C del material como función del radio r de la base del recipiente.

83. Llenado de una piscina En la figura que sigue se ve la sección transversal de una piscina rectangular de 80 por 40 ft. La piscina se llena con agua a razón de 10 ft^3/min.

a) Halla el volumen V del agua de la piscina como función del tiempo t.

b) Expresa V como función de la profundidad h del extremo profundo para $0 \le h \le 6$ y luego para $6 < h \le 9$.

c) Expresa h como función de t para $0 \le h \le 6$ y luego para $6 < h \le 9$.

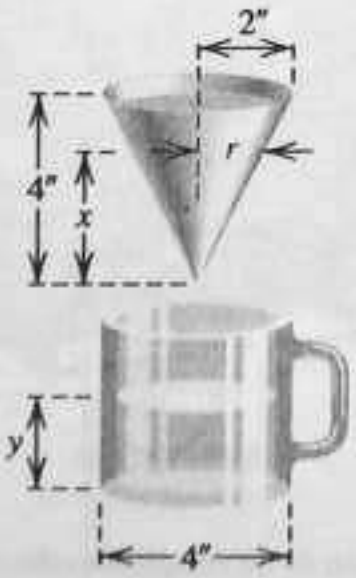


EJERCICIO 83

84. Filtrado de agua Se vierten 5 in^3 de agua en un filtro cónico que luego caen en una taza (ve la figura), x denota la altura del agua en el filtro y y, la altura del agua en la taza.

a) Halla el radio r mostrado en la figura como función de x. (*Sugerencia:* utiliza triángulos semejantes.)

b) Expresa la altura y del agua de la taza como función de x. (*Sugerencia:* ¿cuál es la suma de los dos volúmenes mostrados en la figura?)



EJERCICIO 84

85. Tronco de un cono La forma de la primera nave espacial del programa Apolo tenía la forma del tronco de un cono circular recto; esto es, un sólido formado por un cono truncado por un plano paralelo a su base. Para el tronco de la figura, los radios a y b ya se definieron.

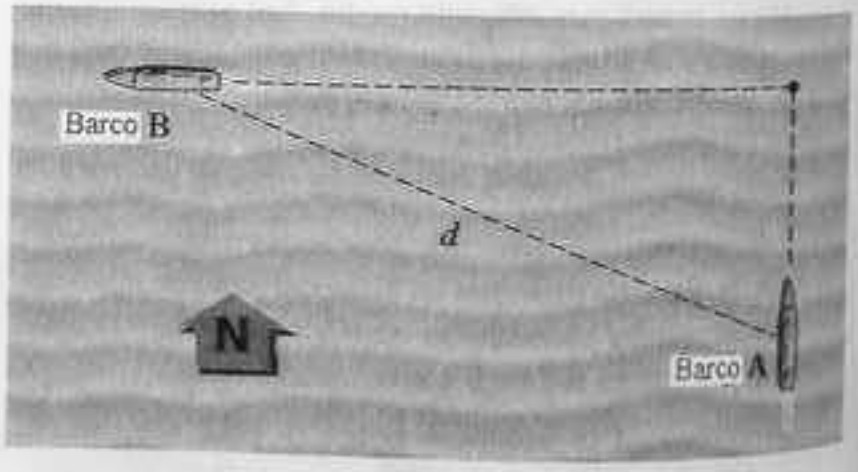
a) Utiliza triángulos semejantes y encuentra y como función de h.

b) Deriva una fórmula para hallar el volumen del tronco como función de h.

c) Si $h = 6$ ft y $b = 3$ ft, ¿para qué valor de h el volumen del tronco alcanza 600 ft^3?

EJERCICIO 85

86. Distancia entre barcos A la 1:00 p.m. el barco A está a 30 mi al sur del barco B y navega hacia el norte a razón de 15 mph. Si el barco B se dirige al oeste a una velocidad de 10 mph, encuentra la hora en que la distancia d entre ambos es mínima (ve la figura).



EJERCICIO 86

87. Dimensiones de una pista de carreras El interior de una pista de carreras de media milla consta de un rectángulo con semicírculos en dos extremos opuestos. Encuentra las dimensiones que harán máxima el área del rectángulo.

www.elsolucionario.net

88. Saltos verticales Cuando un jugador de baloncesto salta para encestar, la altura del jugador $f(t)$ (en ft) desde el piso después de t s está dada por la fórmula $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$, donde g es una constante gravitacional.

a) Si $g = 32$, encuentra el número total de segundos que el jugador está en el aire.

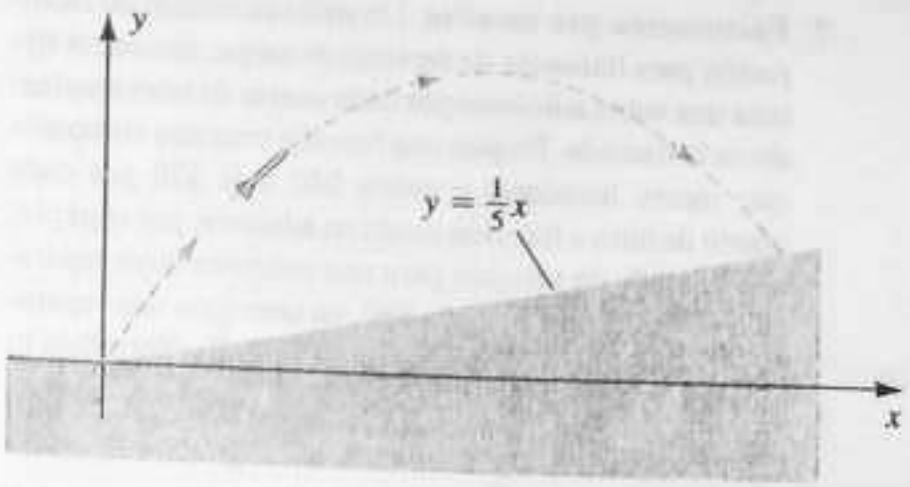
b) Halla el salto vertical del jugador; esto es, la distancia máxima de sus pies al piso.

c) En la Luna, $g = \frac{32}{6}$. Retrabaja las partes a) y b) para el jugador en la Luna.

89. Trayectoria de un cohete Un cohete es disparado hacia lo alto de una colina, siguiendo una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$. El costado de la colina tiene una pendiente de $\frac{1}{5}$, como se ilustra en la figura.

a) ¿Dónde toca suelo el cohete?

b) Encuentra la altura máxima del cohete *por encima del suelo*.



EJERCICIO 89

90. Llamadas telefónicas En cierto estado, el número promedio de llamadas telefónicas por día entre dos ciudades cualesquiera es directamente proporcional al producto de sus poblaciones, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Las ciudades A y B están a 25 mi una de otra y tienen poblaciones de 10 000 y 5000, respectivamente. Los registros telefónicos indican un promedio de 2000 llamadas por día entre las dos ciudades. Calcula el número promedio de llamadas por día entre la ciudad A y otra ciudad de 15 000 habitantes que está a 100 mi de A.

91. Potencia de un rotor de viento La potencia P generada por un rotor de viento es directamente proporcional al producto del cuadrado del área A recorrida por las aspas y el cubo de la velocidad v del viento. Supón que el diámetro del área circular recorrida por las aspas es 10 ft, y $P = 3000$ W cuando $v = 20$ mph. Encuentra la potencia generada cuando la velocidad del viento es 30 mph.

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 3

1. Compara las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$ en el intervalo $0 \le x \le 2$. Escribe una generalización con base en lo que investigues sobre gráficas de ecuaciones de la forma $y = x^{p/q}$, donde $x \le 0$ y p y q son enteros positivos.

2. Formula una expresión para $g(x)$ si la gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ al reflejar f alrededor de

a) el eje x

b) el eje y

c) la recta $y = 2$

d) la recta $x = 3$

e) la recta $y = x$.

3. Considera la gráfica de $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde $f(x) = ax^2 + bx + c$. Analiza la forma general de g, incluyendo su dominio y rango. Estudia las ventajas y desventajas de graficar g como composición de las funciones $h(x) = \sqrt{x}$ y $f(x)$. (*Sugerencia*: usa las siguientes expresiones para f: $x^2 - 2x - 8$, $-x^2 + 2x + 8$, $x^2 - 2x + 2$, $-x^2 + 2x - 2$.)

4. Simplifica el cociente de diferencia en los ejercicios 9 y 10 de la sección 3.4 para una función cuadrática arbitraria de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5. La fórmula del punto medio se puede considerar como la fórmula del "medio camino", porque indica el punto que está a la mitad de la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$. Desarrolla una fórmula de "*m-n-ésimo* camino" que dé el punto $R(x_3, y_3)$ que está a $\frac{m}{n}$ de la distancia de P a Q (supón que m y n son enteros positivos con $m < n$).

6. Considera las gráficas de ecuaciones de la forma cuadrática $y = ax^2 + b + c$ que tienen dos intersecciones x. Denota con d la distancia del eje de la parábola a cualquiera de las intersecciones x y con h el valor de la coordenada y al vértice. Explora la relación entre d y h en varias ecuaciones específicas y luego desarrolla una fórmula para esta relación.

www.elsolucionario.net

7. **Facturación por servicio** Un método común de facturación para llamadas de servicio es cargar una cuota fija más una cuota adicional por cada cuarto de hora empleado en la llamada. Propón una función para una compañía que repara lavadoras y cobra \$40 más \$20 por cada cuarto de hora o fracción de ahí en adelante; por ejemplo, una llamada de servicio para una máquina cuya reparación tarda 30 min costaría \$80, en tanto que una reparación que requiera 31 min costaría \$100. La entrada a tu función es cualquier entero positivo. [*Sugerencia:* consulta el Ejer. 40e), Sec. 3.5].

C 8. **Densidad de la capa de ozono** La densidad D (en 10^{-3} cm/km) de la capa de ozono a altitudes x entre 3 y 15 km durante el invierno en Edmonton, Canadá, se determinó a nivel experimental en

$$D = 0.0833x^2 - 0.4996x + 3.5491.$$

Expresa x como función de D.

C 9. **Precipitación en Minneapolis** En la tabla siguiente se lista la precipitación mensual promedio en pulgadas en Minneapolis.

Mes	Precipitación
Ene.	0.7
Feb.	0.8
Mar.	1.5
Abr.	1.9
May.	3.2
Jun.	4.0
Jul.	3.3
Ago.	3.2
Sept.	2.4
Oct.	1.6
Nov.	1.4
Dic.	0.9

a) Grafica la precipitación mensual promedio.

b) Elabora un modelo matemático de estos datos con una función por partes f que sea primero cuadrática y luego lineal.

c) Grafica f junto con los datos.

C 10. Tu calculadora graficadora necesita una función graficadora de funciones inversas para la parte a) de este ejercicio.

a) Grafica $f(x) = 0.0346x^3 - 0.0731x^2 - 0.7154x + 3.4462$ y $y = f^{-1}(x)$ en $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$.

b) Analiza qué sucede a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ (en general) conforme la gráfica de $y = f(x)$ crece o decrece.

c) ¿Qué puedes concluir sobre los puntos de intersección de gráficas de una función y su inversa?

www.elsolucionario.net

Funciones polinomiales, funciones racionales y secciones cónicas

4

4.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2

4.2 Propiedades de la división

4.3 Ceros de polinomios

4.4 Ceros complejos y racionales de polinomios

4.5 Funciones racionales

4.6 Parábolas

4.7 Elipses

4.8 Hipérbolas

www.elsolucionario.net

Las funciones polinomiales son las más básicas en matemáticas porque se definen sólo en términos de suma, resta y multiplicación. En la práctica, a menudo es necesario dibujar sus gráficas y encontrar (o calcular) sus ceros. En la primera parte de este capítulo estudiaremos resultados que sirven para obtener esta información y luego dirigiremos nuestra atención a los cocientes de funciones polinomiales; esto es, funciones racionales.

En las últimas tres secciones consideraremos las secciones cónicas: parábolas, elipses e hipérbolas. Un dato notable en relación con las secciones cónicas es que aunque los antiguos griegos las estudiaron hace miles de años, distan mucho de ser obsoletas y son importantes para las actuales investigaciones en el espacio exterior y el estudio del comportamiento de las partículas atómicas.

4.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, entonces

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n \neq 0$. Los casos especiales detallados en la tabla se estudiaron en el capítulo 3.

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f
0	$f(x) = a_0$	Una recta horizontal con intersección en y de a_0
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Una recta de pendiente a_1 e intersección en y de a_0
2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Una parábola con un eje vertical

En esta sección estudiaremos gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2. Todas las funciones polinomiales son **funciones continuas**; es decir, sus gráficas se pueden dibujar sin cortes o interrupciones.

Si f tiene grado n *y todos los coeficientes excepto* a_n *son cero*, entonces

$$f(x) = ax^n \text{ para alguna } a = a_n \neq 0 .$$

En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una línea que pasa por el origen. Si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. En el ejemplo que sigue se dan dos ilustraciones con $n = 3$ (**polinomios cúbicos**).

EJEMPLO 1 *Trazo de gráficas de* $y = ax^3$

Traza la gráfica de f si

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

Solución **a)** En la lista que sigue aparecen varios puntos en la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

www.elsolucionario.net

Puesto que f es una función non, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen; por ello, los puntos como $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ también son de la gráfica (Fig. 1).

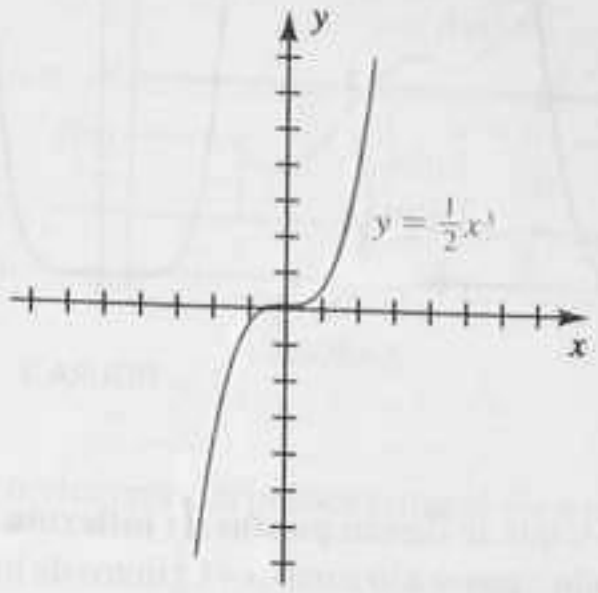


FIGURA 1

b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener de la de la parte **a)** multiplicando todas las coordenadas y por -1 [o sea, reflejando la gráfica de la parte **a)** en todo el eje x]; esto da el diagrama de la figura 2.

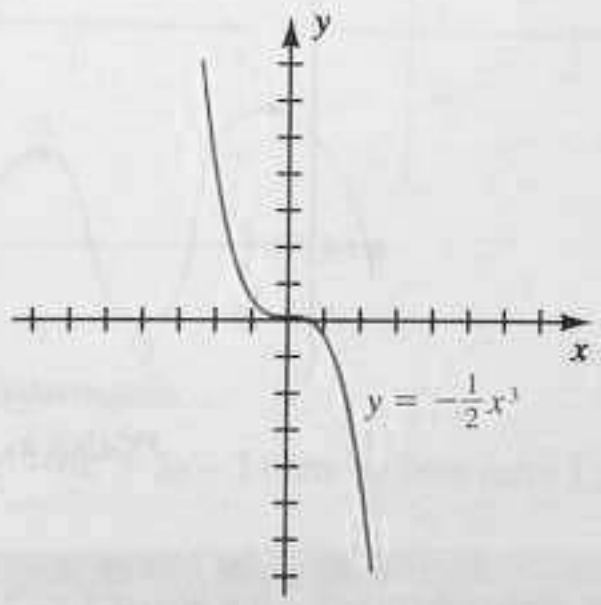


FIGURA 2

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *non*, entonces f es una función non y la gráfica de f es simétrica con respecto al origen (Figs. 1 y 2). Para $a > 0$, el aspecto de la gráfica es similar al de la figura 1; sin embargo, conforme n o a crecen, la gráfica se levanta con más rapidez para $x > 1$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica en todo el eje x (Fig. 2).

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *par*, entonces f es una función par y la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, según se ilustra en la figura 3 para el caso $a = 1$ y $n = 4$. Observa que a medida que el exponente aumenta, la gráfica se aplana en el origen. También sube con más rapidez para $x > 1$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica en todo el eje x.

Un análisis completo de las gráficas de las funciones polinomiales de grado mayor que 2 requiere métodos estudiados en cálculo. Conforme aumenta el grado, las gráficas suelen complicarse más; pero siempre tienen aspecto alisado con varios puntos altos y bajos —como P, Q, R y

www.elsolucionario.net

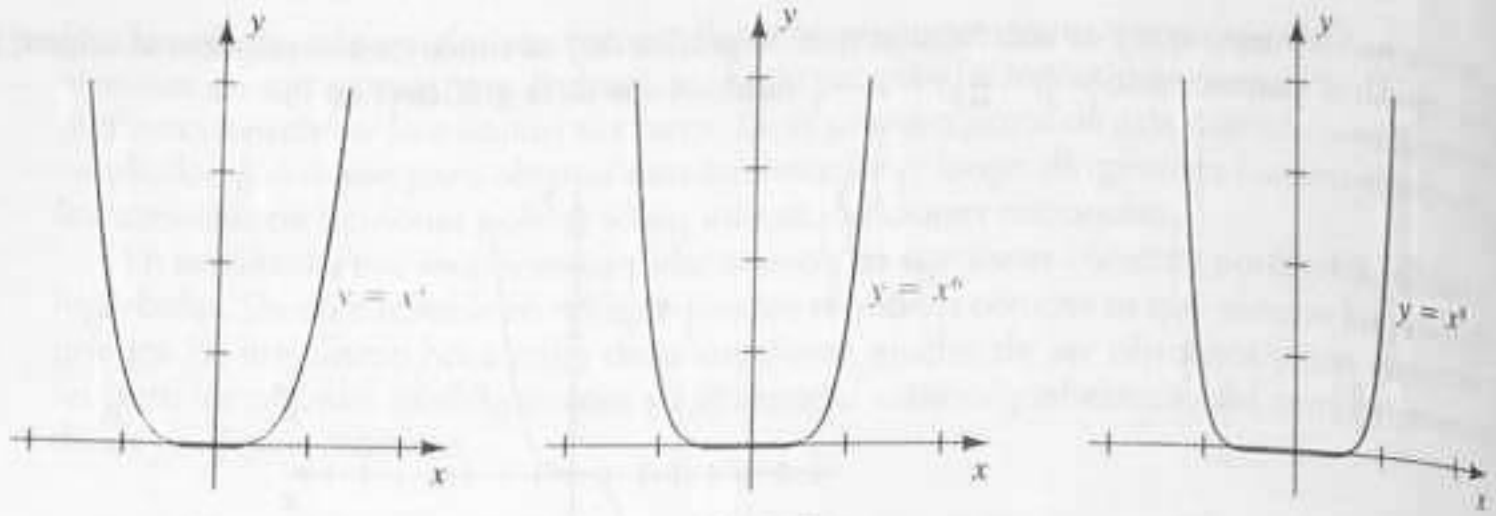


FIGURA 3

S en la figura 4—, que se llaman **puntos de inflexión** de la gráfica. Debes tener en mente que un polinomio de grado n posee a lo sumo $n-1$ puntos de inflexión. Cada valor de función (coordenada y) correspondiente a un punto alto o bajo se denomina **valor extremo** de la función f. En un valor extremo, f cambia de una función creciente a una decreciente o viceversa.

El teorema del valor intermedio especifica otra propiedad importante de las funciones polinomiales.

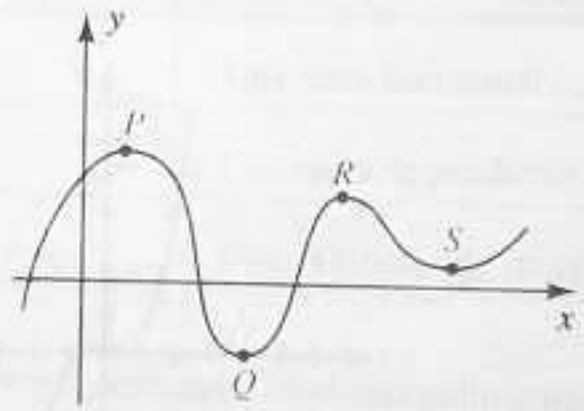


FIGURA 4

Teorema del valor intermedio para las funciones polinomiales

Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ *para* $a < b$, entonces f toma todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

El teorema del valor intermedio señala que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo menos hay un número c entre a y b tal que $f(c) = w$. Si consideramos la gráfica de f como extendida continuamente desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$, según se ve en la figura 5, entonces para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$, la recta horizontal $y = w$ corta la gráfica por lo menos en un punto P. La coordenada x igual a c de P es un número tal que $f(c) = w$.

Una consecuencia del teorema del valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios (uno positivo y uno negativo), al menos hay un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; esto es, *f tiene un cero en c*; por lo tanto, si el punto $(a, f(a))$ se encuentra abajo del eje x y el punto

www.elsolucionario.net

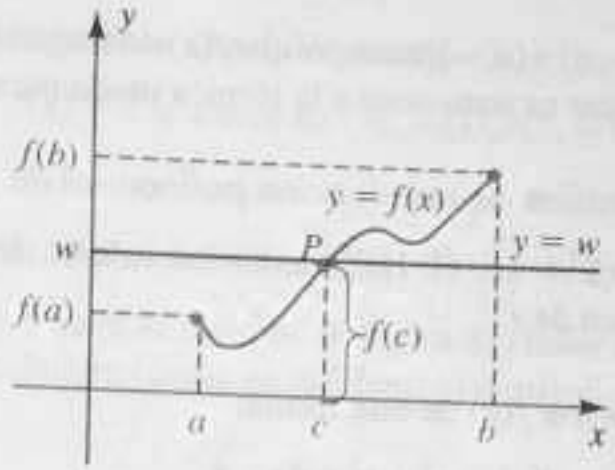


FIGURA 5

$(b, f(b))$ está arriba del eje x o viceversa, la gráfica cruza el eje x por lo menos una vez entre $x = a$ y $x = b$ (Fig. 6).

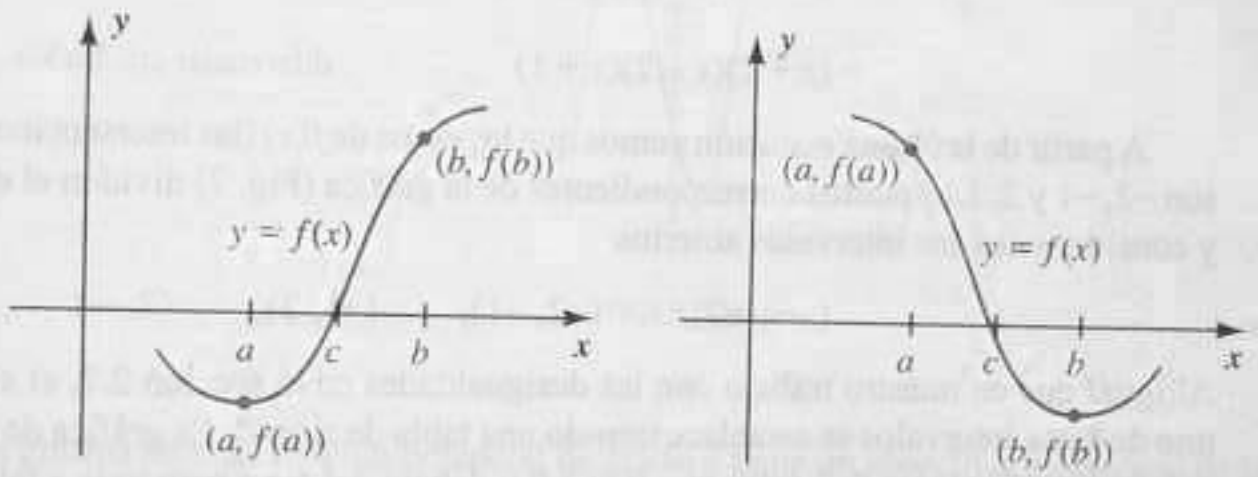


FIGURA 6

EJEMPLO 2 *Uso del teorema del valor intermedio*

Demuestra que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene un cero entre 1 y 2.

Solución Al sustituir x con 1 y 2 se obtienen estos valores de función:

$$f(x) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$

$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17$$

Dado que $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios ($f(1) = -4 < 0$ y $f(2) = 17 > 0$), vemos que $f(c) = 0$ para al menos un número real c entre 1 y 2.

El ejemplo 2 expone un método para localizar ceros reales de polinomios. Mediante *aproximaciones sucesivas* es factible calcular cada cero a cualquier grado de precisión al ubicarlo en intervalos más y más pequeños.

Si c y d son ceros reales *sucesivos* de $f(x)$ —o sea que no hay otros ceros entre c y d—, entonces $f(x)$ *no cambia de signo en el intervalo* (c, d); por lo tanto, si escogemos cualquier número k tal que $c < k < d$ y si $f(k)$ es positivo, entonces $f(x)$ es positivo en todo (c, d). Del mismo modo, si $f(k)$ es negativo, entonces $f(x)$ es negativo en todo (c, d). Ahora bien, $f(k)$ será el **valor de prueba** para $f(x)$ en el intervalo (c, d). Los valores de prueba también se pueden usar en intervalos infinitos

www.elsolucionario.net

de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞), siempre que $f(x)$ no tenga ceros en estos intervalos. El uso de valores de prueba al graficar es semejante a la técnica usada para desigualdades en la sección 2.7.

EJEMPLO 3 *Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 3*

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Halla todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, toda x tal que $f(x) < 0$ y traza la gráfica de x.

Solución Podemos factorizar $f(x)$ de esta forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{dado} \\ &= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) && \text{agrupar términos} \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) && \text{factorizar } x^2 \text{ y } -4 \\ &= (x^2 - 4)(x + 1) && \text{factorizar } (x + 1) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 1) && \text{diferenciar cuadrados} \end{aligned}$$

A partir de la última ecuación vemos que los ceros de $f(x)$ (las intersecciones en x de la gráfica) son -2, -1 y 2. Los puntos correspondientes de la gráfica (Fig. 7) dividen el eje x en cuatro partes y consideramos los intervalos abiertos

$$(-\infty, -2), \qquad (-2, -1), \qquad (-1, 2), \qquad (2, \infty).$$

Al igual que en nuestro trabajo con las desigualdades en la sección 2.7, el signo de $f(x)$ en cada uno de estos intervalos se establece usando una tabla de signos. La gráfica de f se encuentra arriba del eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$ y debajo del eje x para toda x tal que $f(x) < 0$.

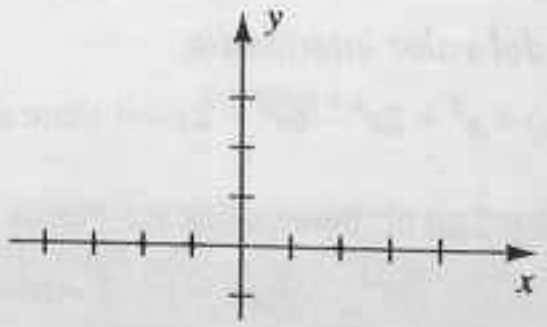


FIGURA 7

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Posición de gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

www.elsolucionario.net

Con base en el signo de $f(x)$ de la tabla, concluimos que

$$f(x) > 0 \text{ si } x \text{ está en } (-2, -1) \cup (2, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \text{ si } x \text{ está en } (-\infty, -2) \cup (-1, 2).$$

Usar esta información nos lleva al trazo de la figura 8. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica entraña el uso de calculadora (como en el Ejem. 5) o métodos que se estudian en cálculo.

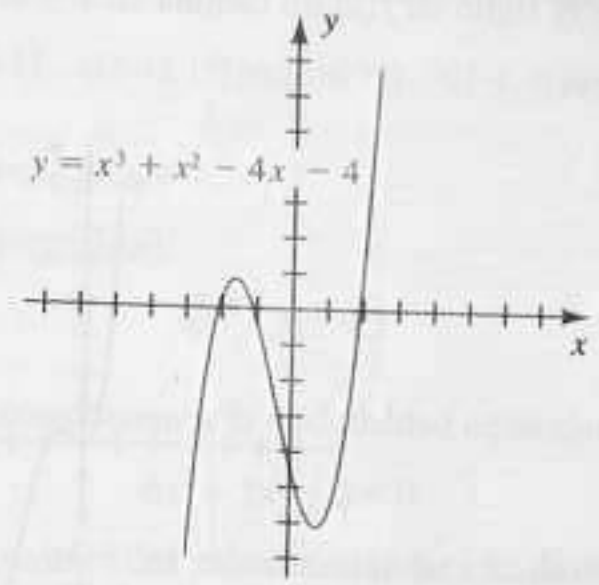


FIGURA 8

La gráfica de toda función potencial de grado 3 tiene un aspecto semejante al de la figura 8 o una versión invertida de esa gráfica si el coeficiente de x^3 es negativo; sin embargo, en ocasiones sólo tiene una intersección en x o la forma está alargada (Figs. 1 y 2).

EJEMPLO 4 *Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 4*

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Encuentra todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, toda x tal que $f(x) < 0$ y traza la gráfica de f.

Solución Comenzamos por factorizar $f(x)$:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 \qquad \text{dado}$$

$$= x^2(x^2 - 4x + 3) \qquad \text{factorizar } x^2$$

$$= x^2(x - 1)(x - 3) \qquad \text{factorizar } x^2 - 4x + 3$$

A continuación elaboramos el diagrama de signos de la figura 9, donde las líneas verticales indican los ceros 0, 1 y 3 de los factores. Puesto que el factor x^2 siempre es positivo si $x \neq 0$, no afecta el signo del producto y se puede omitir del diagrama.

Al consultar el signo de $f(x)$ del diagrama vemos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ se halla en } (1, 3).$$

(continúa)

www.elsolucionario.net

FIGURA 9

Observarás que el signo de $f(x)$ no cambia en $x = 0$. Usar esta información lleva al trazo de la figura 10.

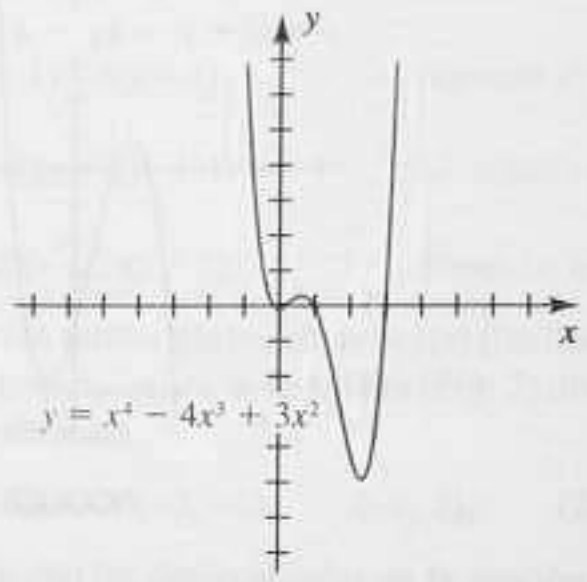


FIGURA 10

En el próximo ejemplo calcularemos las coordenadas de puntos importantes de una gráfica con una calculadora graficadora.

EJEMPLO 5 *Cálculo de ceros y puntos de inflexión*

a) Calcula los ceros reales de $f(x) = x^3 - 4.6x^2 + 5.72x - 0.656$ a tres lugares decimales.
b) Calcula las coordenadas de los puntos de inflexión de la gráfica.

Solución **a)** Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar con objeto de obtener una imagen semejante a la figura 11a. En vista de que resulta evidente que todas las raíces reales están entre 0 y 3, graficamos de nuevo, pero ahora con una pantalla en $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$. Esto da una imagen semejante a la figura 11b, la cual exhibe una sola intersección en x y, por lo tanto, una raíz real. Con la función root o zoom, calculamos que el cero real es 0.127.

b) Con la función zoom o maximum, encontramos que el punto alto es (0.867, 1.497) y con zoom o minimum vemos que el punto bajo es (2.200, 0.312).

En la sección 2.7 resolvimos desigualdades parecidas a la del ejemplo adjunto; pero nos apoyamos en la posible factorización de la expresión. Ahora usamos una calculadora graficadora para resolver una desigualdad donde hay una expresión (un polinomio cúbico) que no se factoriza con facilidad.

www.elsolucionario.net

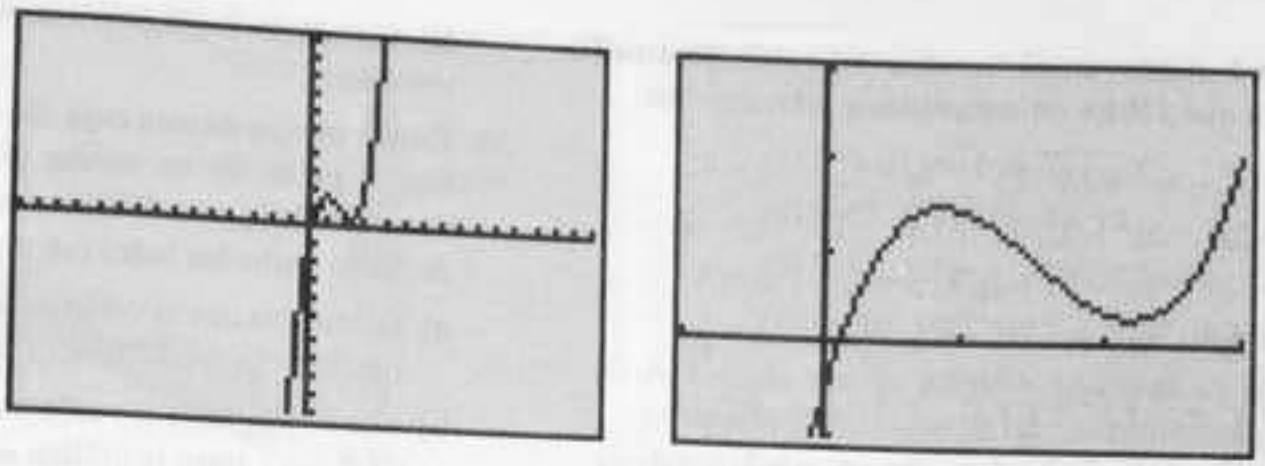


FIGURA 11 *a)* [−15, 15] por [−10, 10] *b)* [−1, 3] por [−1, 3]

EJEMPLO 6 *Solución gráfica de una desigualdad*

Calcula las soluciones de la desigualdad

$$6x^2 - 3x^3 < 2.$$

Solución Restemos 2 de ambos lados y consideremos la desigualdad equivalente

$$6x^2 - 3x^3 - 2 < 0.$$

Asignamos $6x^2 - 3x^3 - 2$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar a fin de obtener una imagen semejante a la figura 12. Hay tres intersecciones en x; si las denotamos con x_1, x_2 y x_3 (con $x_1 < x_2 < x_3$), las soluciones de la desigualdad están dadas por

$$(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty),$$

porque son los intervalos en que Y_1 es menor que 0 (la gráfica está abajo del eje x). Al usar una función zoom o root para cada intersección en x, encontramos que

$$x_1 \approx -0.515, \qquad x_2 \approx 0.722, \qquad x_3 \approx 1.793.$$

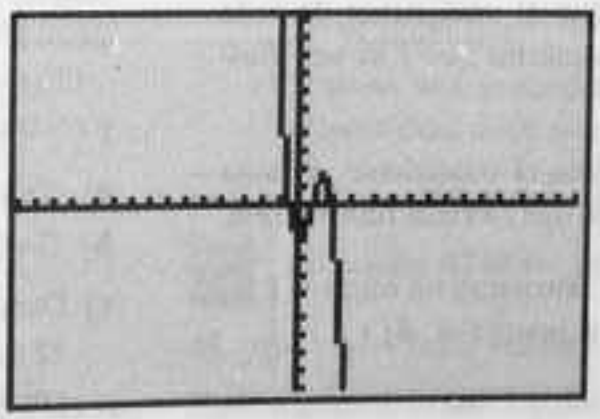


FIGURA 12 [−15, 15] por [−10, 10]

4.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: traza la gráfica de f para el valor indicado de c o a.

1. $f(x) = 2x^3 + c$ **a)** $c = 3$ **b)** $c = -3$

2. $f(x) = -2x^3 + c$ **a)** $c = -2$ **b)** $c = 2$

3. $f(x) = ax^3 + 2$ **a)** $a = 2$ **b)** $a = -\frac{1}{3}$

4. $f(x) = ax^3 - 3$ **a)** $a = -2$ **b)** $a = \frac{1}{4}$

www.elsolucionario.net

Ejercicios 5 al 10: con el teorema del valor intermedio demuestra que f tiene un cero entre a y b.

5. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$; $a = 3$, $b = 4$
6. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$; $a = -3$, $b = -2$
7. $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1$; $a = 2$, $b = 3$
8. $f(x) = 2x^4 + 3x - 2$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$
9. $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$; $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$
10. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x - 6$; $a = 3$, $b = 4$

Ejercicios 11 al 26: encuentra todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, toda x tal que $f(x) < 0$ y traza la gráfica de f.

11. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$
12. $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 3$
13. $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$
14. $f(x) = x^5 + 1$
15. $f(x) = x^4 - 4x^2$
16. $f(x) = 9x - x^3$
17. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10x$
18. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$
19. $f(x) = \frac{1}{6}(x + 2)(x - 3)(x - 4)$
20. $f(x) = -\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)(x - 6)$
21. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
22. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$
23. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
24. $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$
25. $f(x) = x^2(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)$
26. $f(x) = x^3(x + 1)^2(x - 2)(x - 4)$

27. Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia non de x es 0. Demuestra que f es una función par.

28. Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia par de x es 0. Prueba que f es una función non.

29. Si $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, encuentra un número k tal que la gráfica de f contenga al punto $(-1, 4)$

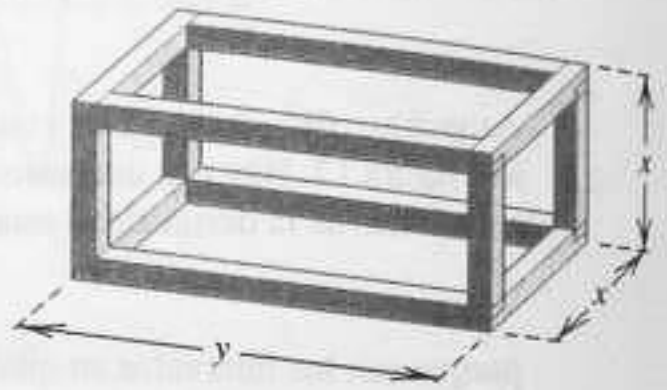
30. Si un cero de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$ es 2, halla otros dos ceros.

31. **Un polinomio de Legendre** El polinomio de Legendre de tercer grado $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ aparece en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Halla todos los valores de x tales que $P(x) > 0$, toda x tal que $P(x) < 0$ y traza la gráfica de P.

32. **Un polinomio de Chebyshev** El polinomio de Chebyshev de cuarto grado $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ aparece en estudios de estadística. Determina todos los valores de x tales que $f(x) > 0$. (*Sugerencia:* sea $x = z^2$ y usa la fórmula cuadrática.)

33. **Construcción de una caja** Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de un cartón de 20 × 30 in, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados (ve el Ejer. 53, Sec. 3.4).
   a) Demuestra que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$.
   b) Encuentra todos los valores positivos de x tales que $V(x) > 0$ y traza la gráfica de V para $x > 0$.

34. **Construcción de una caja de embalaje** El bastidor ha de construirse con 24 ft de madera de 2 × 2 in (ve la figura).
   a) Si la caja debe tener extremos cuadrados de x ft por lado, da el volumen exterior V de la armazón como función de x (desprecia el grosor de la madera).
   b) Dibuja la gráfica de V para $x > 0$.



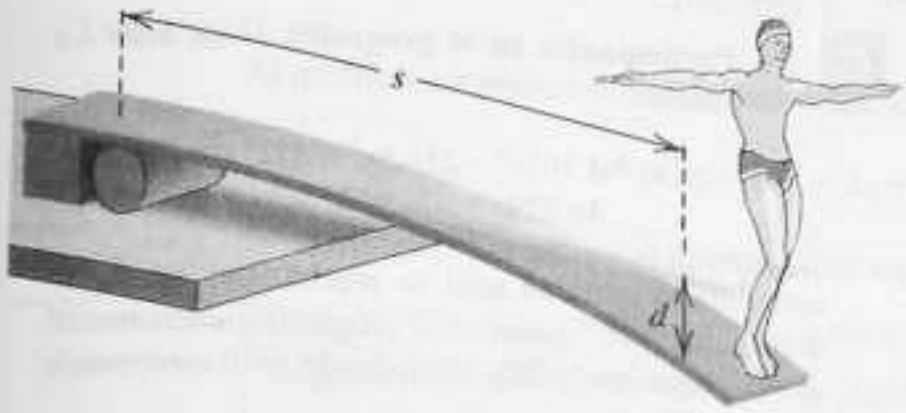
EJERCICIO 34

35. **Determinación de temperaturas** Un meteorólogo concluye que la temperatura T (en °F) para cierto periodo de 24 h en invierno estuvo dada por la fórmula $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \le t \le 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 a.m.
   a) ¿A qué hora era $T > 0$ y a cuál $T < 0$?
   b) Grafica T.
   c) Demuestra que la temperatura era de 32 °F entre las 12 a.m. y la 1:00 p.m. (*Sugerencia:* usa el teorema del valor intermedio.)

36. **Flexiones de trampolines** Un clavadista está de pie en el borde de un trampolín antes de un clavado. La flexión d del trampolín en la posición a s ft desde el extremo está dada por $d = cs^2(3L - s)$ para $0 \le s \le L$, donde L es la longitud del trampolín y c es una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas del trampolín (ve la figura). Supón que el trampolín mide 10 ft de largo.
   a) Si la flexión del extremo del trampolín es 1 ft, encuentra c.

www.elsolucionario.net

b) Demuestra que la flexión es $\frac{1}{2}$ ft entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.



EJERCICIO 36

37. Población de venados Se introduce un rebaño de 100 ejemplares en una isla pequeña. Al principio los venados aumentan con rapidez; pero a fin de cuentas disminuyen los recursos alimentarios y la población disminuye. Supongamos que el número $N(t)$ de especímenes después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde $t > 0$.

a) Halla los valores de t para los que $N(t) > 0$ y traza la gráfica de N.

b) ¿Se extingue la población de venados? Si es así, ¿cuándo desaparecerá?

38. Población de venados Consulta el ejercicio 37. Por medio de cálculo se puede demostrar que la rapidez R (en venados por año) con que cambia la población en el tiempo t está dada por $R = -4t^3 + 42t$.

a) ¿Cuándo deja de crecer la población?

b) Determina los valores positivos de t para los que $R > 0$.

C **39. a)** Construye una tabla que contenga los valores de los polinomios de cuarto grado

$$f(x) = 2x^4$$
$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$$
$$h(x) = 2x^4 + 5x^2 - 1$$
y $$k(x) = 2x^4 - x^3 + 2x$$

cuando $x = \pm 20, \pm 40$ y ± 60.

b) Conforme $|x|$ se agranda, ¿cómo se comparan los valores de cada función?

c) ¿Cuál término tiene máxima influencia en el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

C **40. a)** Grafica los polinomios cúbicos

$$f(x) = -3x^3$$
$$g(x) = -3x^3 - x^2 + 1$$
$$h(x) = -3x^3 + x^2 - 1$$
y $$k(x) = -3x^3 - 2x^2 + 2x$$

en el mismo plano coordenado, usando cada una de las siguientes pantallas:

(1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

(2) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

(3) $[-50, 50]$ por $[-5000, 5000]$

(4) $[-100, 100]$ por $[-5 \times 10^5, 5 \times 10^5]$

b) A medida que la pantalla se expande, ¿cómo se comparan las gráficas de las cuatro funciones?

c) Cuál término tiene la máxima influencia en el valor de cada una de las funciones cuando $|x|$ es grande?

C **41. a)** Grafica cada uno de estos polinomios f cúbicos en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = x^3 - x + 1$

(2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

(3) $f(x) = 0.1x^3 - 1$

(4) $f(x) = -x^3 + 4x + 2$

b) Estudia la forma de la gráfica de f a medida que $|x|$ crece.

c) Plantea una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

C **42. a)** Grafica cada uno de los siguientes polinomios f de cuarto grado en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 3$

(2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

(3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - x + 1$

(4) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$

b) Determina la forma de la gráfica de f a medida que $|x|$ se agranda.

c) Plantea una generalización respecto del comportamiento final de la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

C **Ejercicios 43 al 46: grafica f y calcula sus ceros.**

43. $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 2.6x + 1.1$

Nota: algunas secuencias de tecleo específicas para la TI-82/83 aparecen en el ejemplo 12 del apéndice I.

44. $f(x) = -x^4 + 0.1x^3 + 4x^2 - 0.5x - 3$

45. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

46. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

C **Ejercicios 47 al 50: grafica f y calcula todos los valores de x tales que $f(x) > k$.**

47. $f(x) = x^3 + 5x - 2$; $k = 1$

48. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 5$; $k = 3$

www.elsolucionario.net

49. $f(x) = x^5 - 2x^2 + 2$; $k = -2$

50. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 26$; $k = -1$

Ejercicios 51 y 52: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula los puntos de intersección.

51. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.5x + 2.8$;
$g(x) = -x^3 - 1.7x^2 + 2x + 2.5$

52. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
$g(x) = x^4 - 3x^3 - 0.25x^2 + 3.75x$

53. Beneficiarios del servicio médico del estado La función

$$f(x) = 0.0014z^3 - 0.0388z^2 + 0.8783z + 23.82$$
donde $z = x - 1975$

calcula la cantidad total de beneficiarios del servicio médico del estado, en millones, de 1975 a 1995.

a) Grafica f y analiza la forma en que la cantidad de beneficiarios ha cambiado en este periodo.

b) Calcula gráficamente el año en que hubo 34.4 millones de beneficiarios.

54. Participantes en el programa *Head Start* La función

$$f(x) = 4.363x^4 - 236.3x^3 + 5527x^2 - 46\,519x + 475\,913$$

aproxima la cantidad total de preescolares estadounidenses que participaron en el programa gubernamental *Head Start* entre 1970 y 1995, donde $x = 0$ corresponde al año 1970.

a) Grafica f en el intervalo $[0, 25]$. Analiza la forma en que la cantidad de participantes ha cambiado entre 1970 y 1995.

b) Calcula el número de niños inscritos en 1976.

c) Calcula gráficamente los años en que hubo 400 000 menores inscritos en el programa.

4.2 Propiedades de la división

En esta sección usaremos $f(x)$, $g(x)$, etc., para denotar polinomios en x. Si $g(x)$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$; por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$ y entre $x - 2$.

El polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$; pero podemos usar el proceso llamado **división larga** para hallar un *cociente* y un *residuo*, como en la siguiente ilustración, donde hemos insertado términos con coeficientes cero.

ILUSTRACIÓN

División larga de polinomios

$$\begin{array}{rl}
 & \overbrace{x^2 - 3x + 8}^{\text{cociente}} \\
x^2 + 3x + 1 \;\big|\; x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16 & \\
\underline{x^4 + 3x^3 + x^2} & x^2(x^2 + 3x + 1) \\
-3x^3 - x^2 & \text{restar} \\
\underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} & -3x(x^2 + 3x + 1) \\
8x^2 + 3x - 16 & \text{restar} \\
\underline{8x^2 + 24x + 8} & 8(x^2 + 3x + 1) \\
\underbrace{-21x - 24}_{\text{residuo}} & \text{restar}
\end{array}$$

El proceso de división larga termina cuando llegamos a un polinomio (el residuo) que es 0 o tiene menor grado que el divisor. El resultado de la división larga de la ilustración se escribe

www.elsolucionario.net

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right).$$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, se obtiene

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24).$$

Este ejemplo aclara el teorema que sigue.

Algoritmo de división para polinomios

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo en la división de $f(x)$ en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Un útil caso especial del algoritmo de división se presenta cuando se divide $f(x)$ entre $x - c$, donde c es un número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún cociente $q(x)$, y el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo $r(x)$ es menor que el grado de $x - c$ y, por lo tanto, $r(x)$ debe tener grado 0. Esto significa que el residuo es un número diferente de cero y, en consecuencia, para toda $x - c$ tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + d,$$

donde el residuo d es un número real (quizá $d = 0$). Si c sustituye a x, obtenemos

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + d \\ &= 0 \cdot q(c) + d \\ &= 0 + d = d. \end{aligned}$$

Esto demuestra el próximo teorema.

Teorema del residuo

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 *Uso del teorema del residuo*

Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, usa el teorema del residuo para hallar $f(2)$.

Solución Según este teorema, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$. Por división larga,

www.elsolucionario.net

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 - x - 1 & \\
x-2 & x^3 - 3x^2 + x + 5 & \\
\hline
 & x^3 - 2x^2 & x^2(x-2) \\
\hline
 & -x^2 + x & \text{restar} \\
 & -x^2 + 2x & -x(x-2) \\
\hline
 & -x + 5 & \text{restar} \\
 & -x + 2 & (-1)(x-2) \\
\hline
 & 3 & \text{restar}
\end{array}
$$

Por lo tanto, $f(2) = 3$. Este dato se puede comprobar mediante sustitución directa:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3$$

Con el teorema del residuo demostraremos este importante resultado:

Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

PRUEBA Por el teorema del residuo,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

para algún cociente $q(x)$.

Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; es decir, $x - c$ es un factor de $f(x)$. A la inversa, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - c$ debe ser 0 y, en consecuencia, por el teorema del residuo, $f(c) = 0$.

El teorema del factor es útil para hallar factores de polinomios, según se expone en este ejemplo:

EJEMPLO 2 *Uso del teorema del factor*

Prueba que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

Solución Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, por el teorema del factor, $x - 2$ es un factor de $f(x)$. Otro método de solución sería dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y probar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $f(x)$.

EJEMPLO 3 *Determinación de un polinomio con ceros prescritos*

Encuentra un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga ceros 2, –1 y 3.

www.elsolucionario.net

Solución Por el teorema del factor, $f(x)$ cuenta con factores $x-2$, $x+1$ y $x-3$. Por lo tanto,

$$f(x) = a(x-2)(x+1)(x-3),$$

en donde se puede asignar a a cualquier valor diferente de cero. Con $a = 1$ y una multiplicación, llegamos a

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Aplicar el teorema del residuo significa dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - c$. El método de **división sintética** simplifica este trabajo; las siguientes guías indican el procedimiento. El método se justifica mediante una cuidadosa (y prolongada) comparación con el método de división larga.

Guías para la división sintética de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ entre $x - c$

(1) Se comienza con el siguiente esquema (se dan ceros para cualesquier coeficientes faltantes del polinomio dado).

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

(2) Se multiplica a_n por c y el producto ca_n se anota abajo de a_{n-1}, según lo indica la flecha de abajo (las flechas del esquema sólo aclaran estas guías, no aparecen en divisiones sintéticas *específicas*). A continuación se encuentra $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y se coloca debajo de la línea:

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & \nearrow ca_n & \nearrow cb_1 & \nearrow cb_2 & \nearrow cb_{n-2} & \nearrow cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & & b_{n-2} & b_{n-1} \quad r \end{array}$$

(3) Se multiplica b_1 por c y el producto cb_1 se pone abajo de a_{n-2}, como lo indica la segunda flecha. Al proseguir, se halla la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$, que se pone abajo de la línea, como se muestra.

(4) Se continúa este proceso —según lo indican las flechas— hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1} \quad r$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es,

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1},$$

y r es el residuo.

Los ejemplos que vienen exponen la división sintética de algunos casos especiales.

EJEMPLO 4 *Uso de la división sintética para hallar un cociente y residuo*

Utiliza la división sintética para hallar el cociente $q(x)$ y el residuo r si el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ se divide entre $x + 3$.

www.elsolucionario.net

Solución Ya que el divisor es $x + 3 = x - (-3)$, el valor de c en la expresión $x - c$ es -3; por lo tanto, la división sintética adopta esta forma:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \end{array}$$

coeficientes del cociente — residuo

Según hemos indicado, las cuatro primeras cifras del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$ y el último número es el residuo r. En consecuencia,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \qquad \text{y} \qquad r = 25.$$

La división sintética sirve para hallar valores de funciones polinomiales, lo cual se ilustra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 *Uso de la división sintética para hallar valores de un polinomio*

Si $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$, halla $f(4)$ mediante la división sintética.

Solución Por el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 4$. Al dividir sintéticamente se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & 3 & 12 & 10 & 45 & 180 & 719 \end{array}$$

coeficientes del cociente — residuo

En consecuencia, $f(4) = 719$.

La división sintética ayuda a encontrar ceros de polinomios. Por el método ilustrado en el ejemplo anterior, $f(c) = 0$ si y sólo si el residuo en la división sintética entre $x - c$ es 0.

EJEMPLO 6 *Uso de la división sintética para hallar ceros de un polinomio*

Demuestra que -11 es un cero del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44.$$

Solución Al dividir sintéticamente entre $x - (-11) = x + 11$ se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

coeficientes del cociente — residuo

Por lo tanto, $f(-11) = 0$ y -11 es un cero de f.

www.elsolucionario.net

El ejemplo 6 evidencia que el número -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la sección 4.4 usaremos la división sintética a fin de hallar soluciones racionales de ecuaciones.

En esta etapa ya debes reconocer que las tres expresiones que siguen son equivalentes para una función polinomial f cuya gráfica es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Expresiones equivalentes para $f(a) = b$

(1) El punto (a, b) está en la gráfica de f.

(2) El valor de f en $x = a$ es igual a b; esto es, $f(a) = b$.

(3) Si $f(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es b.

Además, si $b = 0$, las cuatro expresiones que vienen también son equivalentes.

Otras expresiones equivalentes para $f(a) = 0$

(1) El número a es un cero de la función f.

(2) El punto $(a, 0)$ es una intersección en x en la gráfica de f.

(3) El número a es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

(4) El binomio $x - a$ es un factor del polinomio $f(x)$.

Debes acostumbrarte tanto a estas expresiones, que con sólo saber que si una de ellas es verdadera, puedas recordar y aplicar cualquier expresión equivalente con facilidad.

EJEMPLO 7 *Relación de una gráfica con la división*

Utiliza la gráfica de

$$f(x) = 0.5x^5 + 3.5x^4 - 5.5x^3 - 7.5x^2 + 2x + 2$$

y calcula (a dos lugares decimales) el residuo si $f(x)$ se divide entre $x + 1.37$.

Solución Asignamos $f(x)$ a Y_1 y graficamos f con una pantalla estándar (Fig. 13). De acuerdo con nuestro análisis anterior, para hallar un residuo b utilizando una gráfica debemos encontrar el punto (a, b) que corresponde a dividir $f(x)$ entre $x - a$. En este caso, $a = -1.37$, y el punto de la gráfica con coordenada x igual a -1.37 es aproximadamente $(-1.37, 9.24)$; por lo tanto, el residuo b es alrededor de 9.24.

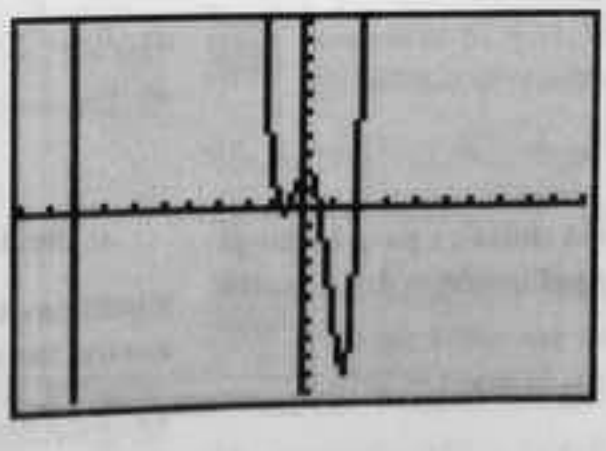


FIGURA 13 [−10, 10] por [−10, 10]

www.elsolucionario.net

La forma más fácil de hallar el residuo con una calculadora graficadora es pedir a la máquina el valor Y_1 cuando $x = -1.37$; sin embargo, el propósito de este ejemplo fue señalar la relación gráfica con el proceso de división.

4.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: encuentra el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

1. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$; $p(x) = x^2 - 3$
2. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$; $p(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$; $p(x) = 2x^2 + 1$
4. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 8$; $p(x) = 2x^2 + x$
5. $f(x) = 7x + 2$; $p(x) = 2x^2 - x - 4$
6. $f(x) = -5x^2 + 3$; $p(x) = x^3 - 3x + 9$
7. $f(x) = 9x + 4$ $p(x) = 2x - 5$
8. $f(x) = 7x^2 + 3x - 10$; $p(x) = x^2 - x + 10$

Ejercicios 9 al 12: usa el teorema del residuo para hallar $f(c)$.

9. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$; $c = 2$
10. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$; $c = 3$
11. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$; $c = -3$
12. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12$; $c = -2$

Ejercicios 13 al 16: demuestra que $x - c$ es un factor de $f(x)$ mediante el teorema del factor.

13. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12$; $c = -3$
14. $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$; $c = 2$
15. $f(x) = x^{12} - 4096$; $c = -2$
16. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$; $c = 2$

Ejercicios 17 al 20: halla un polinomio $f(x)$ con coeficiente inicial 1 y el grado y ceros dados.

17. Grado 3; ceros $-2, 0, 5$
18. Grado 3; ceros $\pm 2, 3$
19. Grado 4; ceros $-2, \pm 1, 4$
20. Grado 4; ceros $-3, 0, 1, 5$

Ejercicios 21 al 28: usa la división sintética para hallar el cociente y el residuo si el primer polinomio se divide entre el segundo.

21. $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; $x - 2$
22. $3x^3 - 4x^2 - x + 8$; $x + 4$
23. $x^3 - 8x - 5$; $x + 3$
24. $5x^3 - 6x^2 + 15$; $x - 4$
25. $3x^5 + 6x^2 + 7$; $x + 2$
26. $-2x^4 + 10x - 3$; $x - 3$
27. $4x^4 - 5x^2 + 1$; $x - \frac{1}{2}$
28. $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4$; $x - \frac{1}{3}$

Ejercicios 29 al 34: encuentra $f(c)$ por medio de la división sintética.

29. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$; $c = 3$
30. $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x$; $c = -2$
31. $f(x) = 0.3x^3 + 0.04x - 0.034$; $c = -0.2$
32. $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7$; $c = \frac{1}{2}$
33. $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $c = 2 + \sqrt{3}$
34. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8$; $c = 1 + \sqrt{2}$

Ejercicios 35 al 38: prueba que c es un cero de $f(x)$ usando la división sintética.

35. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4$; $c = -2$
36. $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3$; $c = 3$
37. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3$ $c = \frac{1}{2}$
38. $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1$; $c = -\frac{1}{3}$

Ejercicios 39 y 40: encuentra todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

39. $f(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11$; $x + 2$
40. $f(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$; $x - 1$

Ejercicios 41 y 42: demuestra que $x - c$ no es un factor de $f(x)$ para cualquier número real c.

41. $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ 42. $f(x) = -x^4 - 3x^2 - 2$

43. Encuentra el residuo si el polinomio

$$3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$$

se divide entre $x + 1$

Ejercicios 44 al 46: comprueba el enunciado con el teorema del factor.

44. $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n.
45. $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n par.

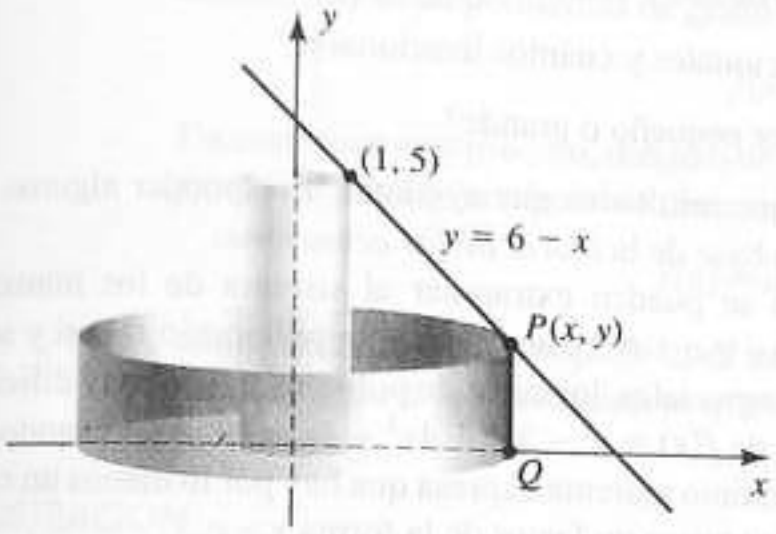
www.elsolucionario.net

46. $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$ para todo entero positivo n non.

47. Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante en $y = 6 - x$; considera el segmento de recta vertical PQ de la figura.

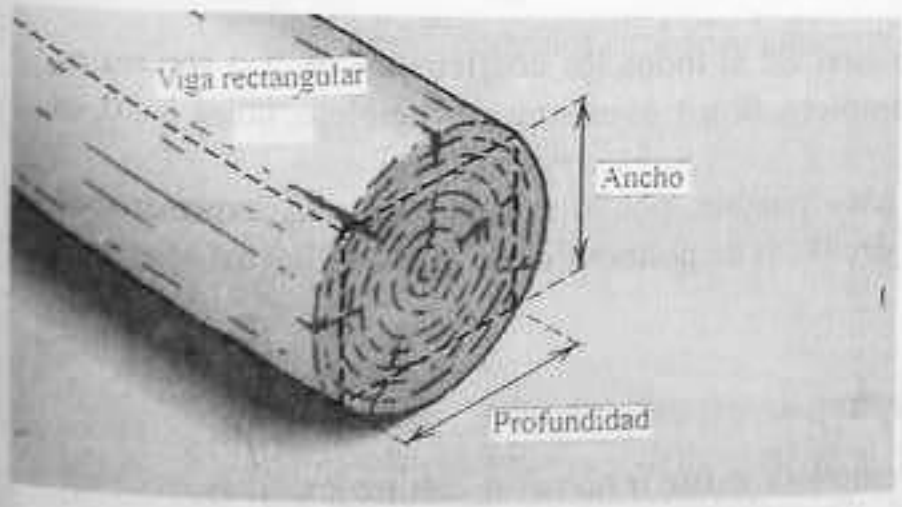
a) Si PQ gira alrededor del eje y, determina el volumen V del cilindro resultante.

b) ¿Para qué punto $P(x, y)$ con $x \neq 1$ el volumen V de la parte **a)** es el mismo que el volumen del cilindro de radio 1 y altura 5 de la figura?



EJERCICIO 47

48. **Resistencia de una viga** La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto de su ancho y el cuadrado de la profundidad de una sección transversal (ve la figura). Se cortó una viga de 1.5 ft de ancho de un tronco cilíndrico de 1 ft de radio. Encuentra el ancho de una segunda viga rectangular de igual resistencia que se puede cortar del tronco.

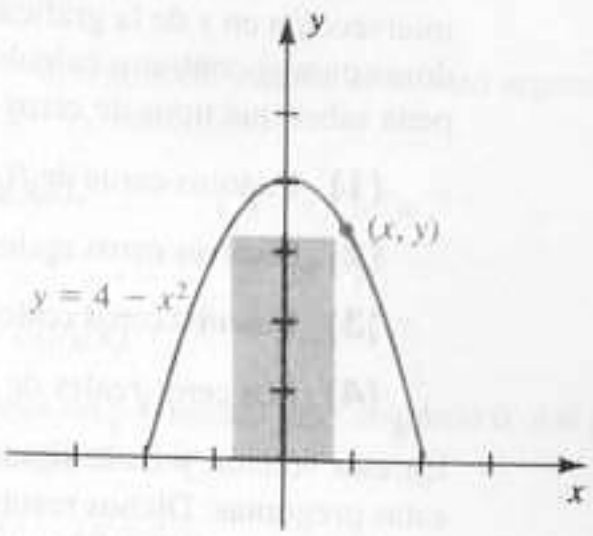


EJERCICIO 48

49. **Arco parabólico** Un arco tiene la forma de la parábola $y = 4 - x^2$. Se escoge un punto (x, y) de la parábola y se coloca un rectángulo bajo el arco (ve la figura).

a) Expresa el área A del rectángulo en términos de x.

b) Si $x = 1$, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Halla la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área.

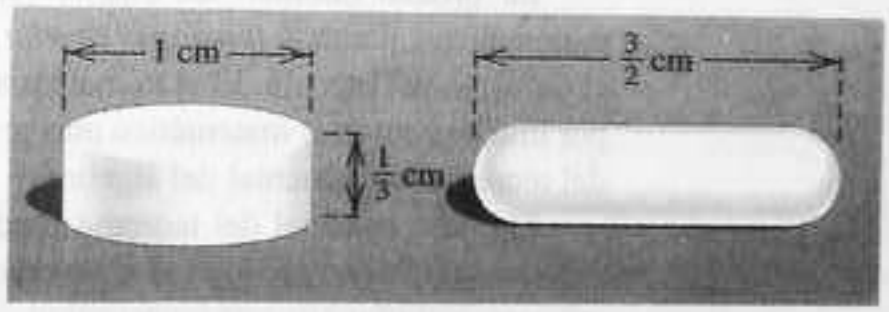


EJERCICIO 49

50. **Dimensiones de una tableta** Una tableta de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene una altura de $\frac{1}{3}$ cm y radio $\frac{1}{2}$ cm; el fabricante desea vender la aspirina en tabletas de $\frac{3}{2}$ cm de largo, en forma de cilindro circular recto con extremos redondeados (ve la figura).

a) Si r denota el radio de una semiesfera, encuentra una fórmula para establecer el volumen de la tableta.

b) Encuentra el radio de la tableta, de modo que su volumen sea igual al de la otra.



EJERCICIO 50

C **Ejercicios 51 y 52: usa la gráfica de f con objeto de aproximar el residuo de f si se divide entre $x - 0.21$.**

51. $f(x) = x^8 - 7.9x^5 - 0.8x^4 + x^3 + 1.2x - 9.81$

52. $f(x) = 3.33x^6 - 2.5x^5 + 6.9x^3 - 4.1x^2 + 1.22x - 6.78$

C **Ejercicios 53 y 54: utiliza la gráfica de f a fin de estimar todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.**

53. $f(x) = x^3 + k^3x^2 + 2kx - 2k^4$; $x - 1.6$

54. $f(x) = k^5x^3 - 2.1x^2 + k^3x - 1.2k^2$; $x + 0.4$

www.elsolucionario.net

4.3 Ceros de polinomios

Los **ceros de un polinomio** $f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Cada cero real es una intersección en x de la gráfica de f. En la práctica, generalmente se usan calculadoras y computadoras para encontrar o calcular ceros pero, antes de usar cualquiera de estos dispositivos, vale la pena saber qué tipos de ceros esperar. Algunas posibles preguntas son:

(1) ¿Cuántos ceros de $f(x)$ son reales y cuántos imaginarios?

(2) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son positivos y cuántos negativos?

(3) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son racionales y cuántos irracionales?

(4) ¿Los ceros reales de $f(x)$ son de valor pequeño o grande?

En esta sección y en la siguiente analizaremos resultados que ayudarán a responder algunas de estas preguntas. Dichos resultados forman la base de la *teoría de las ecuaciones*.

Los teoremas del factor y del residuo se pueden extrapolar al sistema de los números complejos; por lo tanto, el número complejo $c = a + bi$ es un cero de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. Excepto en casos especiales, los ceros de polinomios son muy difíciles de hallar; por ejemplo, no hay ceros obvios de $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x - 10$. Aun cuando no exista una fórmula para hallar los ceros, el próximo teorema expresa que hay por lo menos un cero c y, por lo tanto, por el teorema del factor, $f(x)$ posee un factor de la forma $x - c$.

Teorema fundamental del álgebra

Si un polinomio $f(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $f(x)$ posee por lo menos un cero complejo.

La prueba habitual de este teorema requiere resultados de un campo avanzado de las matemáticas, llamado *funciones de una variable compleja*. Un requisito previo de este campo es el dominio del cálculo. El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) —considerado por muchos como el matemático más grande de todos los tiempos— desarrolló la primera prueba del teorema fundamental del álgebra.

Un caso especial del teorema fundamental es: si todos los coeficientes de $f(x)$ son reales, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero complejo. Si $a + bi$ es un cero complejo, quizá $b = 0$, en cuyo caso el número a es un cero real.

El teorema fundamental del álgebra hace posible, por lo menos en teoría, expresar todo polinomio $f(x)$ de grado positivo como un producto de polinomios de grado 1, lo cual se expone en el próximo teorema.

Teorema de factorización completa para polinomios

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existe n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente inicial de $f(x)$. Cada número c_k es un cero de $f(x)$.

www.elsolucionario.net

PRUEBA Si $f(x)$ tiene grado $n > 0$ entonces, por el teorema fundamental del álgebra, $f(x)$ posee un cero complejo c_1. En consecuencia, por el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor de $x - c_1$; por lo tanto,

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, entonces, usando el mismo argumento, $f_1(x)$ tiene un cero complejo c_2 y, por tanto, un factor $x - c_2$. Entonces

$$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x),$$

donde $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. Por esto,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

De continuar este proceso, después de n pasos llegamos a un polinomio $f_n(x)$ de grado 0. Así pues, $f_n(x) = a$ para algún número a distinto de cero, y podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde cada número complejo c_k es un cero de $f(x)$. El coeficiente inicial del polinomio del lado derecho de la última ecuación es a; por lo tanto, a es el coeficiente inicial de $f(x)$.

ILUSTRACIÓN

Teorema de factorización completa para polinomios

Un polinomio $f(x)$	Una forma factorizada de $f(x)$	Ceros de $f(x)$
$3x^2 - (12 + 6i)x + 24i$	$3(x - 4)(x - 2i)$	$4, 2i$
$-6x^3 - 2x^2 - 6x - 2$	$-6\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + i)(x - i)$	$-\frac{1}{3}, \pm i$
$5x^3 - 30x^2 + 65x$	$5(x - 0)[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)]$	$0, 3 \pm 2i$
$\frac{2}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 8$	$\frac{2}{3}(x + 12)(x + 1)(x - 1)$	$-12, \pm 1$

Ahora podemos probar lo siguiente:

Teorema sobre el número máximo de ceros de un polinomio

Un polinomio de grado $n > 0$ cuenta cuando mucho con n ceros complejos diferentes.

PRUEBA Daremos una prueba indirecta; esto es, supondremos que $f(x)$ tiene *más de* n ceros complejos diferentes y demostraremos que esta suposición lleva a una contradicción. Escojamos $n + 1$ de los ceros y llamémosles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y c. Podemos usar el c_k para obtener la factorización indicada en la expresión del teorema de factorización completa. Sustituimos x con c y aprovechamos que $f(c) = 0$, con lo cual

$$0 = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n).$$

Sin embargo, cada factor del lado derecho es diferente de cero porque $c \neq c_k$ para toda k. Puesto que el producto de números distintos de cero no puede ser igual a cero, tenemos una contradicción.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1 ***Determinación de un polinomio con ceros prescritos***

Encuentra un polinomio $f(x)$ de grado 3, en forma factorizada, con ceros 2, -1 y 3, que satisfaga $f(1) = 5$.

Solución Por el teorema del factor, $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. No existen otros factores de grado 1 porque, por el teorema del factor, otro factor lineal produciría un cuarto cero de $f(x)$, contrario al teorema anterior; por lo tanto, $f(x)$ adopta la forma

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

para algún número a. Dado que $f(1) = 5$, vemos que

$$5 = a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3) \qquad \text{hacer } x = 1 \text{ en } f(x)$$

$$5 = a(-1)(2)(-2) \qquad \text{simplificar}$$

$$a = \tfrac{5}{4} \qquad \text{despejar } a$$

En consecuencia,

$$f(x) = \tfrac{5}{4}(x - 2)(x + 1)(x - 3).$$

Si multiplicamos los factores, obtenemos el polinomio

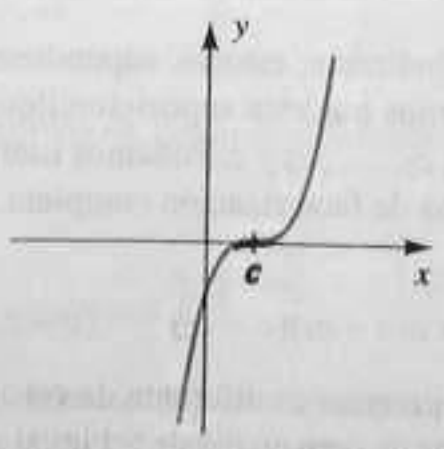
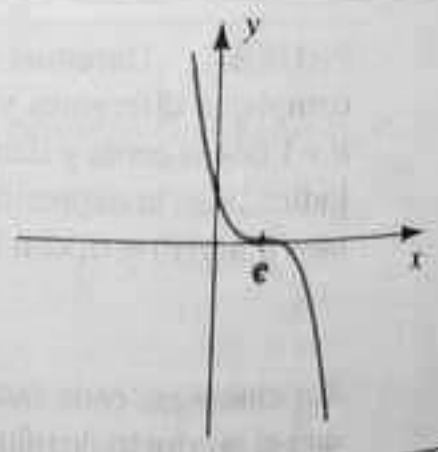
$$f(x) = \tfrac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{15}{2}.$$

Los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ del teorema de factorización completa no son necesariamente todos distintos. Para ilustrarlo, $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ tiene la factorización

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 1).$$

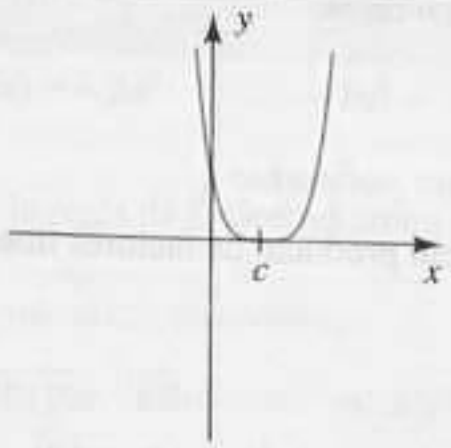
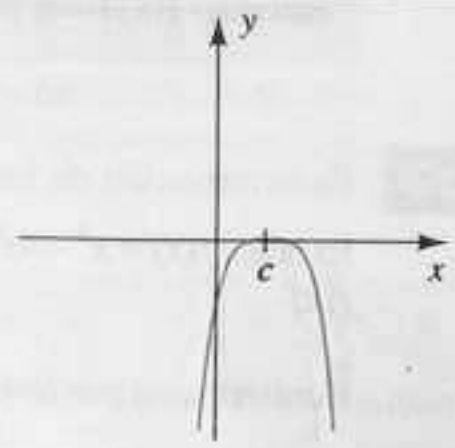
Si un factor $x - c$ se presenta m veces en la factorización, entonces c es un **cero de multiplicidad *m*** del polinomio $f(x)$ o una **raíz de multiplicidad *m*** de la ecuación $f(x) = 0$. En el esquema anterior, 1 es un cero de multiplicidad 2 y -3 es un cero de multiplicidad 1.

Si c es un cero real de $f(x)$ de multiplicidad m, entonces $f(x)$ tiene el factor $(x - c)^m$ y la gráfica de m presenta una intersección en x de c. La forma general de la gráfica en $(c, 0)$ depende de si m es entero non o entero par. Si m es non, entonces $(x - c)^m$ cambia de signo conforme x crece en todo c; en consecuencia, la gráfica de f cruza el eje x en $(c, 0)$, según se ve en el primer renglón de la tabla que viene. Las figuras de la tabla no presentan toda la gráfica de f, sino sólo su forma general cerca de $(c, 0)$. Si m es par, entonces $(x - c)^m$ no cambia signo en c y la gráfica de f cerca de $(c, 0)$ se parece a una de las dos figuras del segundo renglón (pág. 267).

Factor de $f(x)$	Aspecto general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$	
$(x - c)^m$, con m non y $m \neq 1$		

www.elsolucionario.net

(*cont.*)

Factor de $f(x)$	Aspecto general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$
$(x-c)^m$, con m par	 

EJEMPLO 2 *Búsqueda de las multiplicidades de ceros*

Encuentra los ceros del polinomio $f(x) = \frac{1}{16}(x-2)(x-4)^3(x+1)^2$, expresa la multiplicidad de cada uno y traza la gráfica de f.

Solución Con la forma factorizada vemos que $f(x)$ tiene tres ceros distintos, 2, 4 y -1. El cero 2 posee multiplicidad 1; el 4, multiplicidad 3, y el cero -1, multiplicidad 2. Observa que $f(x)$ tiene grado 6.

Las intersecciones en x de la gráfica de f son los ceros reales -1, 2 y 4. Dado que la multiplicidad de -1 es un entero par, la gráfica interseca pero no cruza el eje x en $(-1, 0)$. Como las multiplicidades de 2 y 4 son nones, la gráfica cruza el eje x en $(2, 0)$ y $(4, 0)$. (Advertirás que la gráfica es "más plana" en 4 que en 2.) La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{16}(-2)(-4)^3(1)^2 = 8$. La gráfica se exhibe en la figura 14.

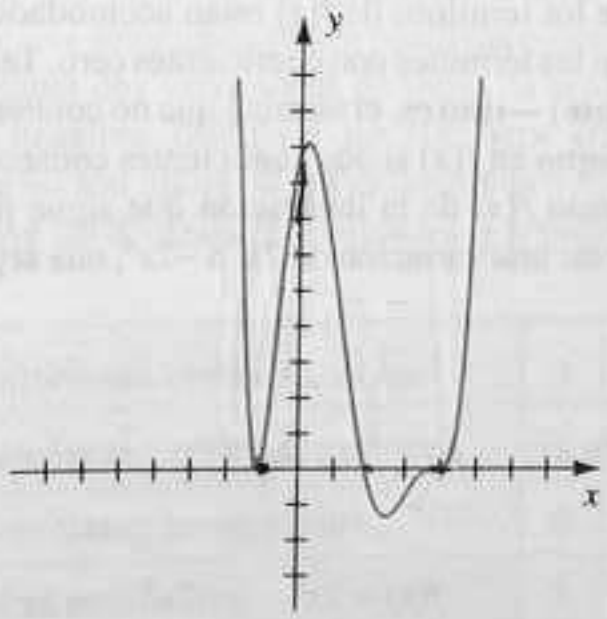


FIGURA 14

Si $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$ es un polinomio de grado n, entonces los n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son ceros de $f(x)$. Contar un cero de multiplicidad m como m ceros significa que $f(x)$ tiene por lo menos n ceros (no necesariamente todos distintos). La combinación de este dato con que $f(x)$ tiene por lo menos n ceros da este resultado:

www.elsolucionario.net

Teorema sobre el número exacto de ceros de un polinomio

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

EJEMPLO 3 *Determinación de los ceros de un polinomio*

Expresa $f(x) = x^5 - 4x^4 + 13x^3$ como producto de factores lineales y encuentra los cinco ceros de $f(x)$.

Solución Comenzamos por factorizar x^3

$$f(x) = x^3(x^2 - 4x + 13)$$

Por la fórmula cuadrática, los ceros del polinomio $x^2 - 4x + 13$ son

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Así pues, por el teorema del factor, $x^2 - 4x + 13$ tiene factores $x - (2 + 3i)$ y $x - (2 - 3i)$ y obtenemos la factorización

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

Dado que $x - 0$ se presenta tres veces como factor, el número 0 es un cero de multiplicidad 3 y los cinco ceros de $f(x)$ son 0, 0, 0, $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

Enseguida mostraremos el uso de la *regla de Descartes de los signos* a fin de obtener información sobre los ceros de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. En el enunciado de la regla suponemos que los términos de $f(x)$ están acomodados en orden de potencias decrecientes de x y que no aparecen los términos con coeficientes cero. También suponemos que el **término constante** (o **independiente**) —esto es, el término que no contiene x— es distinto de 0. Decimos que hay una **variación de signo** en $f(x)$ si dos coeficientes consecutivos tienen signos contrarios. Para aclarar esto, el polinomio $f(x)$ de la ilustración que sigue presenta *tres* variaciones de signo, como lo indican las llaves: una variación de $2x^5$ a $-7x^4$, una segunda de $-7x^4$ a $3x^2$ y una tercera de $6x$ a -5.

ILUSTRACIÓN

Variaciones de signo en $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$

$$f(x) = \overbrace{2x^5}^{+\text{ a }-} \overbrace{-7x^4}^{-\text{ a }+} \overbrace{+3x^2}^{\text{sin variación}} \overbrace{+6x}^{+\text{ a }-} - 5$$

■

La regla de Descartes también se refiere a las variaciones de signo en $f(-x)$. Con la ilustración previa, observamos que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^4 + 3(-x)^2 + 6(-x) - 5 \\ &= -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5. \end{aligned}$$

En consecuencia, según se ve en la próxima ilustración, hay *dos* variaciones de signo en $f(-x)$: una de $-7x^4$ a $3x^2$ y otra de $3x^2$ a $-6x$.

www.elsolucionario.net

Ilustración

Variación de signo en $f(-x)$ si $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$

■ $$f(-x) = \overbrace{-2x^5}^{\text{sin variación}} \overbrace{-7x^4}^{-\text{a}+} \overbrace{+3x^2}^{+\text{a}-} \overbrace{-6x}^{\text{sin variación}} - 5$$

Se puede indicar la regla de Descartes como sigue:

Regla de los signos de Descartes

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y término constante diferente de cero.

(1) El número de ceros reales *positivos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menor que ese número por un entero par.

(2) El número de ceros reales *negativos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o es menor que ese número por un entero par.

No probaremos la regla de Descartes.

EJEMPLO 4 *Uso de la regla de los signos de Descartes*

Analiza el número de posibles soluciones reales positivas, negativas e imaginarias de la ecuación $f(x) = 0$, donde

$$f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5.$$

Solución El polinomio $f(x)$ se dio en las dos ilustraciones anteriores. Puesto que hay tres variaciones de signo en $f(x)$, la ecuación tiene tres soluciones reales positivas o una solución real positiva.

En vista de que $f(-x)$ presenta dos variaciones de signo, la ecuación tiene o dos soluciones negativas o ninguna solución negativa. Debido a que $f(x)$ tiene grado 5 hay un total de cinco soluciones. Las soluciones que no son números reales positivos o negativos son números imaginarios. La próxima tabla resume las diversas posibilidades que pueden ocurrir como soluciones de la ecuación.

Número de soluciones reales positivas	3	3	1	1
Número de soluciones reales negativas	2	0	2	0
Número de soluciones imaginarias	0	2	2	4
Número total de soluciones	5	5	5	5

La regla de Descartes estipula que el término constante del polinomio $f(x)$ es diferente de 0. Si el término constante es 0, como en la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0,$$

factorizamos la mínima potencia de x y obtenemos

$$x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 0.$$ *(continúa)*

www.elsolucionario.net

Por lo tanto, una solución es $x = 0$ y aplicamos la regla de Descartes al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ a fin de establecer la naturaleza de las tres soluciones restantes.

Cuando apliques la regla de Descartes, considera las raíces de multiplicidad k como k raíces; por ejemplo, dada $x^2 - 2x + 1 = 0$, el polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene dos variaciones de signo y por ello la ecuación presenta dos raíces reales positivas o ninguna. La forma factorizada de la ecuación es $(x - 1)^2 = 0$ y, en consecuencia, 1 es una raíz de multiplicidad 2.

En seguida estudiamos las *cotas* para los ceros reales de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. Por definición, un número real b es una **cota superior** para los ceros si ningún cero es mayor que b. Un número real a es una **cota inferior** para los ceros si ningún cero es menor que a. De esta forma, si r es cualquier cero real de $f(x)$, entonces $a \le r \le b$; esto es, r está en el intervalo cerrado $[a, b]$ (Fig. 15). Observarás que las cotas superior e inferior no son únicas, ya que cualquier número mayor de b también es una cota superior y cualquier número menor de a también es una cota inferior.

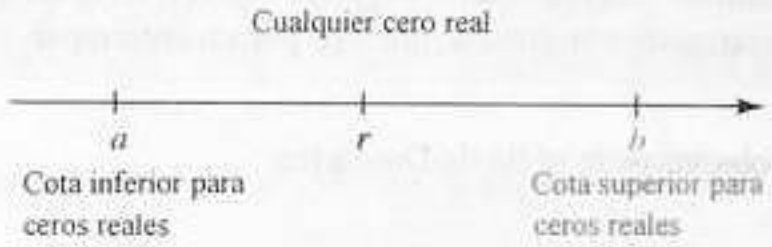


FIGURA 15

Podemos usar la división sintética a fin de hallar las cotas superior e inferior para los ceros de $f(x)$. Recordemos que si dividimos $f(x)$ sintéticamente entre $x - c$, el tercer renglón del proceso de división contiene los coeficientes del cociente $q(x)$ y el residuo $f(c)$. El teorema que sigue expone cómo se puede usar este tercer renglón a fin de encontrar las cotas superior e inferior de las soluciones reales.

Teorema de cotas para ceros reales de polinomios

Supongamos que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente inicial positivo, y que $f(x)$ se divide sintéticamente entre $x - c$.

(1) Si $c > 0$ y todos los números del tercer renglón del proceso de división son positivos o cero, entonces c es una cota superior para los ceros reales de $f(x)$.

(2) Si $c < 0$ y los números del tercer renglón del proceso de división son alternativamente positivos y negativos (y un cero del tercer renglón se considera como positivo o negativo), entonces c es una cota inferior para los ceros reales de $f(x)$.

EJEMPLO 5 *Determinación de cotas para las soluciones de una ecuación*

Encuentra las cotas superior e inferior de las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$.

Solución Dividimos $f(x)$ sintéticamente entre $x - 1$ y $x - 2$:

www.elsolucionario.net

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} 2 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

El tercer renglón de la división sintética entre $x - 1$ contiene números negativos y, por lo tanto, no aplica la parte (1) del teorema sobre cotas para ceros reales; sin embargo, ya que todos los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - 2$ son positivos, de la parte (1) se deduce que 2 es una cota superior para las soluciones reales de la ecuación. Este hecho también es evidente si expresamos la división entre $x - 2$ en la forma de algoritmo de división

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 9x + 10) + 13,$$

porque si $x > 2$, el lado derecho de la ecuación es positivo (¿por qué?) y en consecuencia, $f(x)$ no es cero.

Ahora encontramos una cota inferior. Tras algunos intentos de prueba y error usando $x - (-1)$, $x - (-2)$ y $x - (-3)$, la división sintética entre $x - (-4)$ da

$$\begin{array}{r|cccc} -4 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & -8 & 12 & -16 \\ \hline & 2 & -3 & 4 & -23 \end{array}$$

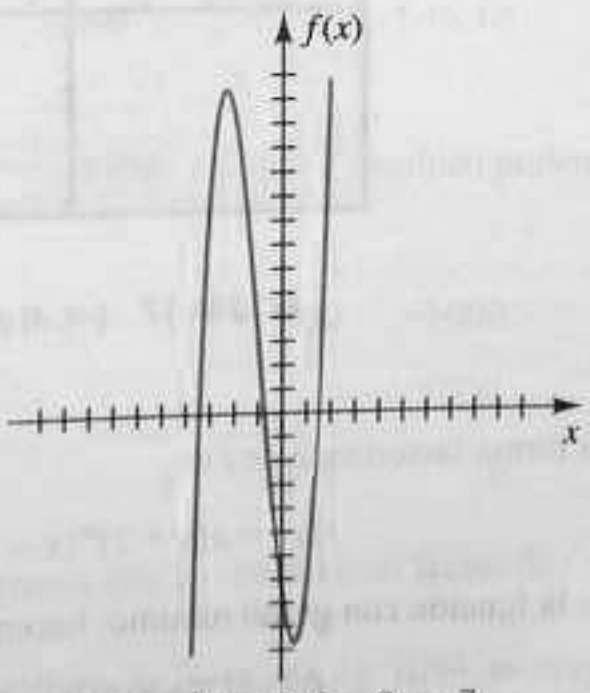
Dado que los números del tercer renglón son alternativamente positivos y negativos, de la parte (2) del teorema anterior deducimos que -4 es una cota inferior para las soluciones reales. También podemos demostrarlo expresando la división entre $x + 4$ en la forma

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x + 4)(2x^2 - 3x + 4) - 23,$$

porque si $x < -4$, entonces el lado derecho de esta ecuación es negativo (¿por qué?); así pues, $f(x)$ no es cero.

Puesto que las cotas inferior y superior de las soluciones reales son -4 y 2, se deduce que todas las soluciones reales pertenecen al intervalo cerrado $[-4, 2]$.

La gráfica de f de la figura 16 muestra que los tres ceros de f están en los intervalos $[-4, -3]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$, respectivamente.



$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$

FIGURA 16

www.elsolucionario.net

Cuando utilices una calculadora graficadora *sólo* para hallar los ceros de un polinomio $f(x)$, no precisas ver los puntos de inflexión del polinomio; en consecuencia, puedes empezar a buscar los ceros de $f(x)$ con la pantalla

$$[-M, M] \text{ por } [-1, 1].$$

El valor de M es igual al valor absoluto del cociente entre el coeficiente más grande (en magnitud) de $f(x)$ y el coeficiente inicial de $f(x)$, más 1; por ejemplo, con el polinomio $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ del ejemplo 5, tenemos

$$M = \left|\frac{-8}{2}\right| + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Si graficas $Y_1 = f(x)$ usando $[-5, 5]$ por $[-1, 1]$, casi podrás tener a la vista las soluciones aproximadas -3.4, -0.7 y 1.5. ¡Inténtalo!

EJEMPLO 6 *Determinación de un polinomio a partir de una gráfica*

En la figura 17 se ilustran todos los ceros de una función polinomial f(Xscl = 1, Yscl = 5).

a) Encuentra una forma factorizada para f que tenga grado mínimo.

b) Sea $f = 1$ el coeficiente inicial de f es 1; encuentra la intersección en y.

Solución **a)** El cero de $x = -2$ debe tener una multiplicidad que sea un número par, ya que f no cambia signo en $x = -2$. El cero en $x = 1$ debe poseer una multiplicidad non de 3 o mayor, ya que f cambia signo en $x = 1$ y se nivela. El cero en $x = 3$ es de multiplicidad 1, porque f cambia signo y no se nivela.

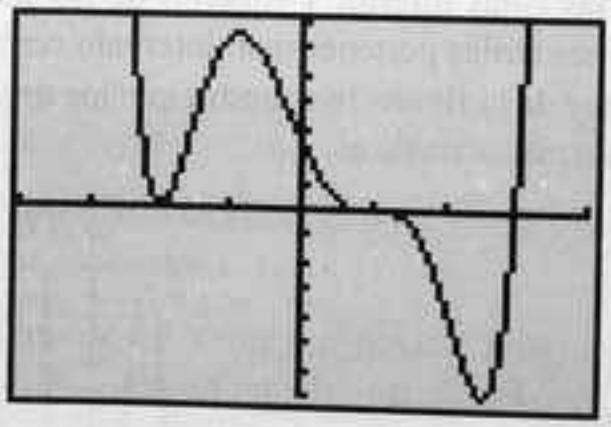


FIGURA 17 [–4, 4] por [–35, 35]

Por lo tanto, una forma factorizada de f es

$$f(x) = a(x + 2)^m(x - 1)^n(x - 3)^1.$$

Como buscamos la función con grado mínimo, hacemos $m = 2$ y $n = 3$ y obtenemos

$$f(x) = a(x + 2)^2(x - 1)^3(x - 3),$$

que es un polinomio de sexto grado.

www.elsolucionario.net

b) Si el coeficiente inicial de f debe ser 1, entonces, por el teorema de factorización completa para polinomios, sabemos que el valor de a es 1. A fin de hallar la intersección y igualamos x a 0 y calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 1(0+2)^2(0-1)^3(0-3) = 1(4)(-1)(-3) = 12$$

En consecuencia, la intersección en y es el punto $(0, 12)$.

EJEMPLO 7 *Exploración de la gráfica de un polinomio*

Encuentra los ceros de $f(x) = x^3 - 1000x^2 - x + 1000$.

Solución En el ejemplo 13 del apéndice I damos algunas secuencias de tecleo para la calculadora graficadora TI-82. Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla predefinida con objeto de obtener la figura 18. Es evidente que 1 es una raíz de f, lo cual demostramos mediante división sintética:

1	1	−1000	−1	1000
		1	−999	−1000
	1	−999	−1000	0

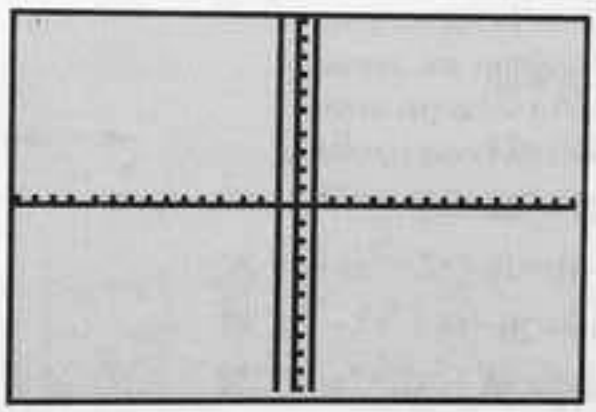


FIGURA 18 [−15, 15] por [−10, 10]

Con la **ecuación reducida,** $x^2 - 999x - 1000 = 0$, también podemos probar que −1 es una raíz de f:

−1	1	−999	−1000
		−1	1000
	1	−1000	0

De la última división sintética vemos que $x - 1000$ es un factor de f y, por lo tanto, la raíz tercera es 1000.

Debido a las magnitudes relativas de las raíces 1 y 1000, es muy difícil obtener una pantalla que exhiba los tres ceros; sin embargo, comprimiendo verticalmente la gráfica de f obtendremos una curva de f que muestre sus ceros y puntos de inflexión. Tras algunos intentos de prueba y error

www.elsolucionario.net

llegamos a la figura 19, donde hemos usado 10^{-7} como multiplicador de Y_1; esto es, $Y_2 = 10^{-7} Y_1$ (Xscl = 100, Yscl = 1).

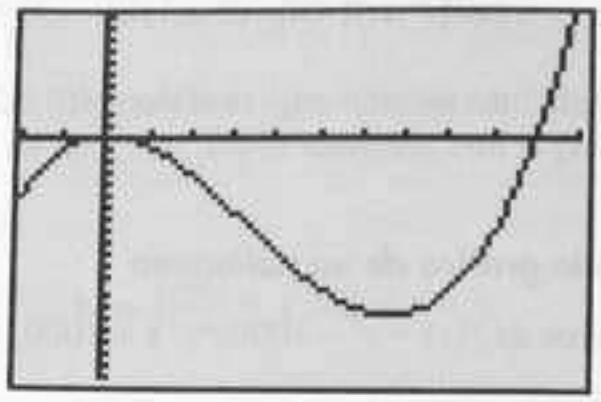


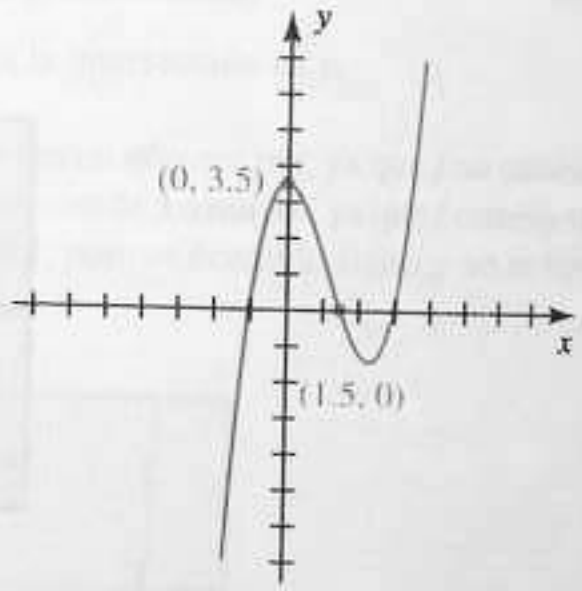
FIGURA 19 [–200, 1100] por [–20, 10]

4.3 EJERCICIOS

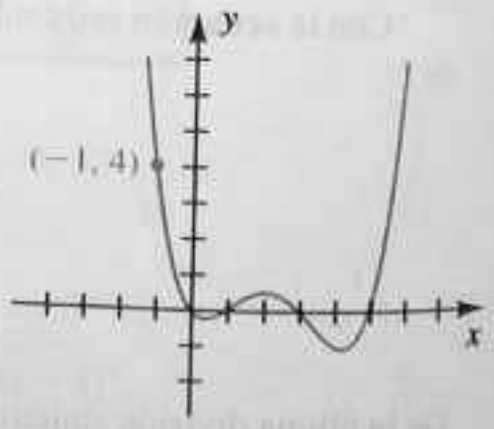
Ejercicios 1 al 6: encuentra un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga los ceros indicados y satisfaga la condición dada.

1. $-1, 2, 3$; $f(-2) = 80$
2. $-5, 2, 4$; $f(3) = -24$
3. $-4, 3, 0$; $f(2) = -36$
4. $-3, -2, 0$; $f(-4) = 16$
5. $-2i, 2i, 3$; $f(1) = 20$
6. $-3i, 3i, 4$; $f(-1) = 50$

7. Halla un polinomio $f(x)$ de cuarto grado con coeficiente inicial 1 tal que –4 y 3 sean ceros de multiplicidad 2 y traza la gráfica de f.
8. Encuentra un polinomio $f(x)$ de cuarto grado con coeficiente inicial 1 tal que –5 y 2 sean ceros de multiplicidad 2 y traza la gráfica de f.
9. Halla un polinomio $f(x)$ de sexto grado tal que 0 y 3 sean ceros de multiplicidad 3 y $f(2) = -24$. Traza la gráfica de f.
10. Encuentra un polinomio $f(x)$ de séptimo grado tal que –2 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, 0 es un cero de multiplicidad 3 y $f(-1) = 27$. Traza la gráfica de f.
11. Halla la función polinomial de tercer grado cuya gráfica se muestra en la figura.
12. Encuentra la función polinomial de cuarto grado cuya gráfica se presenta en la figura.



EJERCICIO 11

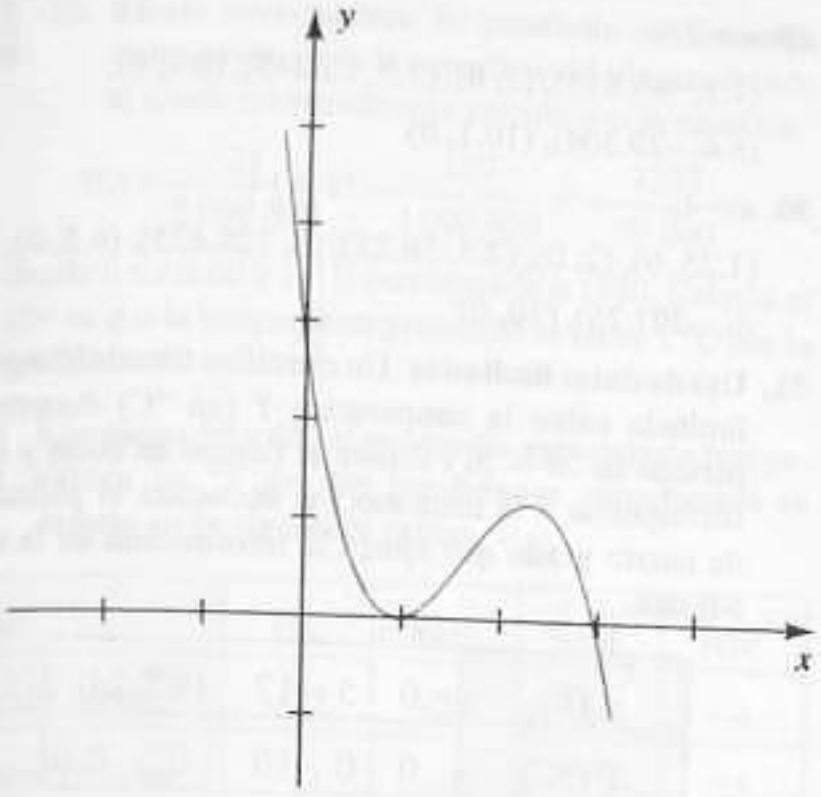


EJERCICIO 12

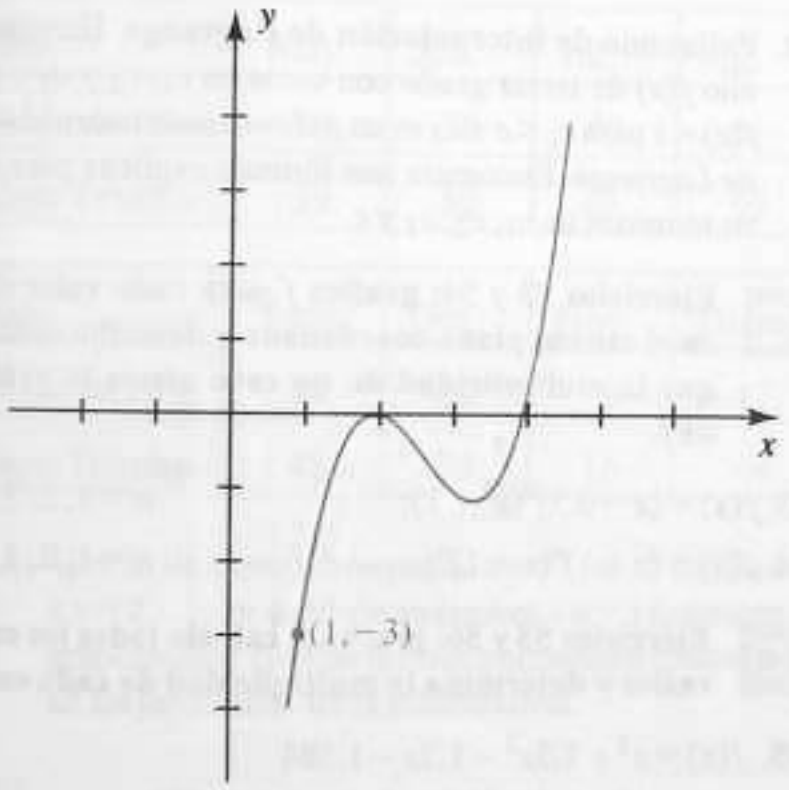
Ejercicios 13 y 14: halla la función polinomial de tercer grado cuya gráfica aparece en la figura.

www.elsolucionario.net

13.



14.



Ejercicios 15 al 22: encuentra los ceros de $f(x)$ y expresa la multiplicidad de cada cero.

15. $f(x) = x^2(3x + 2)(2x - 5)^3$
16. $f(x) = x(x + 1)^4(3x - 7)^2$
17. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$
18. $f(x) = (4x^2 - 5)^2$
19. $f(x) = (x^2 + x - 12)^3(x^2 - 9)^2$
20. $f(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$
21. $f(x) = x^4 + 7x^2 - 144$
22. $f(x) = x^4 + 21x^2 - 100$

Ejercicios 23 al 26: demuestra que el número es un cero de $f(x)$ de la multiplicidad dada y expresa $f(x)$ como producto de factores lineales.

23. $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$; −3 (multiplicidad 2)
24. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$; 4 (multiplicidad 2)
25. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$; 1 (multiplicidad 5)
26. $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$; −1 (multiplicidad 4)

Ejercicios 27 al 34: usa la regla de Descartes para determinar el número de soluciones complejas positivas, negativas y no reales de la ecuación.

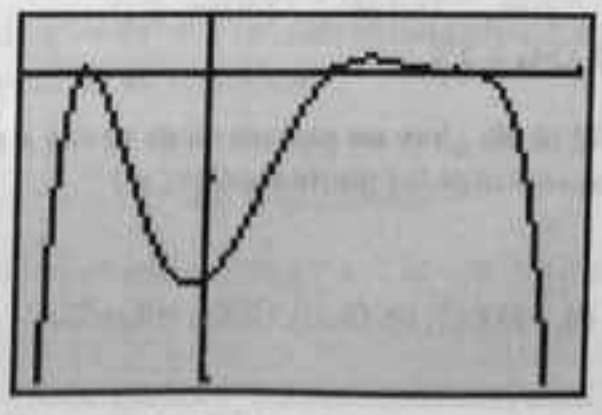
27. $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$
28. $5x^3 - 6x - 4 = 0$
29. $4x^3 + 2x^2 + 1 = 0$
30. $3x^3 - 4x^2 + 3x + 7 = 0$
31. $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$
32. $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$
33. $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x + 2 = 0$
34. $2x^6 + 5x^5 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

C **Ejercicios 35 al 40: aplica el teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios con objeto de establecer los mínimos y máximos enteros que sean cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación. Analiza la validez de las cotas con una calculadora graficadora.**

35. $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$
36. $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$
37. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6 = 0$
38. $2x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$
39. $2x^5 - 13x^3 + 2x - 5 = 0$
40. $3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7 = 0$

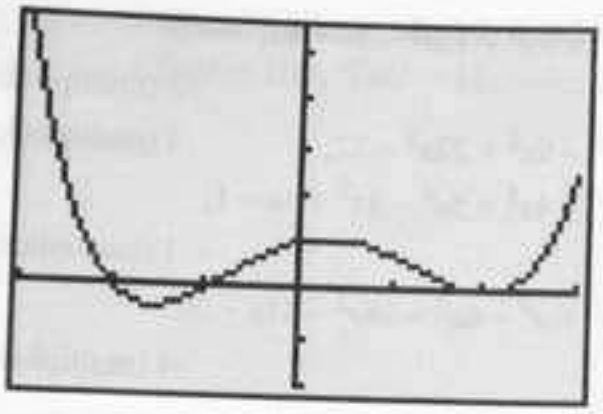
Ejercicios 41 y 42: halla una forma factorizada para una función polinomial f de grado mínimo. Imagina que los valores de intersección son enteros y que Xscl = Yscl = 1.

41.



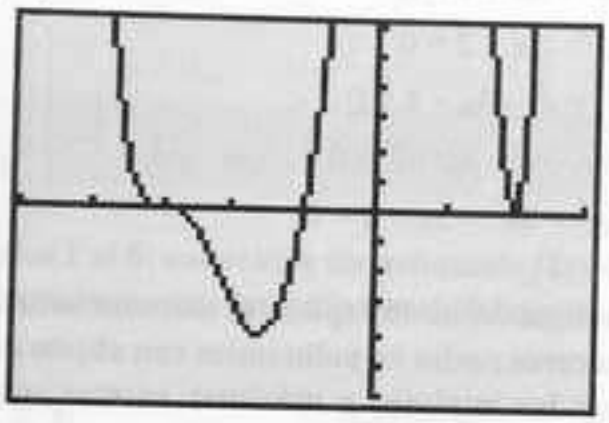
www.elsolucionario.net

42.

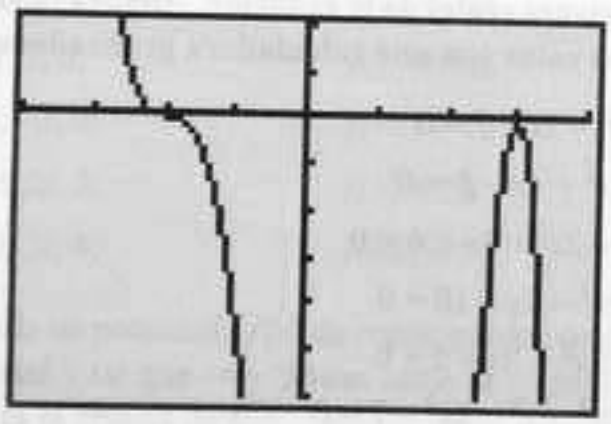


Ejercicios 43 y 44: a) halla una forma factorizada de una función polinomial f de grado mínimo. Imagina que los valores de intersección son enteros Xscl = 1 y Yscl = 5. b) Si el coeficiente inicial de f es a, encuentra la intersección y.

43. $a = 1$



44. $a = -1$



Ejercicios 45 y 46: la función polinomial f tiene sólo ceros reales; factorízala mediante la gráfica de f.

45. $f(x) = x^5 - 16.75x^3 + 12.75x^2 + 49.5x - 54$

46. $f(x) = x^5 - 2.5x^4 - 12.75x^3 + 19.625x^2 + 27.625x + 7.5$

Ejercicios 47 al 50: ¿hay un polinomio de grado n dado cuya gráfica contenga los puntos indicados?

47. $n = 4$;

$(-2, 0), (0, -24), (1, 0), (3, 0), (2, 0), (-1, -52)$

48. $n = 5$;

$(0, 0), (-3, 0), (-1, 0), (2, 0), (3, 0), (-2, 5), (1, 2)$

49. $n = 3$;

$(1.1, -49.815), (2, 0), (3.5, 25.245), (5.2, 0), (6.4, -29.304), (10.1, 0)$

50. $n = 4$;

$(1.25, 0), (2, 0), (2.5, 56.25), (3, 128.625), (6.5, 0), (9, -307.75), (10, 0)$

51. Uso de datos limitados Un científico tiene información limitada sobre la temperatura T (en °C) durante un periodo de 24 h. Si t denota el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche, encuentra el polinomio de cuarto grado que ajusta la información en la tabla adjunta.

t (h)	0	5	12	19	24
T (°C)	0	0	10	0	0

52. Polinomio de interpolación de Lagrange Un polinomio $f(x)$ de tercer grado con ceros en c_1, c_2 y c_3 y con $f(c) = 1$ para $c_2 < c < c_3$ es un *polinomio de interpolación de Lagrange*. Encuentra una fórmula explícita para $f(x)$ en términos de c_1, c_2, c_3 y c.

Ejercicios 53 y 54: grafica f para cada valor de n en el mismo plano coordenado y describe cómo es que la multiplicidad de un cero afecta la gráfica de f.

53. $f(x) = (x - 0.5)^n(x^2 + 1)$; $n = 1, 2, 3, 4$

54. $f(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$; $n = 1, 2, 3, 4$

Ejercicios 55 y 56: grafica f, calcula todos los ceros reales y determina la multiplicidad de cada cero.

55. $f(x) = x^3 + 1.3x^2 - 1.2x - 1.584$

56. $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{8}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{405}{256}x + \frac{675}{1024}$

57. Efecto invernadero Debido a la combustión de combustibles fósiles, la concentración de bióxido de carbono en la atmósfera está aumentando. Las investigaciones indican que esto se manifestará en un *efecto invernadero* que modificará el promedio de temperatura de la superficie del planeta. Si el uso del carbón aumenta de modo importante, la cantidad futura $A(t)$ de la concentración de bióxido de carbono atmosférico puede calcularse (en partes por millón) mediante la ecuación

$$A(t) = -\frac{1}{2400}t^3 + \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{6}t + 340,$$

donde t es en años, $t = 0$ corresponde a 1980 y $0 \le t \le 60$. Con la gráfica de A calcula el año en que la concentración de bióxido de carbono sea de 400.

www.elsolucionario.net

C **58. Efecto invernadero** El promedio del aumento de temperatura de la superficie del planeta debido al efecto invernadero se calcula con la ecuación

$$T(t) = \frac{21}{5\,000\,000}t^3 - \frac{127}{1\,000\,000}t^2 + \frac{1293}{50\,000}t,$$

donde $0 \le t \le 60$ y $t = 0$ corresponde a 1980. Calcula el año en que la temperatura promedio se eleve 1 °C con la gráfica de T.

C **Ejercicios 59 y 60: el promedio mensual de temperatura en °F de dos localidades canadienses se detalla en la siguiente tabla.**

Mes	En.	Feb.	Mar.	Abr.
Bahía Ártica	−22	−26	−18	−4
Lago Trucha	−11	−6	7	25

Mes	May.	Jun.	Jul.	Ag.
Bahía Ártica	19	36	43	41
Lago Trucha	39	52	61	59

Mes	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
Bahía Ártica	28	12	−8	−17
Lago Trucha	48	34	16	−4

a) Si el 15 de enero corresponde a $x = 1$, el 15 de febrero a $x = 2, \ldots,$ y el 15 de diciembre a $x = 12$, establece gráficamente cuál de los tres polinomios dados hace un mejor modelo de la información.

b) Usa el teorema del valor intermedio para calcular un intervalo para x cuando el promedio de temperatura es 0 °F.

c) Con tu elección de la parte a) estima x cuando la temperatura promedio sea 0 °F.

59. Temperaturas de Bahía Ártica

(1) $f(x) = -1.97x^2 + 28x - 67.95$

(2) $g(x) = -0.23x^3 + 2.53x^2 + 3.6x - 36.28$

(3) $h(x) = 0.089x^4 - 2.55x^3 + 22.48x^2 - 59.68x + 19$

60. Temperaturas del Lago Trucha

(1) $f(x) = -2.14x^2 + 28.01x - 55$

(2) $g(x) = -0.22x^3 + 1.84x^2 + 11.70x - 29.90$

(3) $h(x) = 0.064x^4 - 1.39x^3 + 11.81x^2 - 22.2x + 1.03$

C **Ejercicios 61 y 62: sabes que una esfera sólida de madera flotará, puesto que su densidad es menor que la del agua. Ahora bien, la profundidad d a que la esfera se hundirá está determinada por la ecuación**

$$\frac{4k}{3}\pi r^3 - \pi d^2 r + \frac{1}{3}\pi d^3 = 0,$$

donde r es el radio de la esfera y k es una constante positiva menor o igual que 1. Si $r = 6$ cm, estima d en forma gráfica para cada constante k.

61. Esfera de pino en agua $k = 0.7$

62. Esfera de roble en agua $k = 0.85$

C **63. Consulta los ejercicios 61 y 62** El agua tiene un valor k de 1. Si una esfera de radio 6 posee el mismo valor k, ¿cuál es el valor resultante de d? Interpreta este resultado.

4.4 Ceros complejos y racionales de polinomios

El ejemplo 3 de la sección anterior expone un hecho importante sobre polinomios con coeficientes reales: los dos ceros complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ de $x^5 - 4x^4 + 13x^3$ son conjugados. La relación no es accidental, puesto que el próximo resultado general es verdadero.

Teorema sobre ceros de par conjugados de un polinomio

Si un polinomio $f(x)$ de grado $n > 1$ tiene coeficientes reales y si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es un cero complejo de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ también es un cero de $f(x)$.

Se deja una prueba como ejercicio para análisis al final del capítulo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1 *Determinación de un polinomio con ceros prescritos*

Encuentra un polinomio $f(x)$ de cuarto grado que tenga coeficientes reales y ceros $2 + i$ y $-3i$.

Solución Por el teorema de ceros de par conjugados de un polinomio, $f(x)$ también debe tener ceros $2 - i$ y $3i$. Aplicamos el teorema del factor y encontramos que $f(x)$ tiene estos factores:

$$x - (2 + i), \quad x - (2 - i), \quad x - (-3i), \quad x - (3i)$$

Al multiplicar estos cuatro factores obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x + 3i)(x - 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \qquad (*) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45. \end{aligned}$$

Advertirás que en (*) el símbolo i no aparece. Esto no es coincidencia puesto que si $a + bi$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, $a - bi$ también es un cero y podemos multiplicar los factores adjuntos de esta manera:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

En el ejemplo 1 tenemos $a = 2$ y $b = 1$, así que $-2a = -4$ y $a^2 + b^2 = 5$ y el factor cuadrático adjunto es $x^2 - 4x + 5$. Este factor cuadrático resultante siempre tendrá coeficientes reales, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema sobre la expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales y grado positivo n se puede expresar a manera de un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales tales que los factores cuadráticos sean irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 2 *Expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos*

Expresa $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ como un producto de

a) Polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

b) Polinomios lineales

Solución **a)** $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

$= (x^5 - 4x^3) + (x^2 - 4)$ agrupar términos

$= x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4)$ factorizar x^3

$= (x^3 + 1)(x^2 - 4)$ factorizar $(x^2 - 4)$

$= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2)$ factorizar como la suma de cubos y la diferencia de cuadrados

www.elsolucionario.net

Con la fórmula cuadrática, vemos que el polinomio $x^2 - x + 1$ tiene los ceros complejos

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

y, por lo tanto, es irreducible sobre $\mathbb{R}$. Así pues, la factorización deseada es

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2).$$

b) Dado que el polinomio $x^2 - x + 1$ de la parte **a)** posee ceros $\frac{1}{2} \pm (\sqrt{3}/2)i$, por el teorema del factor deducimos que el polinomio tiene factores

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \quad \text{y} \quad x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

Al sustituir en la factorización encontrada en la parte **a)**, llegamos a esta factorización completa en polinomios lineales:

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(x + 2)(x - 2).$$

Antes señalamos que —por lo general— es muy difícil encontrar los ceros de un polinomio de alto grado; pero si todos los coeficientes son enteros, hay un método para encontrar los ceros *racionales*, si existen. El método es una consecuencia de este resultado:

Teorema sobre ceros racionales de un polinomio

Si el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes *enteros* y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

(1) El numerador c del cero es un factor del término constante a_0

(2) El denominador d del cero es un factor del coeficiente inicial a_n

Como ayuda para enumerar los posibles ceros racionales, recuerda el cociente:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores del término constante } a_0}{\text{factores del coeficiente inicial } a_n}$$

El teorema sobre ceros racionales se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes racionales multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCDn de todos los coeficientes para obtener una ecuación con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3 *Demostración de la ausencia de ceros racionales en un polinomio*

Prueba que $f(x) = x^3 - 4x - 2$ no cuenta con ceros racionales. *(continúa)*

www.elsolucionario.net

Solución Si $f(x)$ tiene un cero racional c/d tal que c y d no tienen factores primos comunes, entonces, por el teorema sobre los ceros racionales de un polinomio, c es un factor del término constante -2 y, por lo tanto, es 2 o -2 (lo que se escribe ± 2) o ± 1. El denominador d es un factor del coeficiente inicial 1, así que es ± 1. De esta forma, las únicas posibilidades para c/d son

$$\frac{\pm 1}{\pm 1} \quad \text{y} \quad \frac{\pm 2}{\pm 1} \qquad \text{o bien, lo cual equivale} \pm 1 \quad \text{y} \quad \pm 2.$$

Al sustituir cada unos de estos números por x, obtenemos

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 1, \quad f(2) = -2 \quad \text{y} \quad f(-2) = -2$$

Dado que $f(\pm 1) \neq 0$ y $f(\pm 2) \neq 0$, deducimos que $f(x)$ no tiene ceros racionales.

En la solución del ejemplo que sigue supondremos que no se dispone de una calculadora graficadora. En el ejemplo 5 volveremos a trabajar el problema para demostrar la ventaja de usar dicho dispositivo.

EJEMPLO 4 *Determinación de las soluciones racionales de una ecuación*

Encuentra todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

Solución El problema equivale a hallar los ceros racionales del polinomio del lado izquierdo de la ecuación. Si c/d es un cero racional y c y d no tienen factor común, entonces c es un factor del término constante -8 y d es un factor del coeficiente inicial 3. Todas las opciones posibles aparecen en la tabla adjunta.

Opciones para el numerador c	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Opciones para el denominador d	$\pm 1, \pm 3$
Opciones para c/d	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3} \pm\frac{8}{3}$

Podemos reducir las opciones encontrando las cotas superior e inferior para las soluciones reales, pero no lo haremos aquí. Es necesario determinar cuál(es) de las opciones para c/d, si las hay, son ceros. Vemos por sustitución que ni 1 ni -1 son soluciones. Si dividimos sintéticamente entre $x + 2$, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Este resultado muestra que -2 es un cero. Además, la división sintética proporciona los coeficientes del cociente de la división del polinomio entre $x + 2$; en consecuencia, tenemos esta factorización del polinomio dado:

$$(x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

www.elsolucionario.net

Las soluciones restantes de la ecuación deben ser ceros del segundo factor, así que usamos ese polinomio a fin de comprobar las soluciones. *No usamos* el polinomio de la ecuación dada. (Observa que $\pm\frac{8}{3}$ ya no son candidatos puesto que el numerador debe ser un factor de 4.) Otra vez por prueba y error, encontramos que la división sintética entre $x + \frac{2}{3}$ da:

$$\begin{array}{r|cccc} -\frac{2}{3} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

Así pues, $-\frac{2}{3}$ también es un cero.

Con los coeficientes del cociente sabemos que los ceros restantes son soluciones de la ecuación $3x^2 + 6x - 6 = 0$. Al dividir ambos lados entre 3 llegamos a la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 2 = 0$. Por la fórmula cuadrática, esta ecuación tiene soluciones

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, el polinomio dado tiene dos raíces racionales, -2 y $-\frac{2}{3}$, y dos raíces irracionales, $-1 + \sqrt{3} \approx 0.732$ y $-1 - \sqrt{3} \approx -2.732$.

EJEMPLO 5 ***Determinación de las soluciones racionales de una ecuación***

Encuentra todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

Solución Asignamos el polinomio indicado a Y_1, escogemos la pantalla $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$ y obtenemos un trazo similar a la figura 20. La gráfica indica que -2 es una solución y que hay una solución en cada uno de los intervalos $(-3, -2)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Con base en el ejemplo 4 sabemos que los ceros racionales posibles son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8, \quad \pm\tfrac{1}{3}, \quad \pm\tfrac{2}{3}, \quad \pm\tfrac{4}{3}, \quad \pm\tfrac{8}{3}.$$

Concluimos que las únicas posibilidades son $-\frac{8}{3}$ en $(-3, -2)$, $-\frac{2}{3}$ en $(-1, 0)$ y $\frac{2}{3}$ en $(0, 1)$; por lo tanto, con referencia en la gráfica, hemos reducido el número de opciones para ceros de 16 a 3. La división sintética sirve ahora para establecer que las únicas soluciones racionales son -2 y $-\frac{2}{3}$.

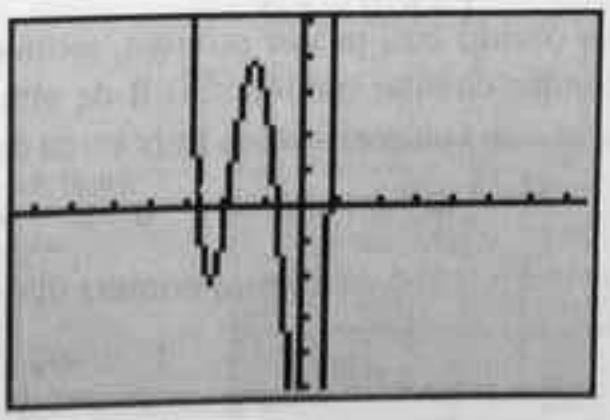


FIGURA 20 $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 6 *Determinación del radio de un silo*

Un silo tiene forma de cilindro circular recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 ft, encuentra el radio del cilindro que resulte en un volumen total de $1008\,\pi\,\text{ft}^3$.

Solución Sea x el radio del cilindro (Fig. 21). El volumen del cilindro es $\pi r^2 h = \pi x^2(30 - x)$, y el volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$; al despejar x se obtiene

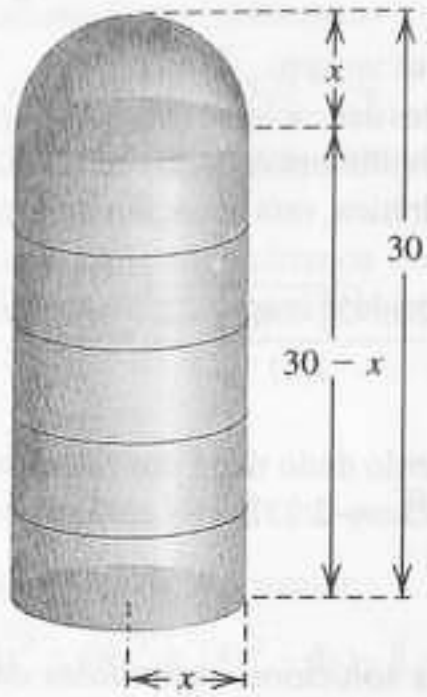


FIGURA 21

$$\pi x^2(30 - x) + \tfrac{2}{3}\pi x^3 = 1008\pi \qquad \text{el volumen total es } 1008\pi$$

$$3x^2(30 - x) + 2x^3 = 3024 \qquad \text{multiplicar por } \frac{3}{\pi}$$

$$90x^2 - x^3 = 3024 \qquad \text{simplificar}$$

$$x^3 - 90x^2 + 3024 = 0 \qquad \text{ecuación equivalente}$$

Puesto que el coeficiente inicial del polinomio del lado izquierdo de la última ecuación es 1, cualquier raíz racional tiene la forma $c/1 = c$, donde c es un factor de 3024. Si factorizamos 3024 en primos, $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Se deduce que algunos de los factores positivos de 3024 son

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 12,\quad \ldots$$

Para ayudarnos a decidir cuál probar primero, estimaremos el radio suponiendo que el silo tiene forma de un cilindro circular recto de 30 ft de altura. En este caso, el volumen sería $\pi r^2 h = 30\pi r^2$. Puesto que este volumen estaría muy cerca de 1008π, vemos que

$$30r^2 = 1008 \qquad \text{o} \qquad r^2 = 1008/30 = 33.6$$

Esto sugiere que usemos el 6 en nuestra primera división sintética:

6	1	−90	0	3024
		6	−504	−3024
	1	−84	−504	0

www.elsolucionario.net

De esta forma, 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$

Las dos soluciones restantes de la ecuación se encuentran resolviendo la ecuación reducida $x^2 - 84x - 504 = 0$. Estos ceros son aproximadamente -5.62 y 89.62, ninguno de los cuales satisface las condiciones del problema; por lo tanto, el radio deseado es 6 ft.

La gráfica de $f(x) = x^3 - 90x^2 + 3024$ de la figura 22 muestra el cero $x = 6$. Una gráfica extendida también indicaría los otros dos ceros.

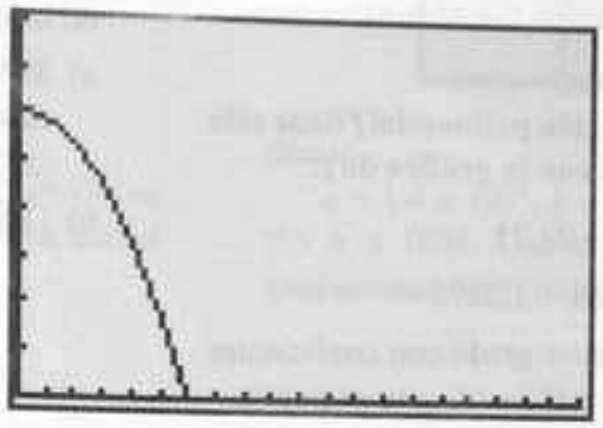


FIGURA 22 [0, 20] por [0, 4000]

4.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 10: un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales y coeficiente inicial 1 tiene cero(s) real(es) y grado dados. Expresa $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

1. $3 + 2i$; grado 2
2. $-4 + 3i$; grado 2
3. $2, -2 - 5i$; grado 3
4. $-3, 1 - 7i$; grado 3
5. $-1, 0, 3 + i$; grado 4
6. $0, 2, -2 - i$; grado 4
7. $4 + 3i, -2 + i$; grado 4
8. $3 + 5i, -1 - i$; grado 4
9. $0, -2i, 1 - i$; grado 5
10. $0, 3i, 4 + i$; grado 5

Ejercicios 11 al 14: demuestra que la ecuación no tiene raíz racional.

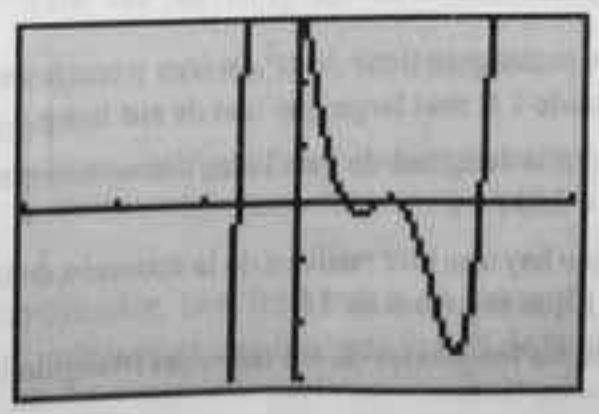
11. $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$
12. $3x^3 - 4x^2 + 7x + 5 = 0$
13. $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$
14. $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$

Ejercicios 15 al 24: halla todas las soluciones de la ecuación.

15. $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$
16. $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$
17. $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$
18. $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2 = 0$
19. $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56 = 0$
20. $3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$
21. $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$
22. $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x = 0$
23. $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27 = 0$
24. $3x^3 - x^2 + 11x - 20 = 0$

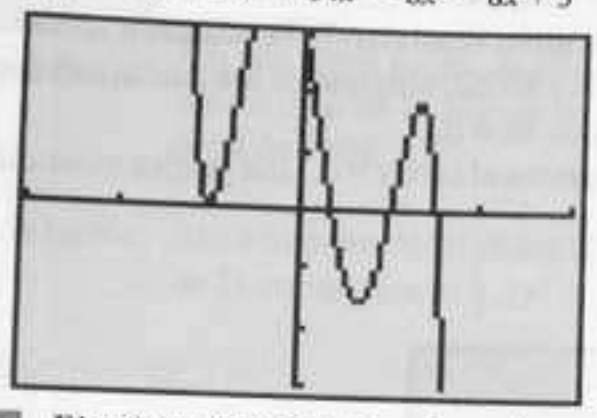
Ejercicios 25 y 26: encuentra una forma factorizada con coeficientes enteros del polinomio f de la figura. Supón que Xscl = Yscl = 1.

25. $f(x) = 6x^5 - 23x^4 + 24x^3 + x^2 - 12x + 4$



www.elsolucionario.net

26. $f(x) = -6x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 8x + 3$



C **Ejercicios 27 y 28: la función polinomial *f* tiene sólo ceros reales; factorízala con la gráfica de *f*.**

27. $f(x) = 2x^3 - 25.4x^2 + 3.02x + 24.75$

28. $f(x) = 0.5x^3 + 0.65x^2 - 5.365x + 1.5375$

29. ¿Existe un polinomio de tercer grado con coeficientes reales que tenga ceros 1, –1 e *i*? Justifica tu respuesta.

30. El polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$ tiene el número complejo *i* como un cero; sin embargo, el conjugado $-i$ de *i* no es cero. ¿Por qué este resultado contradice al teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio?

31. Si *n* es un entero positivo non, prueba que un polinomio de grado *n* con coeficientes reales tiene por lo menos un cero real.

32. Si un polinomio de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde cada a_k es un entero, tiene raíz racional *r*, prueba que *r* es un entero y es factor de a_0.

33. Construcción de una caja Se va a elaborar una caja sin tapa a partir de un cartón de 20 × 30 in, cortando cuadrados idénticos de área x^2 en cada esquina y doblando hacia arriba los lados (Ejer. 33, Sec. 4.1).

a) Demuestra que hay dos cajas con un volumen de 1000 in^3.

b) ¿Cuál caja tiene la menor área?

34. Construcción de una caja de embalaje Hay que construir el bastidor de una caja de embarques con 24 ft de madera de 2 × 2 in. Supón que la caja debe tener extremos cuadrados de *x* ft por lado y determina el o los valores de *x* que den un volumen de 4 ft^3 (Ejer. 34, Sec. 4.1).

35. Un triángulo rectángulo tiene 30 ft^2 de área y una hipotenusa que mide 1 ft más largo que uno de sus lados.

a) Si *x* denota la longitud de este lado, demuestra que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

b) Prueba que hay una raíz positiva de la ecuación de la parte **a)** y que es menor de 13.

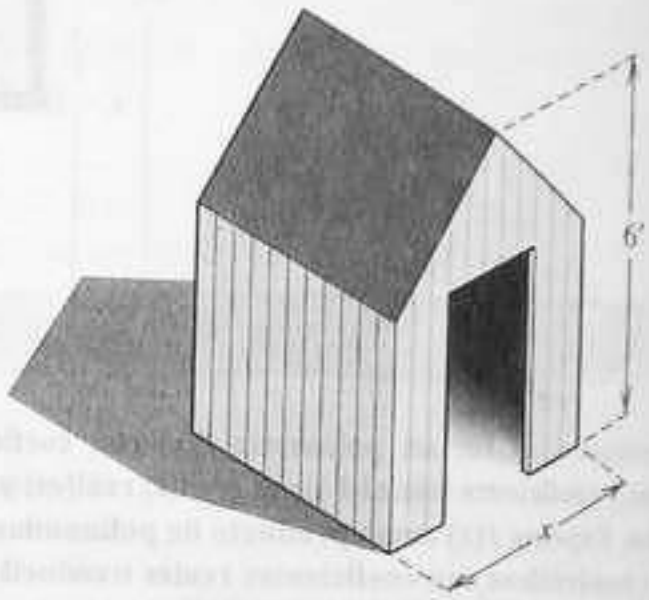
c) Encuentra las longitudes de los lados del triángulo.

36. Construcción de un tanque de almacenamiento Se fabricará un tanque de gas propano en forma de cilindro circular recto de 10 ft de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. Determina el radio *x* de modo que el volumen resultante sea 27π ft^3 (ve el Ejem. 8, Sec. 3.4).

37. Construcción de un cobertizo de almacenamiento Se va a construir un cobertizo en forma de cubo con un prisma triangular de techo (ve la figura); la longitud *x* de un lado del cubo todavía no se ha determinado.

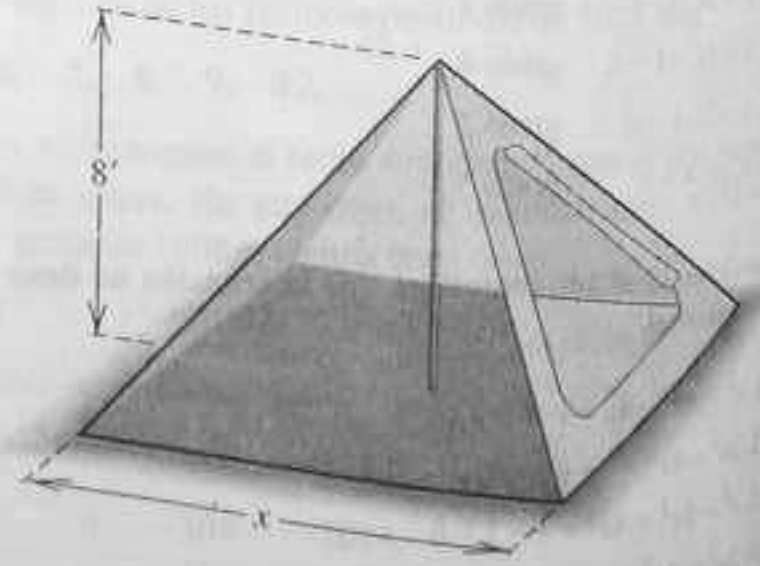
a) Si la altura total de la estructura ha de ser de 6 ft, demuestra que su volumen *V* está dado por $V = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.

b) Determina *x* de modo que el volumen sea de 80 ft^3.



EJERCICIO 37

38. Diseño de una tienda de campaña Se va a construir una tienda de campaña en forma de pirámide de base cuadrada con lonas, y un poste de 8 ft formará el soporte central (ve la figura). Encuentra la longitud *x* de un lado de la base, de modo que la cantidad total de lona necesaria para los lados y el fondo sea de 384 ft^2.



EJERCICIO 38

www.elsolucionario.net

Ejercicios 39 y 40: con una gráfica determina el número de soluciones no reales de la ecuación.

39. $x^5 + 1.1x^4 - 3.21x^3 - 2.835x^2 + 2.7x + 0.62 = -1$

40. $x^4 - 0.4x^3 - 2.6x^2 + 1.1x + 3.5 = 2$

Ejercicios 41 y 42: usa una gráfica y la división sintética para hallar todas las soluciones de la ecuación.

41. $x^4 + 1.4x^3 + 0.44x^2 - 0.56x - 0.96 = 0$

42. $x^5 + 1.1x^4 - 2.62x^3 - 4.72x^2 - 0.2x + 5.44 = 0$

43. Densidad atmosférica La densidad $D(h)$ (en kg/m^3) de la atmósfera de la Tierra a una altitud de h m se puede calcular mediante

$$D(h) = 1.2 - ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$a = 1.096 \times 10^{-4}$, $b = 3.42 \times 10^{-9}$, $c = 3.6 \times 10^{-14}$ y $0 \le h \le 30\,000$. Con la gráfica de D calcula la altura h a la que la densidad es de 0.4.

44. Densidad de la Tierra La densidad $D(h)$ (en g/cm^3) de la Tierra a h m bajo la superficie se calcula con la ecuación

$$D(h) = 2.84 + ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$a = 1.4 \times 10^{-3}$, $b = 2.49 \times 10^{-6}$, $c = 2.19 \times 10^{-9}$ y $0 \le h \le 1000$. Usa la gráfica de D para calcular la profundidad h a la que la densidad de la Tierra es 3.7.

4.5 Funciones racionales

Una función f es una **función racional** si

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de f está formado por todos los números reales, *excepto* los ceros del denominador $h(x)$.

ILUSTRACIÓN

Funciones racionales y sus dominios

- $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; *dominio:* toda x *excepto* $x = 2$
- $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$; *dominio*; toda x *excepto* $x = \pm 3$
- $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2+4}$; *dominio:* todos los números reales x

Al trazar la gráfica de una función racional f, es importante responder estas dos preguntas:

Pregunta 1 ¿Qué puede decirse de los valores de función $f(x)$ cuando x es casi (pero no igual) un cero del denominador?

Pregunta 2 ¿Qué puede decirse de los valores de función $f(x)$ cuando x es grande positiva o x es grande negativa?

Según veremos, si a es un cero del denominador, con frecuencia se presenta una de varias situaciones. Éstas se grafican en la figura 23, donde hemos usados notaciones de la tabla que sigue.

www.elsolucionario.net

Notación	Terminología
$x \to a^-$	x se aproxima a a desde la izquierda (a través de valores *menores* que a).
$x \to a^+$	x se acerca a a desde la derecha (a través de valores *mayores* que a).
$f(x) \to \infty$	$f(x)$ aumenta sin límite (puede volverse tan grande positiva como se desee).
$f(x) \to -\infty$	$f(x)$ disminuye en forma ilimitada (puede hacerse tan grande negativa como se desee)

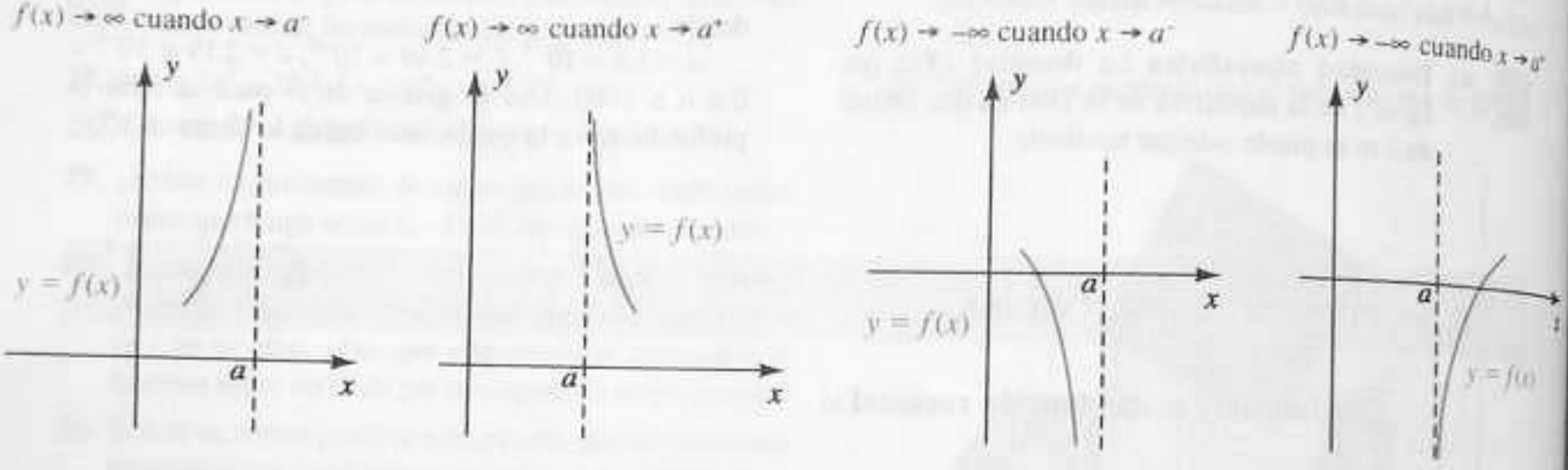


FIGURA 23

Los símbolos ∞ **(infinito)** y $-\infty$ **(menos infinito)** no representan números reales; tan sólo especifican ciertos tipos de comportamiento de funciones y variables.

La recta punteada $x = a$ de la figura 23 se llama *asíntota vertical*, igual que en esta definición:

Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to \infty \qquad \text{o} \qquad f(x) \to -\infty$$

a medida que x se aproxima a a ya sea desde la izquierda o la derecha.

Así, la respuesta a la pregunta 1 es que si a es un cero del denominador de una función racional f, la gráfica de f *puede* tener una asíntota vertical $x = a$. Hay funciones racionales donde éste *no es* el caso (como en el Ejem. 7 de esta Sec.). Si el numerador y el denominador no tienen factor común, entonces f *debe* tener una asíntota vertical $x = a$.

Consideremos a continuación la pregunta 2. Para x *grande positiva* o *grande negativa*, la gráfica de una función racional puede parecer como una de las de la figura 24, donde la notación

$$f(x) \to c \text{ a medida que } x \to \infty$$

se lee "$f(x)$ se aproxima a c a medida que x aumenta sin límite" y la notación

$$f(x) \to c \text{ a medida que } x \to -\infty$$

se lee "$f(x)$ se aproxima a c a medida que x disminuye sin límite".

www.elsolucionario.net

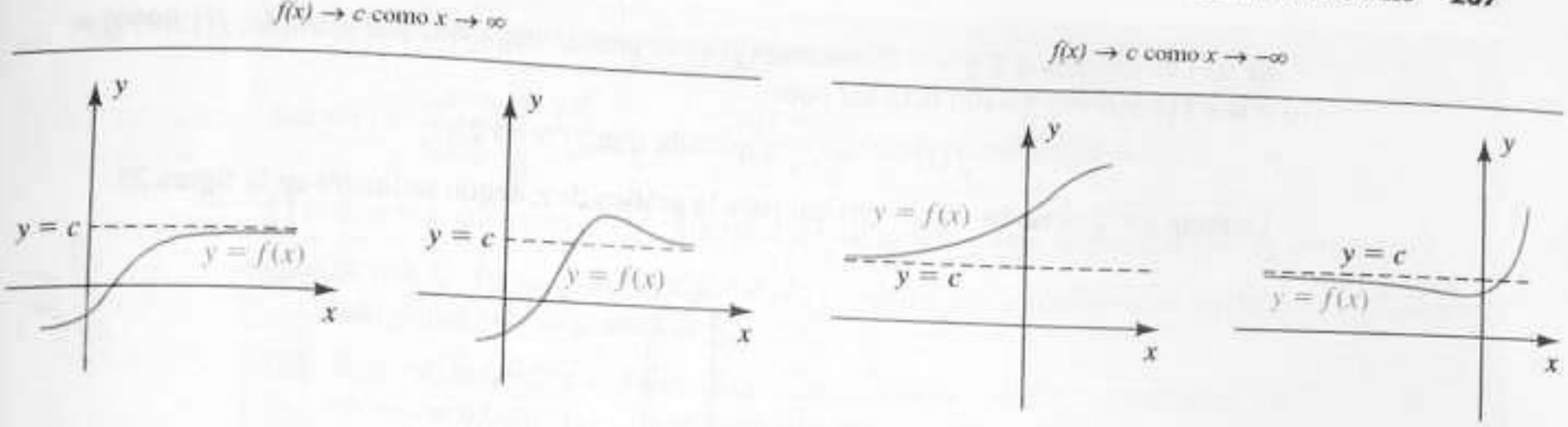


FIGURA 24

La recta punteada de la figura 24 recibe el nombre de *asíntota horizontal,* como en la siguiente definición.

Definición de asíntota horizontal

La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to c \qquad \text{a medida que} \qquad x \to \infty \qquad \text{o a medida que} \qquad x \to -\infty.$$

De esta forma, la respuesta a la pregunta 2 es que $f(x)$ *puede* ser muy cercana a algún número c cuando x es grande positiva o grande negativa; esto es, la gráfica de f puede tener una asíntota horizontal $y = c$. Hay funciones racionales donde éste *no es* el caso [como en los Ejems. 2c) y 6].

Observa que, al igual que en los dibujos segundo y cuarto de la figura 24, la gráfica de f puede cruzar una asíntota horizontal.

En próximo ejemplo encontramos las asíntotas de la gráfica de una función racional sencilla.

EJEMPLO 1 *Trazado de la gráfica de una función racional*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Solución Comencemos por considerar la pregunta 1, planteada al principio de esta sección. El denominador $x - 2$ es cero en $x = 2$. Si x es cercana a 2 y $x > 2$, entonces $f(x)$ es grande positiva, según se expone en la siguiente tabla.

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001
$\dfrac{1}{x-2}$	10	100	1000	10 000	100 000

Puesto que es factible aumentar $1/(x - 2)$ tanto como se quiera tomando x cercana a 2 (y $x > 2$), vemos que

$$f(x) \to \infty \qquad \text{a medida que} \qquad x \to 2^+. \qquad \textit{(continúa)}$$

www.elsolucionario.net

Si $f(x)$ es cercana a 2 y $x < 2$, entonces $f(x)$ es grande negativa; por ejemplo, $f(1.9999) = -10\,000$ y $f(1.99999) = -100\,000$; así pues,

$$f(x) \to -\infty \quad \text{a medida que} \quad x \to 2^-.$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f, según se ilustra en la figura 25.

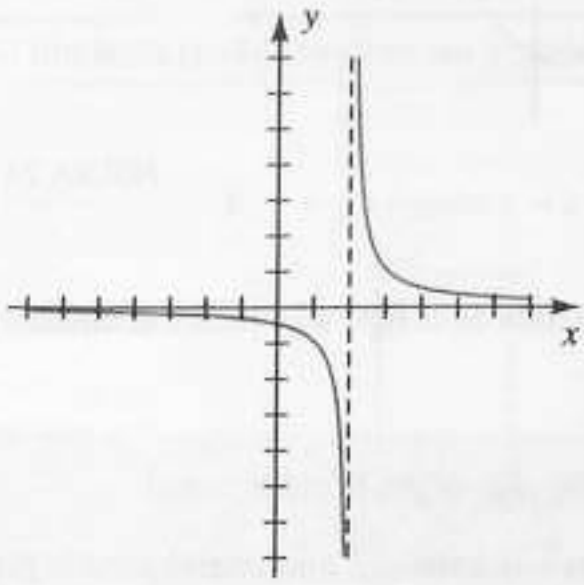


FIGURA 25

A continuación consideramos la pregunta 2. La tabla que sigue enumera algunos valores aproximados para $f(x)$ cuando x es grande y positiva.

x	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
$\frac{1}{x-2}$ **(aprox.)**	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001

Se puede describir este comportamiento de $f(x)$ escribiendo

$$f(x) \to 0 \quad \text{a medida que} \quad x \to \infty.$$

En forma análoga, $f(x)$ es cercana a 0 cuando x es grande negativa; por ejemplo, $f(-100\,000) = -0.00001$; así pues,

$$f(x) \to 0 \quad \text{a medida que} \quad x \to -\infty.$$

La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal (Fig. 25).

Trazar los puntos $(1, -1)$ y $(3, 1)$ ayuda a tener un esbozo de la gráfica.

La función considerada en el ejemplo 1, $f(x) = 1/(x - 2)$, similar a una de las funciones racionales más sencillas, la **función recíproca**. La función recíproca tiene ecuación $f(x) = 1/x$, asíntota vertical $x = 0$ (el eje y), y asíntota horizontal $y = 0$ (eje x). La gráfica de la función recíproca (Ap. II) es la gráfica de una *hipérbola* (Sec. 4.8). Observarás que es posible obtener la gráfica de $y = 1/(x - 2)$ desplazando dos unidades a la derecha la gráfica de $y = 1/x$.

El próximo teorema ayuda a encontrar la asíntota horizontal para la gráfica de una función racional.

www.elsolucionario.net

Teorema sobre asíntotas horizontales

Sea $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde $a_n \neq 0$ y $b_k \neq 0$.

(1) Si $n < k$, entonces el eje x (la recta $y = 0$) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

(2) Si $n = k$, entonces la recta $y = a_n/b_k$ (cociente entre coeficientes iniciales) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

(3) Si $n > k$, la gráfica de f carece de asíntota horizontal. En lugar de ello: $f(x) \to \infty$ o bien $f(x) \to -\infty$ a medida que $x \to \infty$ o conforme $x \to -\infty$

Las pruebas para cada parte del teorema son ajustables a las soluciones del ejemplo adjunto. En relación con la parte (3), si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir el numerador entre el denominador, entonces $f(x) \to \infty$ si $q(x) \to \infty$ o bien $f(x) \to -\infty$ si $q(x) \to -\infty$.

EJEMPLO 2 *Determinación de asíntotas horizontales*

Encuentra la asíntota horizontal para la gráfica de f, si existe.

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$ **b)** $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1}$

Solución **a)** El grado del numerador, 1, es menor que el grado del denominador, 2, así que por la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es una asíntota horizontal. Para comprobar esto directamente, dividimos el numerador y el denominador del cociente entre x^2 (ya que 2 es la potencia más alta en x en el denominador), con lo que resulta

$$f(x) = \frac{\dfrac{3x-1}{x^2}}{\dfrac{x^2-x-6}{x^2}} = \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}} \text{ para } x \neq 0.$$

Si x es grande positiva o grande negativa, entonces $3/x$, $1/x^2$, $1/x$ y $6/x^2$ son cercanos a 0 y, por lo tanto,

$$f(x) \approx \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

En consecuencia, $f(x) \to 0$ a medida que $x \to \infty$ o conforme $x \to -\infty$.

Dado que $f(x)$ es la coordenada y de un punto de la gráfica, la última expresión significa que la recta $y = 0$ (esto es, el eje x) es una asíntota horizontal.

b) Si $f(x) = (5x^2 + 1)/(3x^2 - 4)$, el numerador y el denominador tienen el mismo grado, 2, y los coeficientes iniciales son 5 y 3, respectivamente. En consecuencia, por la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal. También podríamos demostrar

www.elsolucionario.net

que $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal al dividir el numerador y el denominador de $f(x)$ entre x^2, como en la parte **a)**.

c) El grado del numerador, 4, es mayor que el grado del denominador, 2, así que, por la parte (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, la gráfica carece de asíntota horizontal. Si usamos división larga obtenemos

$$f(x) = 2x^2 - 5 + \frac{10}{x^2 + 1}.$$

A medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el cociente $2x^2 - 5$ aumenta sin límite y $10/(x^2 + 1) \to 0$; por lo tanto, $f(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ o a medida que $x \to -\infty$.

A continuación damos algunas guías para trazar la gráfica de una función racional. Su uso se ilustra en los ejemplos 3 y 4.

Guías para trazar la gráfica de una función racional

Supongamos que $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios sin factor común.

(1) Encontrar las intersecciones en x —esto es, los ceros reales del numerador $g(x)$— y trazar los puntos correspondientes en el eje x.

(2) Hallar los ceros reales del denominador $h(x)$. Para cada cero real a, trazar la asíntota vertical $x = a$ con línea punteada.

(3) Determinar la intersección en y $f(0)$, si existe, y trazar el punto $(0, f(0))$ en el eje y.

(4) Aplicar el teorema sobre asíntotas horizontales. Si hay una asíntota horizontal $y = c$, trazarla con línea punteada.

(5) Si hay una asíntota horizontal $y = c$, determinar si corta la gráfica. Las coordenadas x de los puntos de intersección son soluciones de la ecuación $f(x) = c$. Trazar estos puntos, si existen.

(6) Gráficar f en cada una de las regiones del plano xy definido por las asíntotas verticales de la guía 2. Si es necesario, usar el signo de valores de función específicos a fin de señalar si la gráfica está arriba o abajo del eje x o de la asíntota horizontal. Usar la guía 5 para decidir si la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal desde arriba o desde abajo.

En los siguientes ejemplos nuestro objetivo principal es establecer la forma general de la gráfica, poniendo especial atención en la forma en que la gráfica se aproxima a las asíntotas. Trazaremos sólo unos cuantos puntos, como los correspondientes a las intersecciones en x e intersecciones en y o la intersección de la gráfica con una asíntota horizontal.

EJEMPLO 3 *Trazado de la gráfica de una función racional*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}.$$

www.elsolucionario.net

Solución Es útil factorizar tanto el numerador como el denominador; así, comenzamos por escribir

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

A continuación seguimos las guías.

Guía 1 Para encontrar las intersecciones x hallamos los ceros del numerador. Resolvemos $x-1=0$ y tenemos $x=1$, luego trazamos el punto $(1, 0)$ en el eje x (Fig. 26).

Guía 2 El denominador tiene ceros -2, 3; por lo tanto, las rectas $x=-2$ y $x=3$ son asíntotas verticales; las trazamos con líneas punteadas (Fig. 26).

Guía 3 La intersección y es $f(0)=\frac{1}{6}$, y trazamos el punto $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ en la figura 26.

Guía 4 El grado del numerador de $f(x)$ es menor que el grado del denominador, así que por la parte 1 del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es la asíntota horizontal.

Guía 5 Los puntos en donde la gráfica corta la asíntota horizontal (el eje x) encontrada en la guía 4 corresponde a las intersecciones. Ya trazamos el punto $(1, 0)$ en la guía 1.

Guía 6 Las asíntotas verticales de la figura 26 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1, a la izquierda de $x=-2$

R_2, entre $x=-2$ y $x=3$

R_3, a la derecha de $x=3$

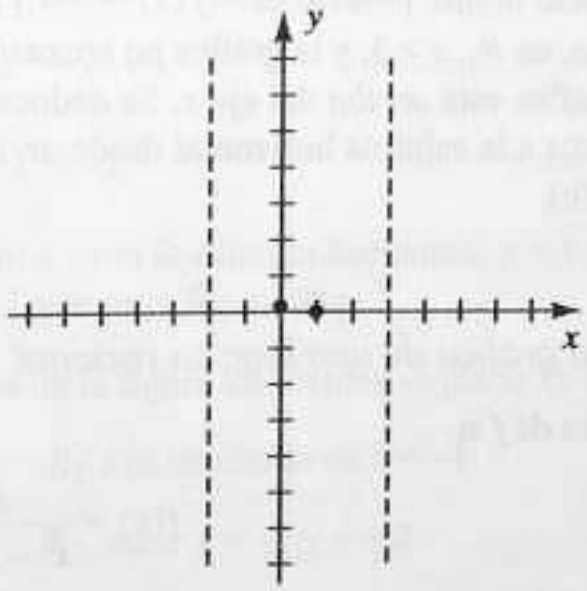


FIGURA 26

Para R_1, tenemos $x<-2$. Sólo hay dos opciones para la forma de la gráfica de f en R_1: a medida que $x \to -\infty$, la gráfica se aproxima al eje x por arriba o por abajo. A fin de establecer cuál opción es correcta, examinaremos el *signo* del valor de una función característica en R_1. Escogemos -10 para x, usamos la forma factorizada de $f(x)$ para encontrar el signo de $f(-10)$ (este proceso es semejante al usado en la Sec. 2.7):

$$f(-10) = \frac{(-)}{(-)(-)} = -$$

www.elsolucionario.net

El valor negativo de $f(-10)$ indica que la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal desde *abajo* a medida que $x \to -\infty$. Además, conforme $x \to -2^-$, la gráfica se extiende *hacia abajo* [—esto es— $f(x) \to -\infty$.] En la figura 27a) se presenta un trazo de f en R_1.

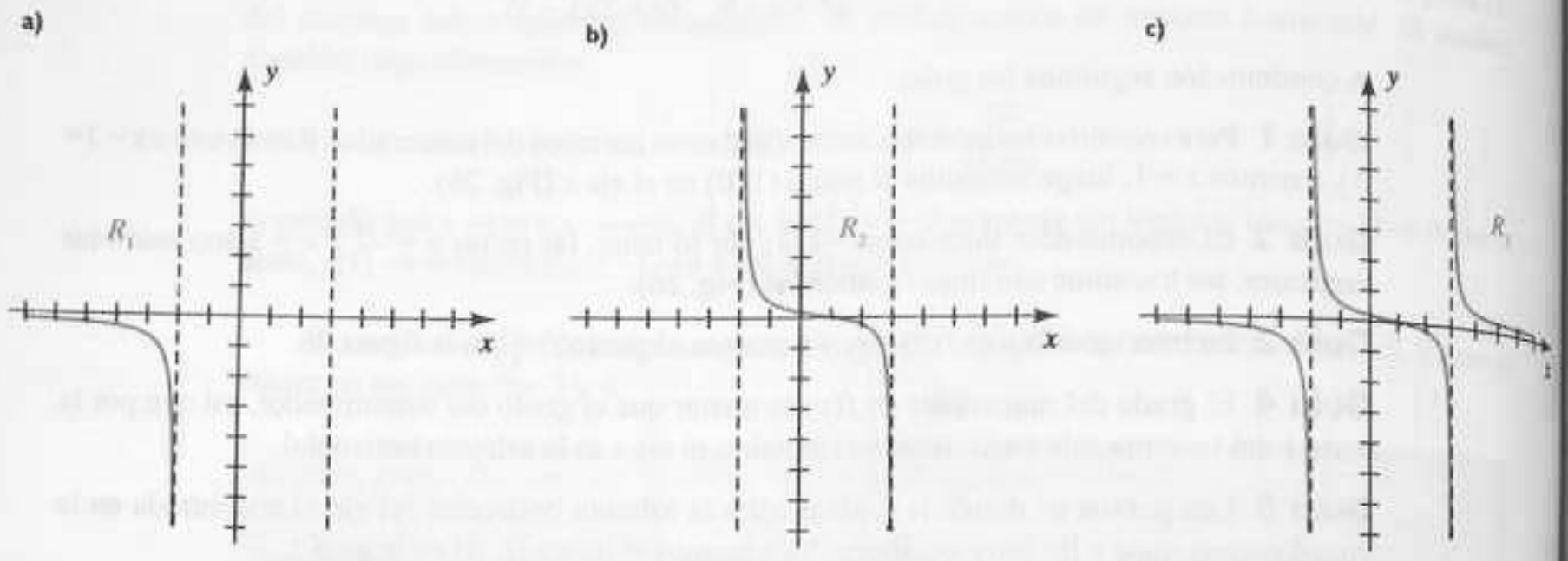


FIGURA 27

En R_2, tenemos $-2 < x < 3$ y la gráfica cruza el eje x en $x = 1$. Puesto que $f(0)$ es positiva, se deduce que la gráfica se encuentra *arriba* del eje x si $-2 < x < 1$. Así, a medida que $x \to -2^+$, la gráfica se extiende *hacia arriba* [esto es, $f(x) \to \infty$]. Dado que $f(2)$ se puede mostrar como negativa, la gráfica se encuentra *abajo* del eje x si $1 < x < 3$; en consecuencia, a medida que $x \to 3^-$, la gráfica se extiende *hacia abajo*. [—esto es— $f(x) \to -\infty$.] En la figura 27b) aparece un trazo de f en R_2.

Por último, en R_3, $x > 3$, y la gráfica no cruza el eje x. En vista de que $f(10)$ se puede mostrar positiva, la gráfica está *arriba* del eje x. Se deduce que $f(x) \to \infty$ a medida que $x \to 3^+$ y que la gráfica se acerca a la asíntota horizontal desde *arriba* conforme $x \to \infty$. La gráfica de f se dibuja en la figura 27c).

EJEMPLO 4 *Trazado de la gráfica de una función racional*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}.$$

Solución Al factorizar el denominador obtenemos

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}.$$

De nuevo seguimos las guías.

Guía 1 Para hallar las intersecciones en x encontramos los ceros del numerador. Resolvemos $x^2 = 0$, con lo cual $x = 0$, y trazamos el punto $(0, 0)$ en el eje x (Fig. 28).

Guía 2 El denominador tiene ceros -1 y 2; por lo tanto, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales y las trazamos con líneas punteadas (Fig. 28).

www.elsolucionario.net

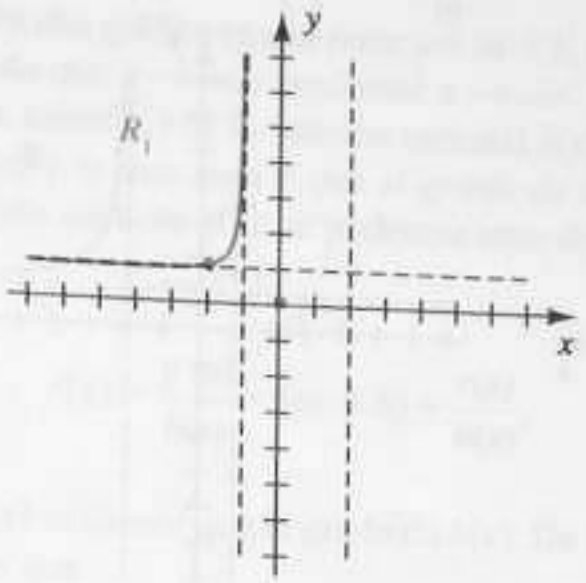


FIGURA 28

Guía 3 La intersección en y es $f(0) = 0$. Esto nos da el mismo punto (0, 0) de la guía 1.

Guía 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado y ambos coeficientes iniciales son 1; por lo tanto, por la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{1}{1} = 1$ es una asíntota horizontal. Trazamos la recta con líneas punteadas (Fig. 28).

Guía 5 Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica corta la asíntota horizontal $y = 1$ son soluciones de la ecuación $f(x) = 1$. Resolvemos esta ecuación:

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 \qquad \text{sea } f(x) = 1$$

$$x^2 = x^2 - x - 2 \qquad \text{multiplicar por } x^2 - x - 2$$

$$x = -2 \qquad \text{restar } x^2 \text{ y sumar } x$$

Este resultado indica que la gráfica corta la asíntota horizontal $y = 1$ *sólo* en $x = -2$; por lo tanto, trazamos el punto (–2, 1) al igual que en la figura 28.

Guía 6 Las asíntotas verticales de la figura 28 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1, a la izquierda de $x = -1$

R_2, entre $x = -1$ y $x = 2$

R_3, a la derecha de $x = 2$

Para R_1, consideremos primero la porción de la gráfica que corresponde a $-2 < x < -1$. Desde el punto (–2, 1) en la asíntota horizontal, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* a medida que $x \to -1^-$ (no se puede extender hacia abajo porque no hay intersección x entre $x = -2$ y $x = -1$). Conforme $x \to -\infty$, habrá un punto bajo en la gráfica entre $y = 0$ y $y = 1$ y luego la gráfica se aproximará a la asíntota horizontal $y = 1$ desde *abajo*. Es difícil ver dónde se presenta el punto bajo en la figura 28 porque los valores de función están muy cercanos entre sí. Mediante cálculo es posible demostrar que el punto bajo es $\left(-4, \frac{8}{9}\right)$.

En R_2, tenemos $-1, < x < 2$, y la gráfica corta al eje x en $x = 0$. Dado que la función no cruza la asíntota horizontal en esta región, sabemos que la gráfica se extiende *hacia abajo* a medida que $x \to -1^+$ y conforme $x \to 2^-$ [Fig. 29a)].

www.elsolucionario.net

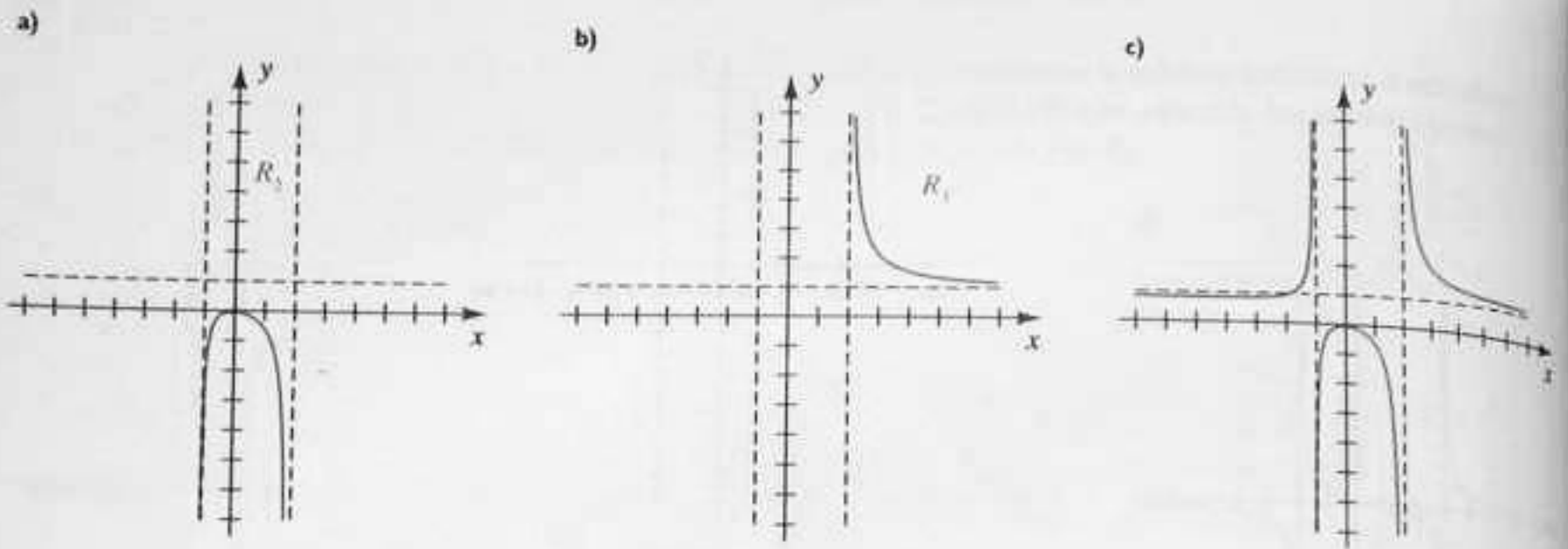


FIGURA 29

En R_3, la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$ (ya sea desde arriba o desde abajo) a medida que $x \to \infty$. Además, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* conforme $x \to 2^+$ porque no hay intersecciones x en R_3. Esto significa que a medida que $x \to \infty$, la gráfica se acerca a la asíntota horizontal desde *arriba* [Fig. 29b)].

La gráfica de f aparece en la figura 29c).

En las soluciones restantes no escribiremos formalmente cada una de las guías.

EJEMPLO 5 *Trazado de la gráfica de una función racional*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}.$$

Solución Observa que como $f(-x) = f(x)$, la función es par; así pues, la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

La gráfica corta al eje x en $(0, 0)$. En virtud de que el denominador de $f(x)$ no tiene cero real, la gráfica carece de asíntota vertical.

El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado. Dado que los coeficientes iniciales son 2 y 1, la recta $y = \frac{2}{1} = 2$ es la asíntota horizontal. La gráfica no cruza la asíntota horizontal $y = 2$ porque la ecuación $f(x) = 2$ no tiene solución real.

Trazar los puntos $(1, 1)$ y $\left(2, \frac{32}{17}\right)$ y aplicar simetría nos lleva al dibujo de la figura 30.

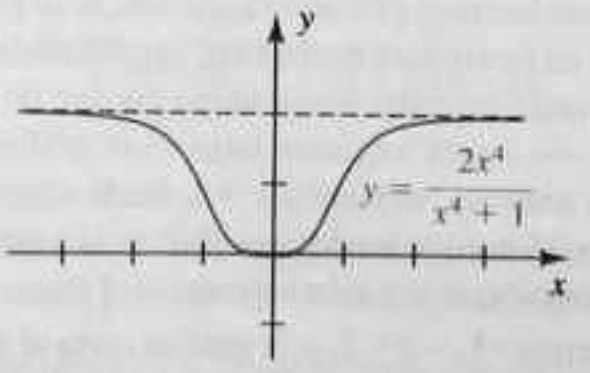


FIGURA 30

www.elsolucionario.net

Una **asíntota oblicua** para una gráfica es una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, tal que la gráfica se aproxima a esta recta a medida que $x \to \infty$ o conforme $x \to -\infty$. (Si la gráfica es una recta, la consideramos como su propia asíntota.) Si la función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ para polinomios $g(x)$ y $h(x)$ y *si el grado de* $g(x)$ *es uno mayor que el grado de* $h(x)$, la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para hallar esta asíntota oblicua podemos usar división larga a fin de expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$. De la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales sabemos que

$$\frac{r(x)}{h(x)} \to 0 \text{ a medida que } x \to \infty \text{ o conforme } x \to -\infty.$$

En consecuencia, $f(x)$ se aproxima a la recta $y = ax + b$ a medida que x aumenta o disminuye sin límite; esto es, $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.

EJEMPLO 6 *Determinación de una asíntota oblicua*

Encuentra todas las asíntotas y traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}.$$

Solución Una asíntota vertical se presenta en $2x - 4 = 0$ (o sea, si $x = 2$).

El grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el grado del denominador; por lo tanto, de acuerdo con (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, no hay asíntota *horizontal*; pero como el grado del numerador, 2, es *un* grado mayor que el grado del denominador, 1, la gráfica tiene una asíntota *oblicua*. Por división larga obtenemos

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x + 1 \\ \hline 2x - 4 & x^2 \quad -9 \\ & x^2 - 2x \qquad \left(\frac{1}{2}x\right)(2x - 4) \\ \hline & 2x - 9 \qquad \text{restar} \\ & 2x - 4 \qquad (1)(2x - 4) \\ \hline & -5 \qquad \text{restar} \end{array}$$

Así pues, $$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2x - 4}.$$

Según indicamos en el estudio anterior a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ aparecen con líneas punteadas en la figura 31.

www.elsolucionario.net

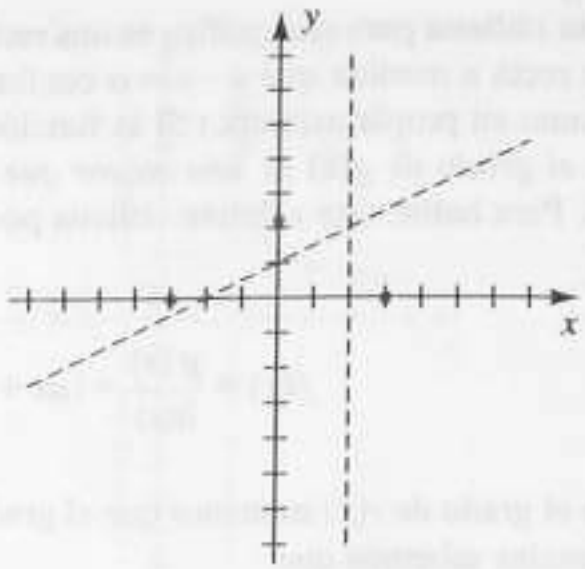


FIGURA 31

Las intersecciones en x de la gráfica son soluciones de $x^2 - 9 = 0$, por lo cual son 3 y –3. La intersección y es $f(0) = \frac{9}{4}$. Los puntos correspondientes aparecen en la figura 31. Ahora podemos demostrar que la gráfica tiene la forma indicada en la figura 32.

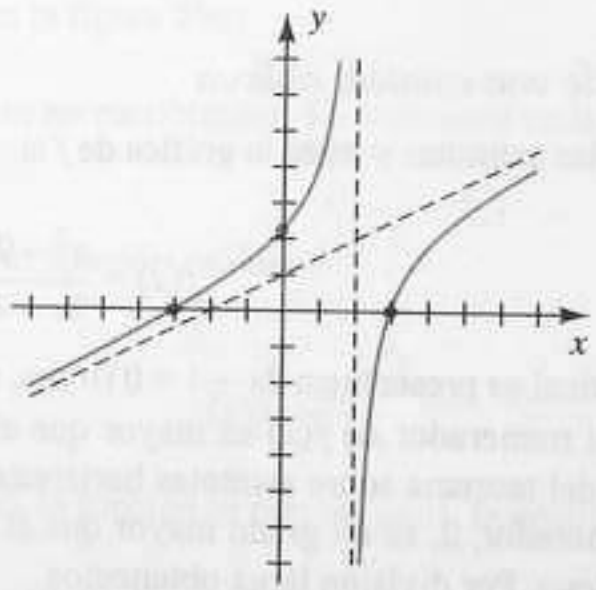


FIGURA 32

En el ejemplo 6, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ *asintóticamente* a medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Las gráficas de funciones racionales pueden acercarse asintóticamente a distintos tipos de curvas; por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{x^4 - x}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x},$$

entonces, para valores grandes de $|x|$, $1/x \approx 0$ y de aquí que $f(x) \approx x^2$. Por lo tanto, la gráfica de f se aproxima asintóticamente a la parábola $y = x^2$ a medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. En general, si $f(x) = g(x)/h(x)$ y $q(x)$ es el resultado de dividir $g(x)$ entre $h(x)$, la gráfica de f se aproxima asintóticamente a la gráfica de $y = q(x)$ a medida que $x \to \infty$ o que $x \to -\infty$.

En las guías para dibujar la gráfica de una función racional, suponemos que el numerador y el denominador no tienen factor primo común. *Si hay* un factor común, puede ser un *hueco* en la gráfica; es decir, quizá sólo falte punto, según se expone en este ejemplo:

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 7 *Trazado de la gráfica que contiene un hueco*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-2)(x-4)}.$$

Solución Si $x \neq 4$, se puede cancelar el factor $x - 4$; esto es,

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \text{si} \quad x \neq 4.$$

Por lo tanto, la gráfica de f es la misma que la de la figura 25, con una excepción: no hay hueco en la gráfica en $x = 4$. Para determinar el valor y correspondiente, usamos la forma reducida de la función y obtenemos $f(4) = 1/(4-2) = \frac{1}{2}$. El punto $(4, \frac{1}{2})$ está indicado por el pequeño círculo de la figura 33. Debes observar que las calculadoras graficadoras o programas de computadora quizá no estén diseñados para mostrar esta característica de una gráfica.

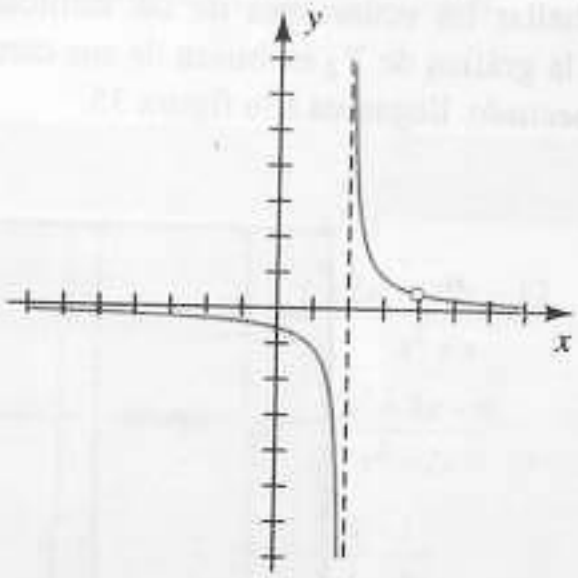


FIGURA 33

EJEMPLO 8 *Trazado de la gráfica de una función racional*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^3 - 9x^2 - 22x + 8},$$

y encuentra ecuaciones de las asíntotas verticales.

Solución En el ejemplo 15 del apéndice I se dan algunas secuencias de tecleo específicas para la TI-82. Empezamos con las asignaciones

$$Y_1 = x^2 - x, \quad Y_2 = 9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 \quad \text{y} \quad Y_3 = Y_1/Y_2.$$

Nada más graficaremos Y_3. Esto, aunado al uso de una pantalla predefinida, nos da una gráfica que prácticamente no indica la verdadera forma de f. Al cambiar a una pantalla $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, tenemos una idea de que las asíntotas verticales están confinadas al intervalo $-2 < x < 3$.

www.elsolucionario.net

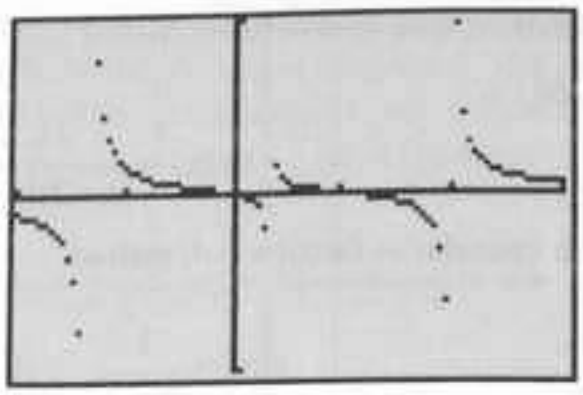


FIGURA 34 [−2, 3] por [−1, 1]

Con una pantalla [−2, 3] por [−1, 1] en *modo de punto* (para no graficar la función de un lado a otro de las asíntotas verticales) llegamos al trazo de la figura 34. Puesto que el grado del numerador, 2, es menor que el del denominador, 3, la asíntota horizontal es el eje x. Los ceros del numerador, 0 y 1, son las únicas intersecciones x.

A fin de hallar las ecuaciones de las asíntotas verticales, dejaremos la gráfica de Y_1 y examinaremos la gráfica de Y_2 en busca de sus ceros. Al graficar Y_2 en la misma pantalla, pero en el *modo conectado,* llegamos a la figura 35.

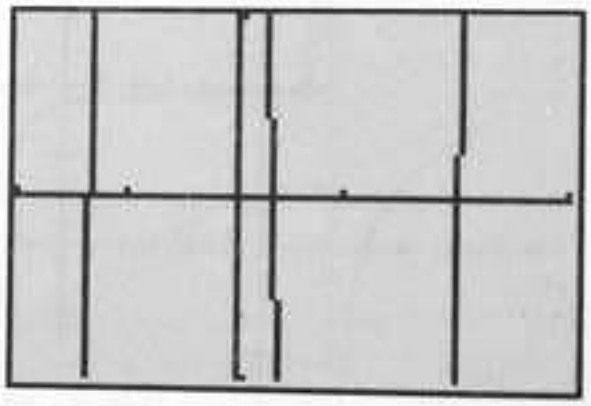


FIGURA 35 [−2, 3] por [−1, 1]

Por el teorema sobre ceros racionales de un polinomio sabemos que las posibles raíces racionales de $9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 = 0$ son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\tfrac{1}{3}, \pm\tfrac{2}{3}, \pm\tfrac{4}{3}, \pm\tfrac{8}{3}, \pm\tfrac{1}{9}, \pm\tfrac{2}{9}, \pm\tfrac{4}{9}, \pm\tfrac{8}{9}.$$

En la gráfica vemos que la única opción razonable para el cero en el intervalo $(-2, -1)$ es $-\frac{4}{3}$. El número 2 parece ser cero, y usando la función tracing o root de la calculadora concluimos que $\frac{1}{3}$ también es un buen candidato para un cero. Es posible probar que $-\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$ y 2 son ceros de Y_2 utilizando la división sintética. Así, las ecuaciones de las asíntotas verticales son

$$x = -\tfrac{4}{3}, \quad x = \tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad x = 2.$$

Las gráficas de funciones racionales se pueden complicar más y más conforme aumenten los grados de los polinomios del numerador y denominador. Las técnicas desarrolladas en cálculo son muy útiles para alcanzar un análisis más completo de dichas gráficas.

www.elsolucionario.net

Las fórmulas que representan cantidades físicas pueden determinar funciones racionales; por ejemplo, considera la ley de Ohm en teoría eléctrica, que indica que $I = V/R$, donde R es la resistencia (en ohms: Ω) de un conductor, V es la diferencia de potencial (en volts: V) en los terminales del conductor e I es la corriente (en amperes: A) que circula por el conductor. La resistencia de ciertas aleaciones se aproxima a cero conforme la temperatura se acerque al cero absoluto (alrededor de –273 °C), y la aleación se convierte en *superconductor* de electricidad. Si la tensión V es fija, entonces, para dicho superconductor,

$$I = \frac{V}{R} \to \infty \qquad \text{conforme} \qquad R \to 0^+;$$

esto es, a medida que R se aproxime a 0, la corriente aumenta sin límite. Los superconductores permiten usar corrientes muy altas en plantas generadoras y motores. También tienen aplicaciones en el transporte terrestre de alta velocidad, donde los intensos campos magnéticos producidos por imanes superconductores elevan los trenes, con lo cual se evita la fricción entre las ruedas y la vía. Quizá la aplicación más importante de los superconductores es en los circuitos para computadoras, porque tales circuitos producen muy poco calor.

4.5 EJERCICIOS

Ejercicios 1 y 2: a) traza la gráfica de f; b) encuentra el dominio D y el rango R de f, y c) halla los intervalos en que f crece o decrece.

1. $f(x) = \dfrac{4}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejercicios 3 al 24: traza la gráfica de f.

3. $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

4. $f(x) = \dfrac{-3}{x+3}$

5. $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$

6. $f(x) = \dfrac{4x}{2x-5}$

7. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-6}$

8. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

9. $f(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

10. $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

11. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$

12. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-4}$

13. $f(x) = \dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+x-12}$

14. $f(x) = \dfrac{-3x^2-3x+6}{x^2-9}$

15. $f(x) = \dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x-4}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}$

17. $f(x) = \dfrac{3x^2-3x-36}{x^2+x-2}$

18. $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-48}{x^2+3x-10}$

19. $f(x) = \dfrac{-2x^2+10x-12}{x^2+x}$

20. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x+6}{x^2-2x}$

21. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-4x}$

22. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-9x}$

23. $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2+1}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

Ejercicios 25 al 28: encuentra la asíntota oblicua y traza la gráfica de f.

25. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x+1}$

26. $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$

27. $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$

28. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-9}$

Ejercicios 29 al 36: simplifica $f(x)$ y traza la gráfica de f.

29. $f(x) = \dfrac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

31. $f(x) = \dfrac{x-1}{1-x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

33. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$

www.elsolucionario.net

34. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x - 2}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{(x^2 + x)(2x - 1)}{(x^2 - 3x + 2)(2x - 1)}$

Ejercicios 37 al 40: encuentra la ecuación de una función racional f que satisfaga las condiciones dadas.

37. Asíntota vertical: $x = 4$

Asíntota horizontal: $y = -1$

Intersección en x: 3

38. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Intersección en x: 2; $f(3) = 1$

39. Asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

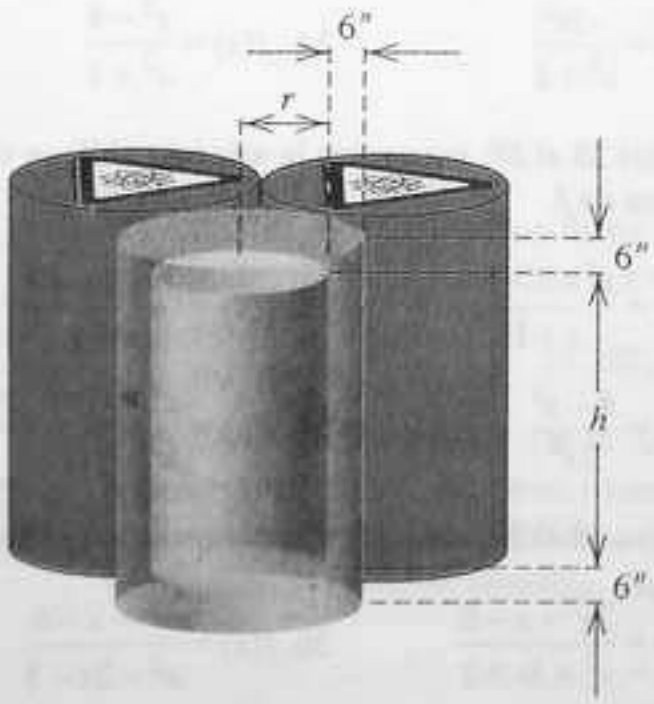
Intersección en x: -1; $f(0) = -2$; hueco en $x = 2$

40. Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Intersecciones en x: -2, 1; hueco en $x = 0$

41. **Un recipiente para desechos radiactivos** Se va a construir con plomo un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos; las paredes deben ser de 6 in de grueso. El volumen del cilindro exterior que se muestra en la figura ha de tener 16π ft^3.



EJERCICIO 41

a) Expresa la altura h del cilindro interior como función del radio interior r.

b) Demuestra que el volumen interior $V(r)$ está dado por

$$V(r) = \pi r^2 \left[\frac{16}{(r + 0.5)^2} - 1 \right].$$

c) ¿Qué valores de r deben excluirse de la parte b)?

42. **Dosis de medicamento** La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar las dosis para adultos en niveles infantiles. Si a denota la dosis para adulto (en mg) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis y del menor está dada por $y = ta/(t + 12)$. Traza la gráfica de esta ecuación para $t > 0$ y $a = 100$.

43. **Concentración de sal** Se hace circular agua salada de concentración igual a 0.1 libras (lb) de sal por galón (gal) a un gran tanque que contenía 50 gal de agua pura en un inicio.

a) Si el agua entra a 5 gal/min, encuentra el volumen $V(t)$ de agua y la cantidad $A(t)$ de sal en el tanque después de t min.

b) Propón una fórmula para hallar la concentración de sal $c(t)$ (en lb/gal) después de t min.

c) Analiza la variación de $c(t)$ conforme $t \to \infty$.

44. **Cantidad de lluvia** La cantidad total de pulgadas $R(t)$ de lluvia durante una tormenta de t h de duración se calcula por

$$R(t) = \frac{at}{t + b},$$

donde a y b son constantes positivas que dependen de la situación geográfica.

a) Analiza la variación de $R(t)$ conforme $t \to \infty$.

b) La intensidad I de la lluvia (en in/h) está definida por $I = R(t)/t$. Si $a = 2$ y $b = 8$, traza la gráfica de R e I en el mismo plano coordenado para $t > 0$.

45. **Propagación del salmón** Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de ponedoras y la cantidad R de hijuelos que sobreviven hasta llegar a la edad adulta está dada por la fórmula

$$R = \frac{4500S}{S + 500}.$$

a) ¿En qué condiciones es $R > S$?

b) Indica el número de ponedoras que produciría el 90% de la cantidad máxima posible de hijuelos que sobrevivan hasta la edad adulta.

c) Trabaja la parte b) con 80% en lugar de 90 por ciento.

d) Compara los resultados para S y R (en términos de aumentos de porcentaje) de las partes b) y c).

46. **Densidad de población** La densidad de la población D (en personas/mi^2) de una gran ciudad, se relaciona con

www.elsolucionario.net

la distancia x (en mi) desde el centro de la ciudad por medio de

$$D = \frac{5000x}{x^2 + 36}.$$

a) ¿Qué le sucede a la densidad conforme la distancia desde el centro de la ciudad pasa de 20 a 25 mi?

b) ¿Qué ocurre finalmente con la densidad?

c) ¿En qué partes de la ciudad la densidad de población rebasa las 400 personas/mi^2?

Ejercicios 47 al 50: grafica f y encuentra ecuaciones de las asíntotas verticales.

47. $f(x) = \dfrac{20x^2 + 80x + 72}{10x^2 + 40x + 41}$

48. $f(x) = \dfrac{15x^2 - 60x + 68}{3x^2 - 12x + 13}$

49. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x - 0.999)^2}$

50. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9.01}{x - 3}$

51. Sea $f(x)$ el polinomio

$$(x+3)(x+2)(x+1)(x)(x-1)(x-2)(x-3).$$

a) Describe la gráfica de $g(x) = f(x)/f(x)$.

b) Describe la gráfica de $h(x) = g(x)p(x)$, donde $p(x)$ es una función polinomial.

52. Consulta el ejercicio 51.

a) Describe la gráfica de $y = f(x)$.

b) Describe la gráfica de $k(x) = 1/f(x)$.

4.6 Parábolas

Las *secciones cónicas*, también llamadas *cónicas*, se obtienen cortando un cono circular recto doble con un plano. Al cambiar la posición del plano se tiene un *círculo*, una *elipse* una *parábola* o una *hipérbola* (Fig. 36).

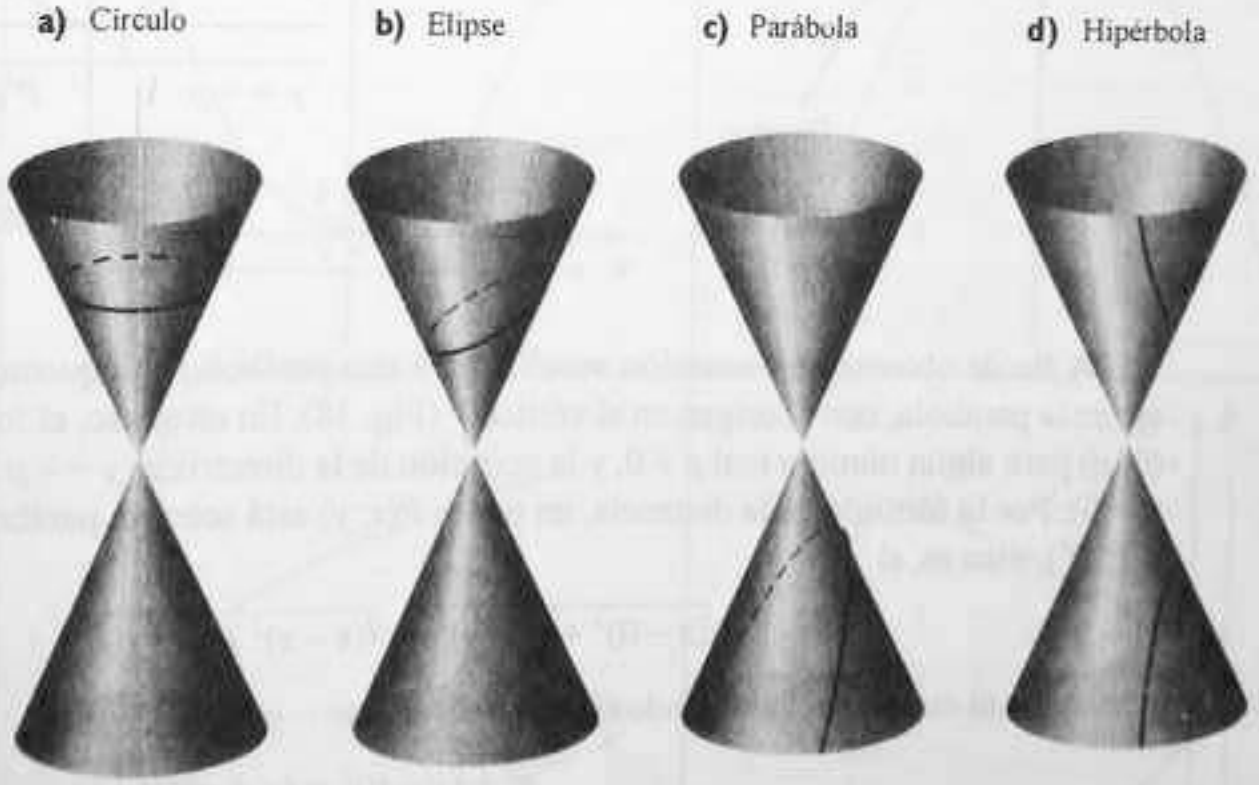


FIGURA 36

Las *cónicas degradadas* (o *degeneradas*) se obtienen si el plano corta al cono en un solo punto o a lo largo de una o dos rectas situadas en el cono. Los antiguos griegos estudiaron ampliamente las secciones cónicas descubriendo propiedades que nos hacen posible expresar sus definiciones en términos de puntos y líneas, como en este estudio.

www.elsolucionario.net

Con base en nuestro trabajo de la sección 3.6, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con eje vertical. A continuación daremos una definición general de una parábola y llegaremos a ecuaciones de parábolas que tienen eje vertical u horizontal.

Definición de parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistantes de un punto fijo F **(foco)** y de una recta fija l **(directriz)** situada en el plano.

Supondremos que F no está en l, si estuviera, tendríamos una recta en lugar de una parábola. Si P es un punto del plano y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P y es perpendicular a l (Fig. 37), por la definición anterior, P está sobre la parábola si y sólo si las distancias $d(P, F)$ y $d(P, P')$ son iguales. El **eje** de la parábola es la recta que pasa por F perpendicular a la directriz. El **vértice** de la parábola es el punto V sobre el eje que se encuentra a la mitad de F a l. El vértice es el punto de la parábola más cercano a la directriz.

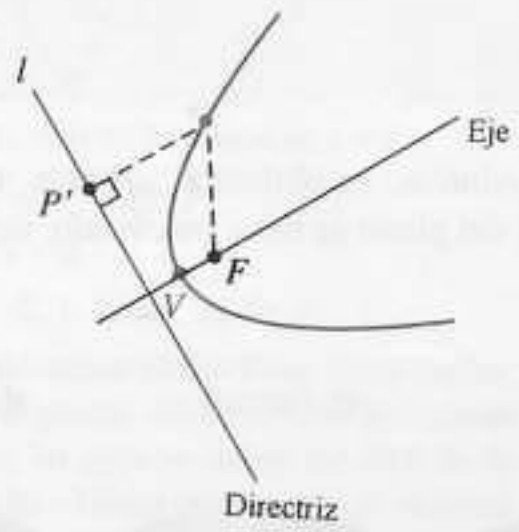


FIGURA 37

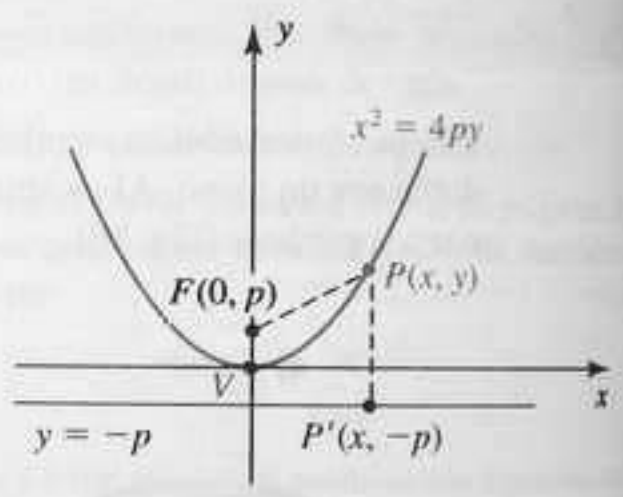


FIGURA 38

A fin de obtener una ecuación sencilla para una parábola, coloquemos el eje y a lo largo del eje de la parábola, con el origen en el vértice V (Fig. 38). En este caso, el foco F tiene coordenadas $(0, p)$ para algún número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$ (la Fig. muestra el caso $p > 0$). Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x, y)$ está sobre la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$, esto es, si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Una ecuación equivalente para la parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

www.elsolucionario.net

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba (Fig. 38); si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. La gráfica es simétrica con respecto al eje y, puesto que la sustitución de $-x$ por x no cambia la ecuación $x^2 = 4py$.

Si intercambiamos los papeles de x y y, resulta

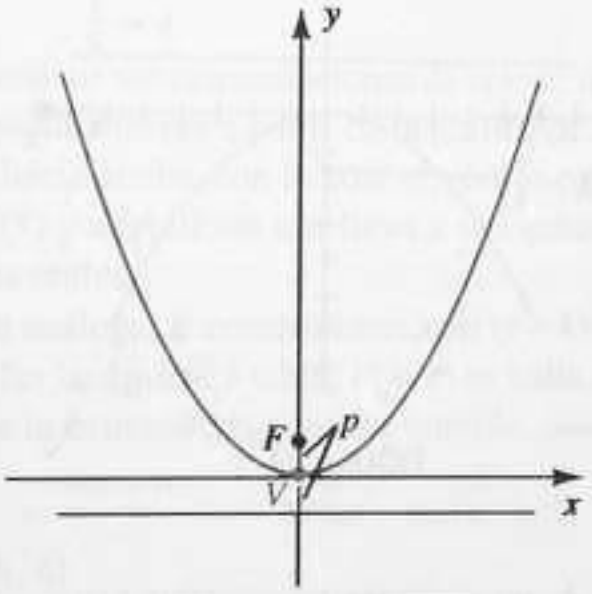
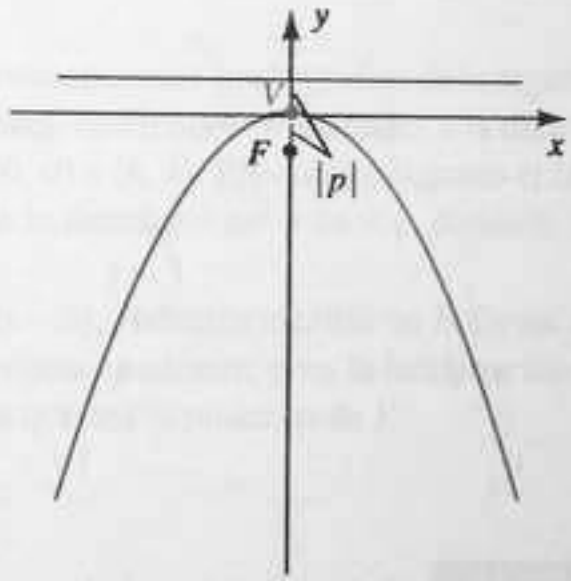
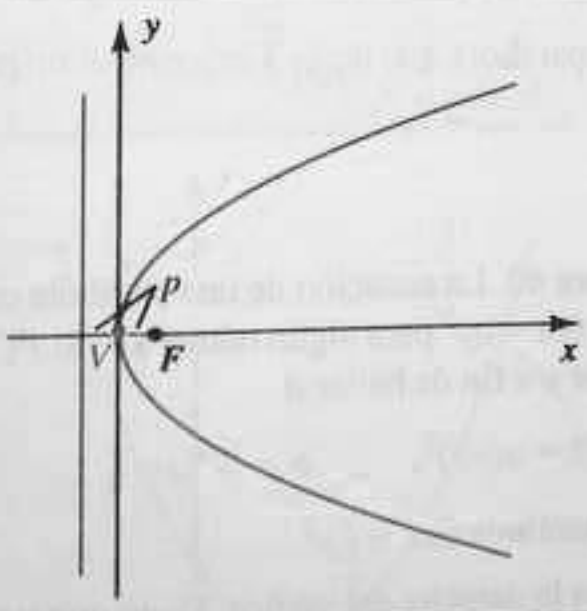
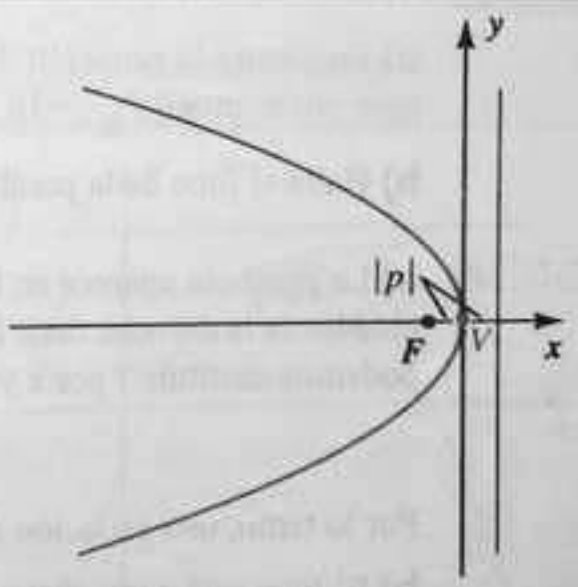
$$y^2 = 4px \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Ésta es una ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ y abre a la derecha si $p > 0$, o a la izquierda si $p < 0$. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Por conveniencia solemos decir "la parábola $x^2 = 4py$" (o $y^2 = 4px$), en lugar de "la parábola con ecuación $x^2 = 4py$" (o $y^2 = 4py$).

La siguiente tabla resume el análisis.

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$x^2 = 4py$ o $y = \frac{1}{4p}x^2$ Foco: $F(0, p)$ Directriz: $y = -p$		
$y^2 = 4px$ o $x = \frac{1}{4p}y^2$ Foco: $F(p, 0)$ Directriz: $y = -p$		

En la tabla vemos que para cualquier número real a diferente de cero, la gráfica de la **ecuación estándar** $y = ax^2$ o $x = ay^2$ es una parábola con vértice $V(0, 0)$. Además, $a = 1/(4p)$ o bien, lo que

www.elsolucionario.net

equivale, $p = 1/(4a)$, donde $|p|$ es la distancia entre el foco F y el vértice V. Para hallar la directriz l, recordemos que l también es una distancia $|p|$ desde V.

EJEMPLO 1 *Determinación del foco y directriz de una parábola*

Encuentra el foco y directriz de la parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$ y traza su gráfica.

Solución La ecuación tiene la forma $y = ax^2$, con $a = -\frac{1}{6}$. Dado que en la tabla anterior, $a = 1/(4p)$, entonces

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{-\frac{4}{6}} = -\frac{3}{2}.$$

Así, la parábola abre hacia abajo y tiene foco $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, según se ilustra en la figura 39. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$, que es una distancia $\frac{3}{2}$ arriba de V, como se muestra en la figura.

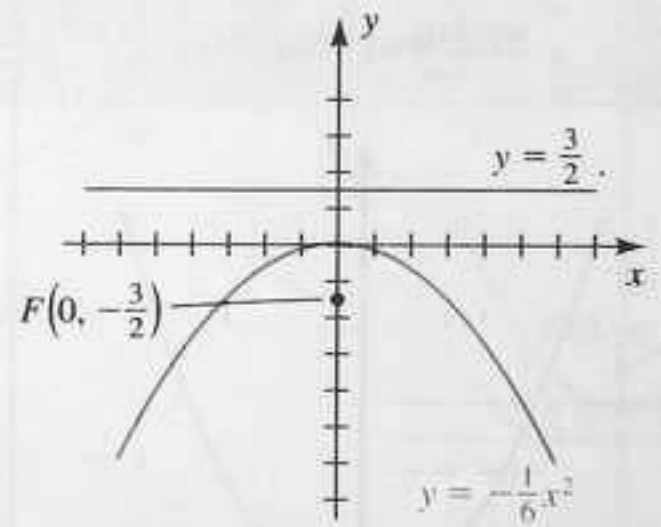


FIGURA 39

EJEMPLO 2 *Determinación de la ecuación de una parábola que satisfaga condiciones prescritas*

a) Encuentra la ecuación de una parábola que tenga vértice en el origen, abra hacia la derecha y pase por el punto $P(7, -3)$.

b) Halla el foco de la parábola.

Solución **a)** La parábola aparece en la figura 40. La ecuación de una parábola con vértice en el origen que abre hacia la derecha tiene la forma $x = ay^2$ para algún número a. Si $P(7, -3)$ está sobre la gráfica, podemos sustituir 7 por x y -3 por y a fin de hallar a:

$$7 = a(-3)^2, \qquad \text{o} \qquad a = \frac{7}{9}$$

Por lo tanto, una ecuación de la parábola es $x = \frac{7}{9}y^2$.

b) El foco está a una distancia p a la derecha del vértice. Dado que $a = \frac{7}{9}$, tenemos

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{9}{28}.$$

Así pues, el foco tiene coordenadas $\left(\frac{9}{28}, 0\right)$.

www.elsolucionario.net

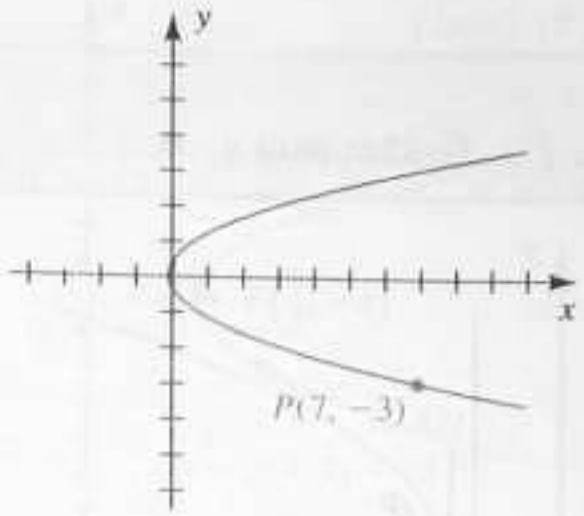


FIGURA 40

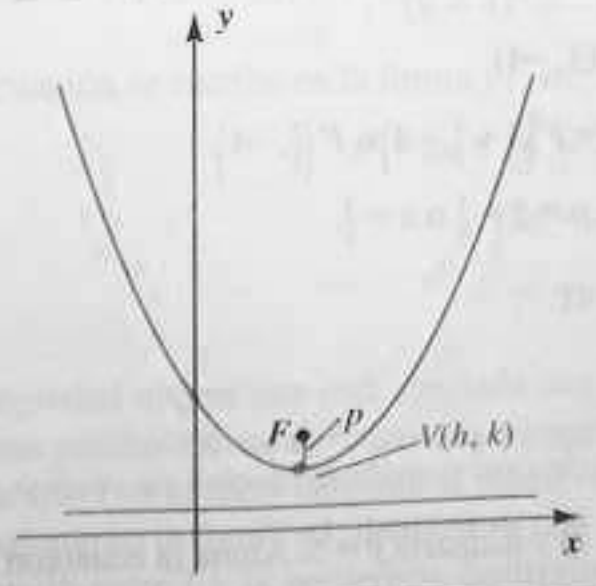
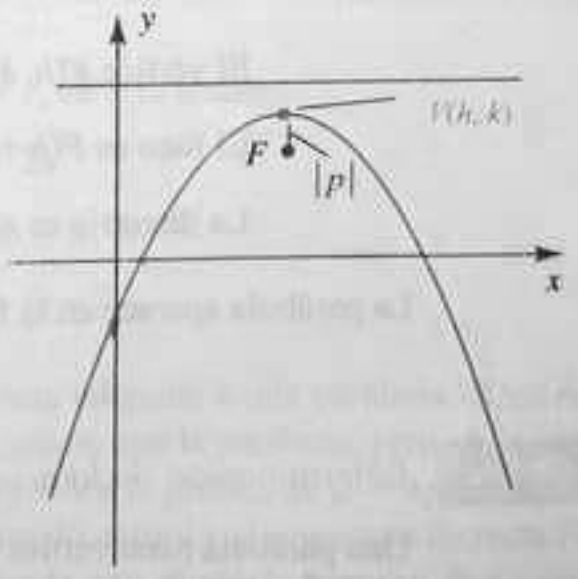
Si tomamos una ecuación estándar de una parábola (de la forma $x^2 = 4py$) y cambiamos x por $x - h$ y y por $y - k$, entonces

$$x^2 = 4py \qquad \text{se convierte en} \qquad (x-h)^2 = 4p\,(y-k) \tag{*}$$

Pon nuestro análisis sobre translaciones de la sección 3.5, reconocemos que la gráfica de la segunda ecuación se puede obtener a partir de la gráfica de la primera, corriéndola h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, con lo cual el vértice pasa de (0, 0) a (h, k). Elevar al cuadrado el lado izquierdo de (*) y simplificar nos lleva a una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales.

En forma análoga, si comenzamos con $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, podemos escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$. En la siguiente tabla, $V(h, k)$ se halla en el primer cuadrante, pero la información de la columna de la extrema izquierda se cumple, cualquiera que sea la posición de V

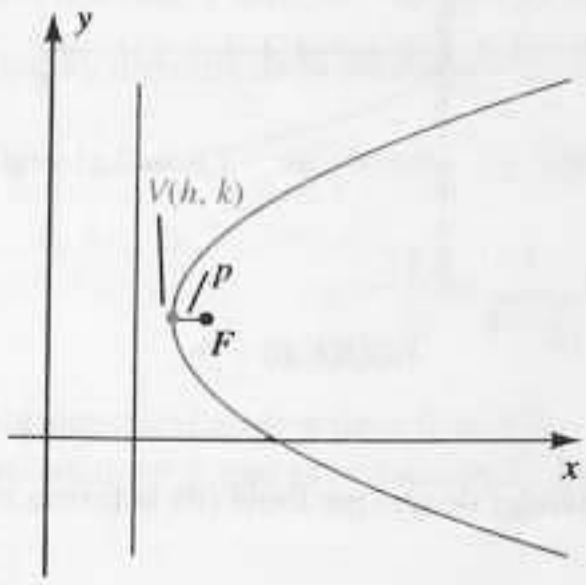
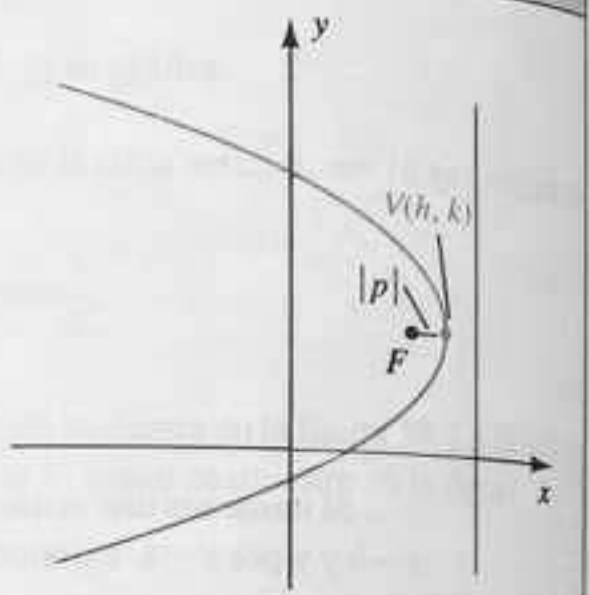
Parábolas con vértice $V(h, k)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ o $y = ax^2 + bx + c$, donde $p = \dfrac{1}{4a}$ Foco: $F(h, k+p)$ Directriz: $y = k - p$		

(continúa)

www.elsolucionario.net

Parábolas con vértice $V(h, k)$ *(cont.)*

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(y-h)^2 = 4p(x-h)$ o $x = ay^2 + by + c$, donde $p = \dfrac{1}{4a}$ Foco: $F(h+p, k)$ Directriz: $x = h - p$		

EJEMPLO 3 *Trazo de una parábola con eje horizontal*

Analiza y dibuja la gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$.

Solución La ecuación se puede escribir en la forma mostrada en el segundo renglón de la tabla anterior, $x = ay^2 + by + c$; así pues, con base en dicha tabla vemos que la gráfica es una parábola con un eje horizontal. Primero escribimos la ecuación dada como

$$y^2 + 8y + __ = 2x - 22 + __$$

y luego completamos el cuadrado al sumar $\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16$ a ambos lados:

$$y^2 + 8y + 16 = 2x - 6$$

$$(y+4)^2 = 2(x-3)$$

Según la última tabla, $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$ o bien, lo cual equivale, $p = \frac{1}{2}$. Esto da:

El vértice $V(h, k)$ es $V(3, -4)$.

El foco es $F(h+p, k) = F\left(3 + \frac{1}{2}, -4\right)$ o $F\left(\frac{7}{2}, -4\right)$.

La directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2}$ o $x = \frac{5}{2}$.

La parábola aparece en la figura 41.

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una parábola dados su vértice y directriz*

Una parábola tiene vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$. Anota la ecuación de la parábola en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

www.elsolucionario.net

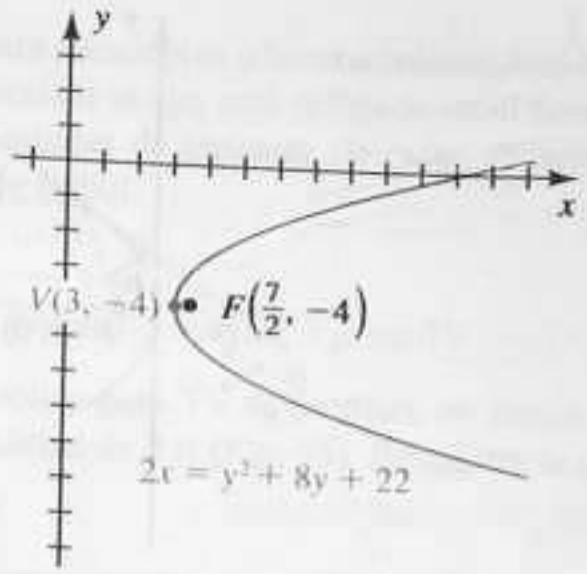


FIGURA 41

Solución El vértice y la directriz aparecen en la figura 42. La línea punteada indica una posible posición para la parábola. La última tabla señala que una ecuación de la parábola es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k),$$

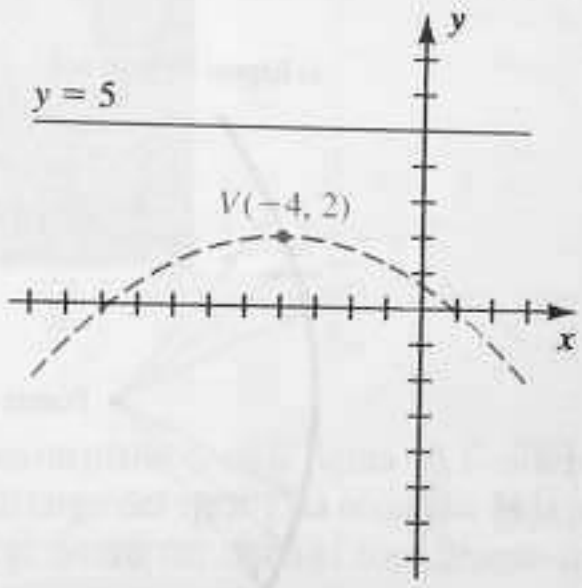


FIGURA 42

con $h = -4$, $k = 2$ y p igual a 3 *negativo*, porque V está tres unidades *abajo* de la directriz. Esto da

$$(x+4)^2 = -12(y-2).$$

La última ecuación se escribe en la forma $y = ax^2 + by + c$, de esta manera:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

$$12y = -x^2 - 8x + 8$$

$$y = -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$

Una propiedad importante está asociada con una recta tangente a una parábola. (Una *recta tangente* a una parábola tiene exactamente un punto en común con la parábola, pero no la corta.) Supongamos que l es la recta tangente al punto $P(x_1, y_1)$ sobre la gráfica de $y^2 = 4px$, y sea F el foco. Al igual que en la figura 43, denotemos con α el ángulo entre l y el segmento de recta FP y con β el ángulo entre l y la semirrecta horizontal indicada con el punto extremo P. Se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Esta *propiedad reflectora* tiene muchas aplicaciones; por ejemplo, la forma

www.elsolucionario.net

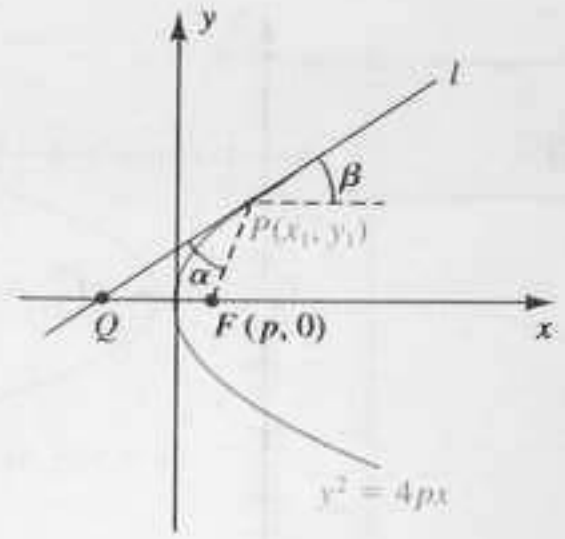
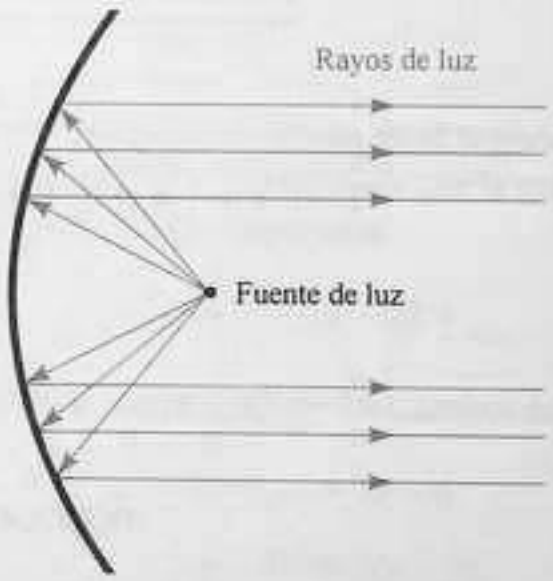


FIGURA 43

del espejo de un proyector se obtiene girando una parábola alrededor de su eje. Se dice que esta superficie tridimensional resultante fue *generada* por la parábola y se llama **paraboloide.** El foco del paraboloide es el mismo que el foco de la parábola generatriz. Si una fuente de luz se coloca en F, entonces, por una ley de física (el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia), un haz de luz se reflejará a lo largo de una línea paralela al eje (Fig. 44a). Se usa el mismo principio

a) Espejo del proyector



b) Espejo del telescopio

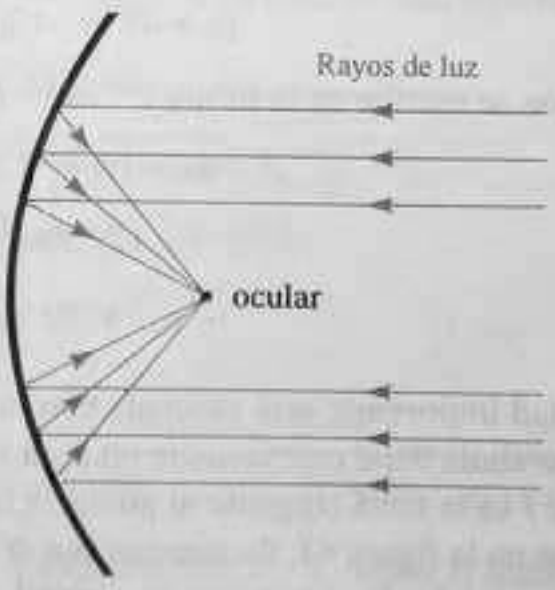


FIGURA 44 a) Espejo del proyector y b) espejo del telescopio.

www.elsolucionario.net

en la construcción de espejos para telescopios u hornos solares; esto es, un haz de luz que se dirija hacia el espejo parabólico y paralelo al eje, será reflejado en el foco (Fig. 44b). Esta propiedad también se aprovecha en las antenas de sistemas de radar, radiotelescopios y micrófonos de ambiente utilizados en juegos de futbol.

EJEMPLO 5 *Localización del foco de una antena parabólica para TV*

El interior de una antena parabólica para TV es un disco en forma de paraboloide (finito) con diámetro de 12 ft y una profundidad de 2 ft (Fig. 45). Encuentra la distancia desde el centro del disco al foco.

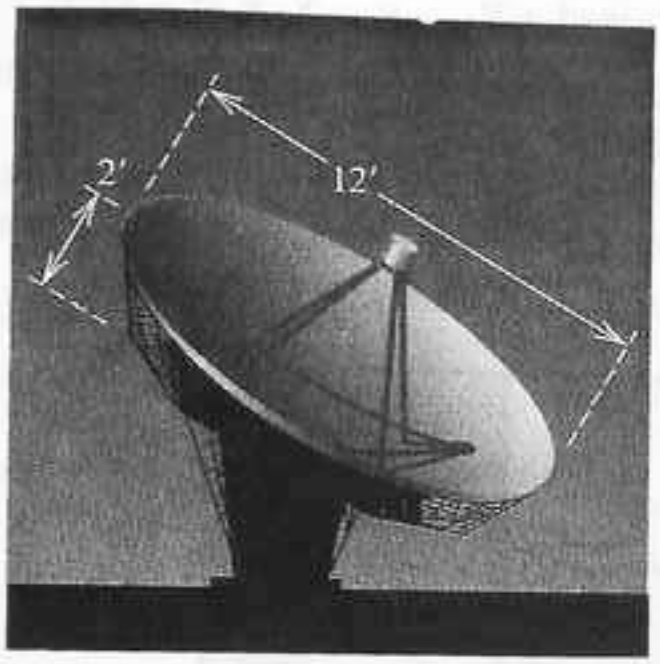


FIGURA 45

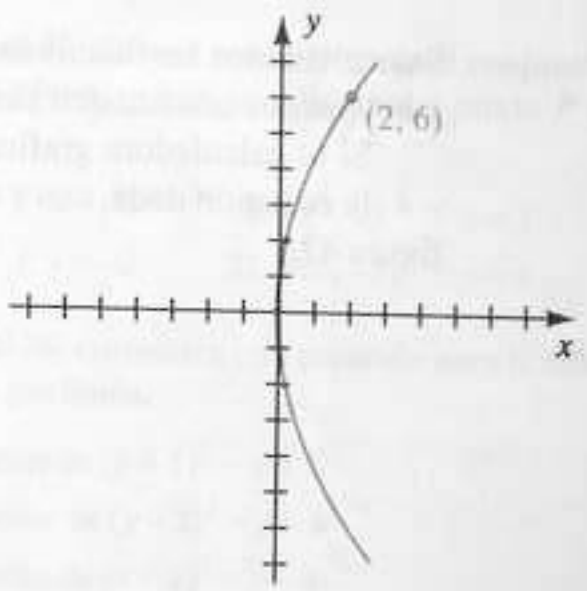


FIGURA 46

Solución La parábola generatriz aparece en un plano xy en la figura 46, donde hemos tomado el vértice de la parábola en el origen y el eje a lo largo del eje x. Una ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, donde p es la distancia requerida desde el centro del disco al foco. Puesto que el punto (2, 6) está en la parábola, entonces

$$6^2 = 4p \cdot 2 \qquad \text{o} \qquad p = \tfrac{36}{8} = 4.5 \text{ ft.}$$

En el próximo ejemplo graficamos una parábola con un eje horizontal con una calculadora graficadora.

EJEMPLO 6 *Graficado de semiparábolas*

Grafica $x = y^2 + 2y - 4$.

Solución En el ejemplo 16 del apéndice I se dan algunas secuencias de tecleo de la TI-82. La gráfica es una parábola con un eje horizontal. Dado que y no es una función de x, despejaremos y y obtendremos dos ecuaciones (como lo hicimos con círculos en el Ejem. 10, Sec. 3.2). Comenzamos por despejar y de la ecuación equivalente

$$y^2 + 2y - 4 - x = 0$$

en términos de x usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -4 - x$: *(continúa)*

www.elsolucionario.net

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4 - x)}}{2(1)}$$ fórmula cuadrática

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20 + 4x}}{2}$$ simplificar

$$= -1 \pm \sqrt{x + 5}$$ factorizar $\sqrt{4}$; simplificar

La última ecuación, $y = -1 \pm \sqrt{x+5}$, representa la mitad superior de la parábola ($y = -1 + \sqrt{x+5}$) y la mitad inferior ($y = -1 - \sqrt{x+5}$). Observa que $y = -1$ es el eje de la parábola.

A continuación asignamos

$$Y_1 = \sqrt{x+5}, \quad Y_2 = -1 + Y_1 \quad \text{y} \quad Y_3 = -1 - Y_1.$$

Seleccionamos las funciones Y_2 y Y_3 que graficaremos con una pantalla predefinida (o estándar) y obtenemos una imagen similar a la figura 47.

Si tu calculadora graficadora tiene función de gráfica inversa, puedes asignar $Y_1 = x^2 + 2x - 4$ (la ecuación dada, con x en lugar de y) y graficar la inversa de Y_1 para obtener la gráfica de la figura 47.

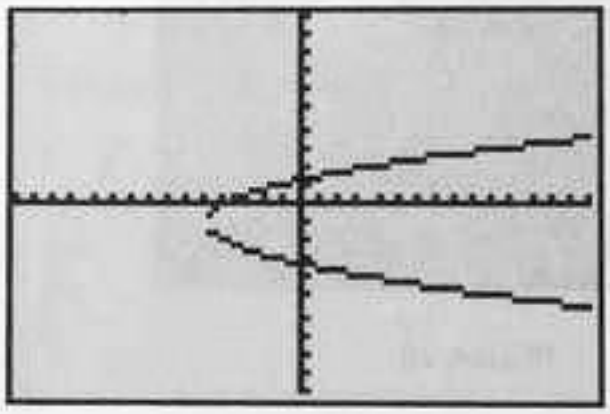


FIGURA 47 [−15, 15] por [−10, 10]

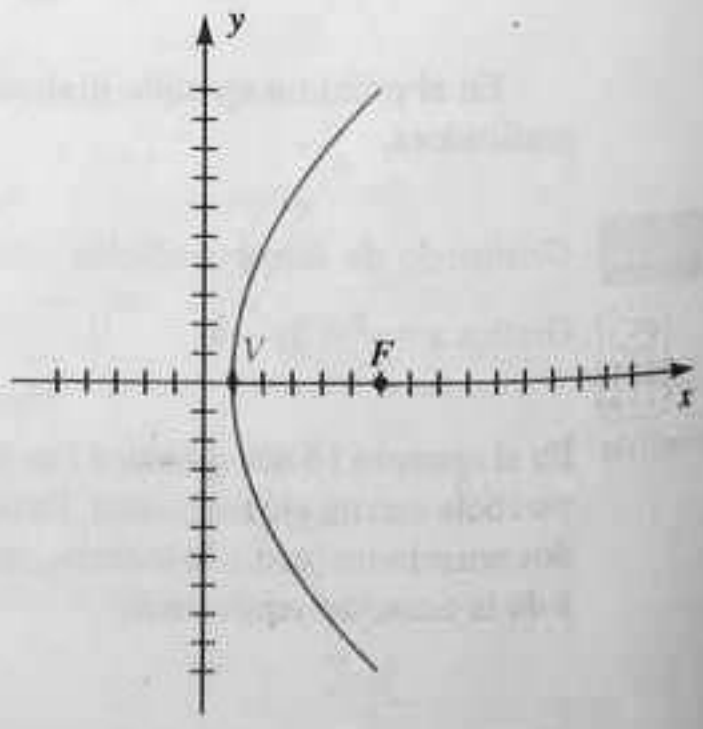
4.6 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 12: encuentra el vértice, foco y directriz de la parábola. Traza su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

1. $8y = x^2$
2. $20x = y^2$
3. $2y^2 = -3x$
4. $x^2 = -3y$
5. $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$
6. $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$
7. $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$
8. $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$
9. $y = x^2 - 4x + 2$
10. $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$
11. $x^2 + 20y = 10$
12. $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

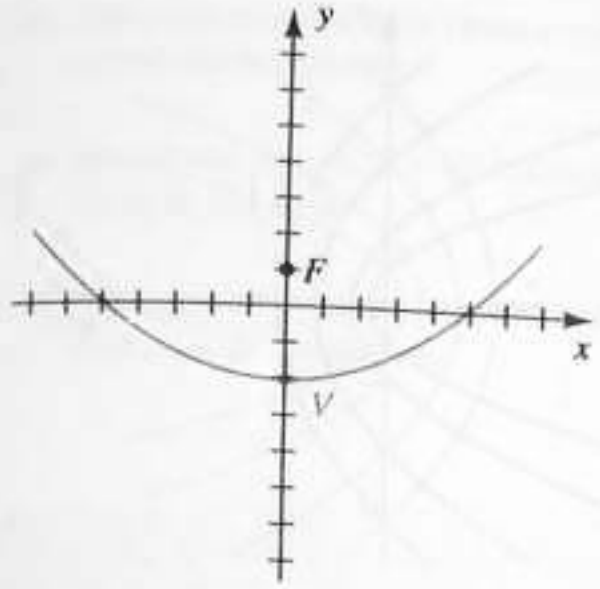
Ejercicios 13 al 16: da una ecuación para la parábola de la figura.

13.

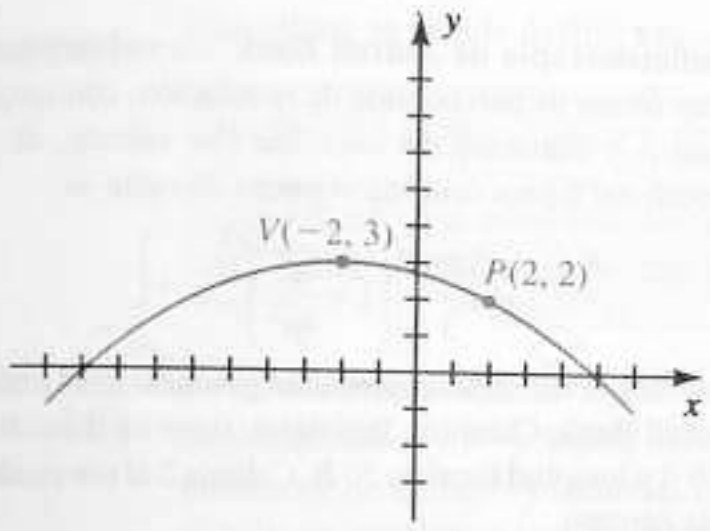


www.elsolucionario.net

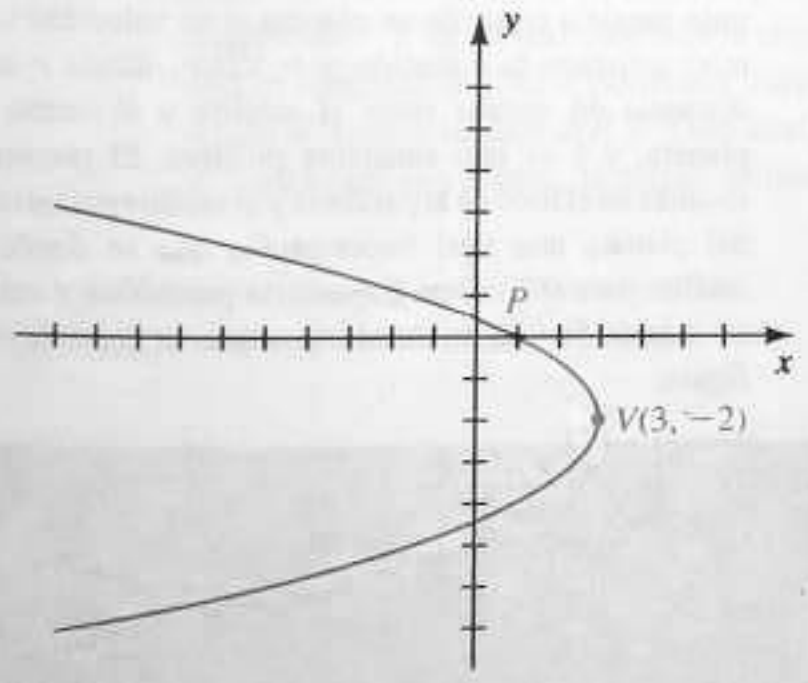
14.



15.



16.



Ejercicios 17 al 28: encuentra una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

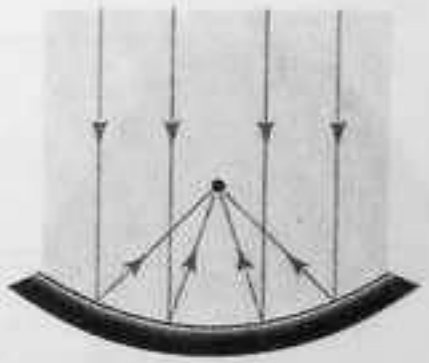
17. Foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$
18. Foco $F(0, -4)$, directriz $y = 4$
19. Foco $F(6, 4)$, directriz $y = -2$
20. Foco $F(-3, -2)$, directriz $y = 1$
21. Vértice $V(3, -5)$, directriz $x = 2$
22. Vértice $V(-2, 3)$, directriz $y = 5$
23. Vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$
24. Vértice $V(1, -2)$, foco $F(1, 0)$
25. Vértice en el origen, simétrico al eje y y que pasa por el punto $(2, -3)$
26. Vértice en el origen, simétrico al eje y y que pasa por el punto $(6, 3)$
27. Vértice $V(-3,5)$, eje paralelo al eje x y que pasa por el punto $(5, 9)$
28. Vértice $V(3, -2)$, eje paralelo al eje x e intersección y de 1.

Ejercicios 29 al 32: da una ecuación para el conjunto de puntos de un plano xy que equidistan del punto P y la recta l.

29. $P(0, 5)$; $l: y = -3$
30. $P(7, 0)$; $l: x = 1$
31. $P(-6, 3)$; $l; x = -2$
32. $P(5, -2)$; $l; y = 4$

Ejercicios 33 al 36: encuentra una ecuación para la mitad indicada de la parábola.

33. Mitad inferior de $(y + 1)^2 = x + 3$
34. Mitad superior de $(y - 2)^2 = x - 4$
35. Mitad derecha de $(x + 1)^2 = y - 4$
36. Mitad izquierda de $(x + 3)^2 = y + 2$
37. **Espejo de telescopio** Un espejo para un telescopio reflector tiene forma de paraboloide (finito) de 8 in de diámetro y 1 in de profundidad. ¿ A qué distancia del centro del espejo se concentrará la luz incidente?

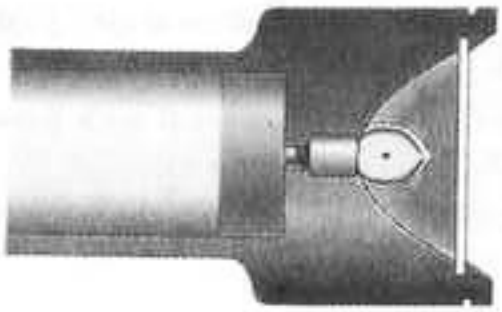


EJERCICIO 37

38. **Disco para antena** Un disco de antena para satélites tiene forma de paraboloide, con 10 ft de diámetro en el extremo abierto y 3 ft de profundidad. ¿A qué distancia del centro del disco debe ponerse el receptor a fin de recibir la máxima intensidad de ondas sonoras?
39. **Reflector de proyector** El reflector de un proyector tiene forma de paraboloide, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 3 ft de diámetro en la abertura y 1 ft de profundidad, ¿dónde está el foco?

www.elsolucionario.net

40. Espejo de linterna de mano El espejo de una linterna de mano tiene forma de paraboloide, con 4 in de diámetro y $\frac{3}{4}$ in de profundidad (ve la figura). ¿Dónde debe ponerse el foco, de manera que los rayos de luz emitidos sean paralelos al eje del paraboloide?



EJERCICIO 40

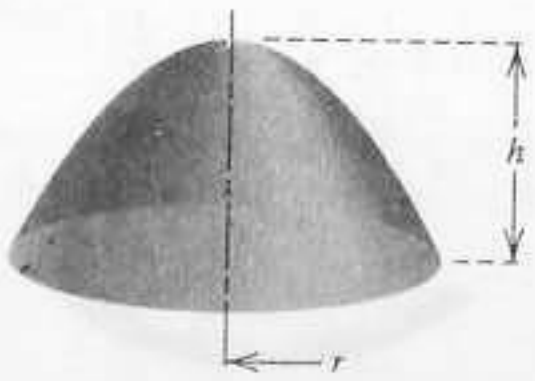
41. Disco receptor Un disco receptor de sonidos para eventos deportivos a campo abierto se construye en forma de un paraboloide, con el foco a 5 in del vértice. Determina el ancho del disco si la profundidad debe ser de 2 ft.

42. Disco receptor Trabaja el ejercicio 41, pero ahora el receptor está a 9 in del vértice.

43. Reflector parabólico

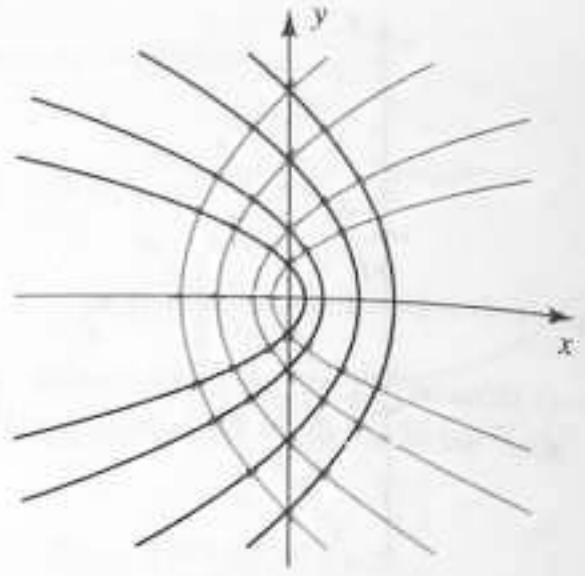
a) La longitud focal del paraboloide (finito) de la figura es la distancia p entre su vértice y foco. Expresa p en términos de r y h.

b) Se va a construir un reflector con longitud focal de 10 ft y profundidad de 5 ft. Encuentra el radio del reflector.



EJERCICIO 43

44. Parábolas confocales La parábola $y^2 = 4p(x + p)$ tiene su foco en el origen y eje a lo largo del eje x. Al asignar diferentes valores a p, obtenemos una familia de parábolas confocales (ve la figura). Dichas familias se presentan en el estudio de la electricidad y el magnetismo. Demuestra que hay exactamente dos parábolas en la familia que pasa por un punto dado $P(x_1, y_1)$ si $y_1 \neq 0$.



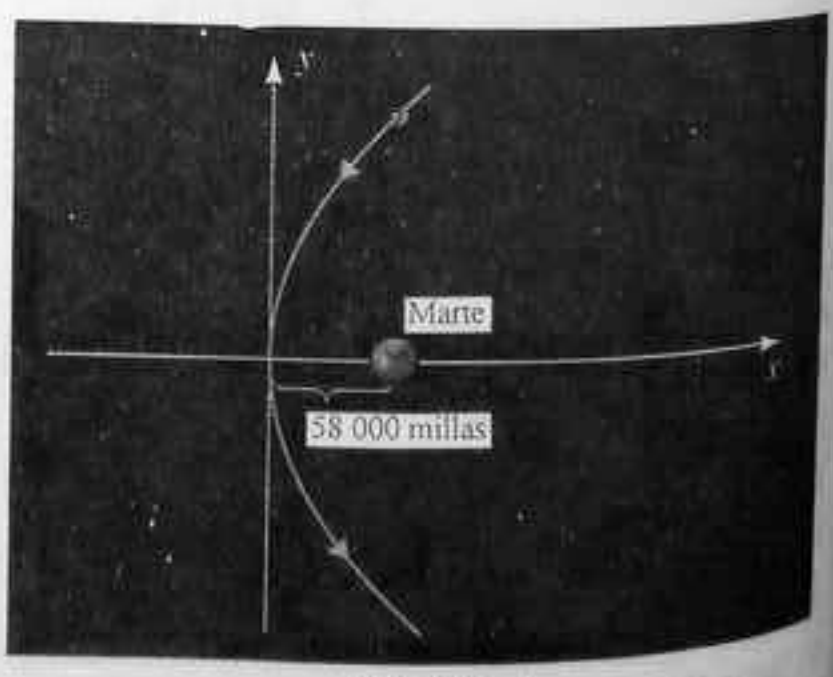
EJERCICIO 44

45. Radiotelescopio de Jodrell Bank Un radiotelescopio tiene forma de paraboloide de revolución, con longitud focal p y diámetro de base $2a$. Por cálculo, el área superficial S para concentrar ondas de radio es

$$S = \frac{8\pi p^2}{3}\left[\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right)^{3/2} - 1\right].$$

Uno de los radiotelescopios más grandes, localizado en Jodrell Bank, Cheshire, Inglaterra, tiene un diámetro de 250 ft y longitud focal de 50 ft. Calcula S al pie cuadrado más cercano.

46. Trayectoria de satélite Un satélite vuela en una trayectoria paralela cerca de un planeta si su velocidad v (en m/s) satisface la ecuación $v = \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia en metros entre el satélite y el centro del planeta, y k es una constante positiva. El planeta se localiza en el foco de la parábola y el satélite pasará cerca del planeta una vez. Supongamos que se diseña un satélite para seguir una trayectoria parabólica y volar a no más de 58 000 mi de Marte, según se presenta en la figura.



EJERCICIO 46

www.elsolucionario.net

a) Halla una ecuación de la forma $x = ay^2$ que describa su trayectoria de vuelo.

b) Para Marte, $k = 4.28 \times 10^{13}$. Calcula la velocidad máxima del satélite.

c) Encuentra la velocidad del satélite cuando su coordenada y sea de 100 000 mi.

Ejercicios 47 y 48: grafica la ecuación.

47. $x = -y^2 + 2y + 5$

48. $x = 2y^2 + 3y - 7$

Ejercicios 49 y 50: grafica las parábolas en el mismo plano coordenado y calcula los puntos de intersección.

49. $y = x^2 - 2.1x - 1$; $x = y^2 + 1$

50. $y = -2.1x^2 + 0.1x + 1.2$; $x = 0.6y^2 + 1.7y - 1.1$

4.7 Elipses

Una elipse se puede definir como sigue.

Definición de elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los **focos**) sea una constante positiva.

Podemos construir una elipse en papel así: clava dos tachuelas en el papel en dos puntos cualesquiera F y F' y sujeta los extremos de un trozo de hilo a las tachuelas. Tras enrollar el hilo alrededor de un lápiz y tensarlo, igual que en el punto P de la figura 48, mueve el lápiz de modo que el hilo se mantenga tenso. La suma de las distancias $d(F, P)$ y $d(F', P)$ es la longitud del hilo y, por lo tanto, es constante; así, el lápiz trazará una elipse con focos en F y F'. El punto medio del segmento $F'F$ se llama **centro** de la elipse. Si cambiamos las posiciones de F y F' pero mantenemos fija la longitud del hilo, podemos variar considerablemente la forma de la elipse. Si F y F' están a una distancia tal que $d(F, F')$ sea casi la misma que la longitud del hilo, la elipse es plana. Si $d(F, F')$ está cercana a cero, la elipse es casi circular. Si $F = F'$, obtenemos un círculo con centro F.

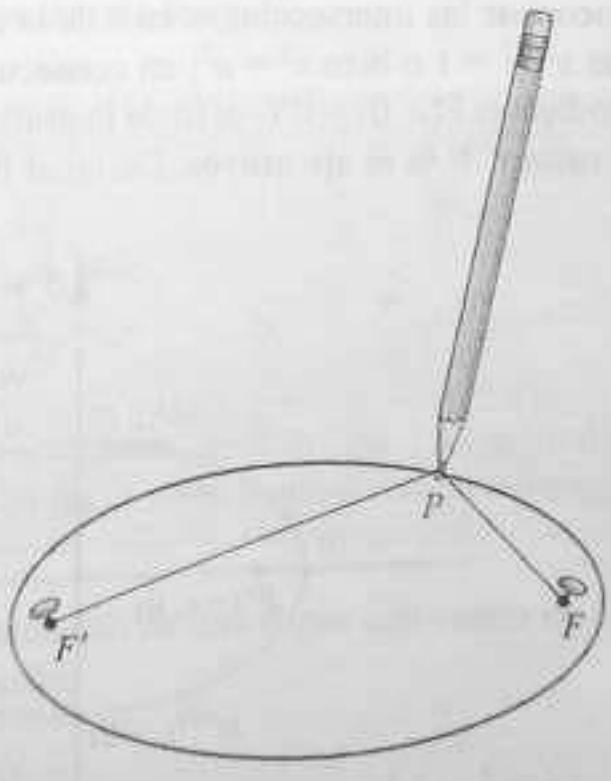


FIGURA 48

www.elsolucionario.net

A fin de obtener una ecuación sencilla para una elipse, escojamos el eje x como la recta que pasa por los dos focos F y F', con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$, entonces, como en la figura 49, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$; por lo tanto, la distancia entre F y F' es $2c$. La suma constante de las distancias de P desde F y F' se denotará con $2a$. Para obtener puntos fuera del eje x, debemos tener $2a > 2c$; esto es, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a.$$

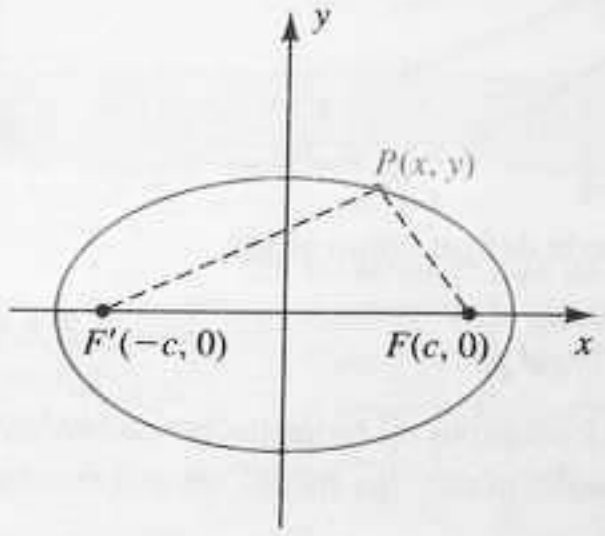


FIGURA 49

Si usamos la fórmula de la distancia y eliminamos radicales, llegamos a la siguiente ecuación en donde $b^2 = a^2 - c^2$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dado que $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, se deduce que $a^2 > b^2$ y, por lo tanto, $a > b$.

Podemos encontrar las intersecciones en x de la elipse con $y = 0$ en la ecuación, de manera que obtendremos $x^2/a^2 = 1$ o bien $x^2 = a^2$; en consecuencia, las intersecciones x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ de la gráfica se llaman **vértices** de la elipse (Fig. 50). El segmento de recta $V'V$ es el **eje mayor.** De igual forma, con $x = 0$ en la ecuación obtenemos

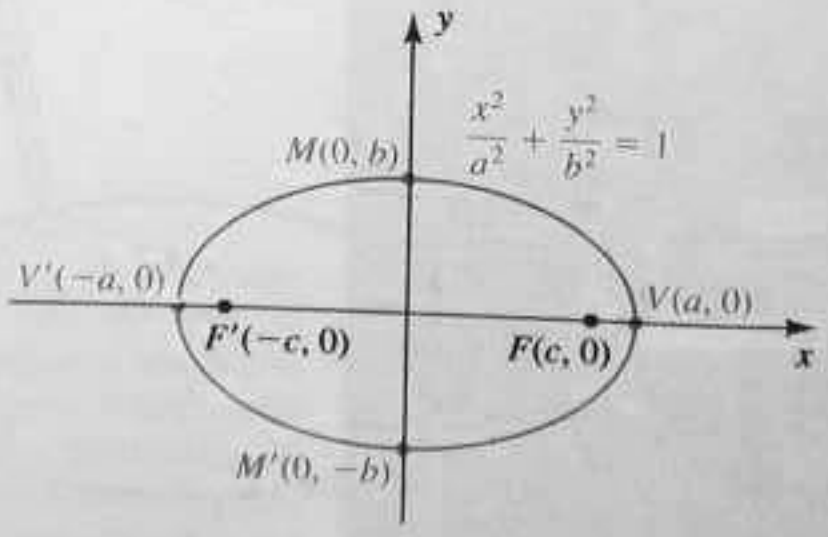


FIGURA 50

www.elsolucionario.net

$y^2/b^2 = 1$, o $y^2 = b^2$. Por lo tanto, las intersecciones en y son b y $-b$. El segmento entre $M'(0, -b)$ y $M(0, b)$ se denomina **eje menor** de la elipse. El eje mayor siempre es más largo que el menor, puesto que $a > b$.

Al aplicar pruebas para simetría, vemos que la elipse es simétrica con respecto al eje x, al eje y al origen.

Del mismo modo, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la elipse son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$ según se expone en la figura 51.

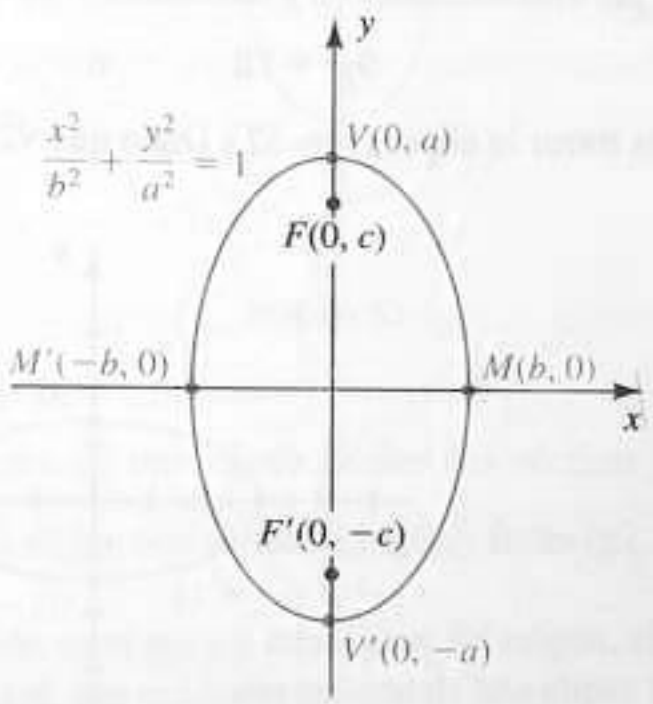


FIGURA 51

El análisis anterior se resume de esta forma:

Ecuaciones estándares de una elipse con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Hemos demostrado que la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos en un eje coordenado siempre se puede escribir

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{o} \qquad qx^2 + py^2 = pq,$$

www.elsolucionario.net

con p y q positivas y $p \neq q$. Si $p > q$, el eje mayor está en el eje x; si $p < q$, el eje mayor está en el eje y. No es necesario memorizar estos datos porque el eje mayor se identifica examinando las intersecciones en x y en y en cualquier problema.

EJEMPLO 1 *Trazado de una elipse con centro en el origen*

Traza la gráfica de $2x^2 + 9y^2 = 18$ y encuentra los focos.

Solución La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en un eje coordenado. Para hallar las intersecciones en x, hacemos $y = 0$ y obtenemos

$$2x^2 = 18 \qquad \text{o} \qquad x = \pm 3.$$

A fin de hallar las intersecciones en y hacemos $x = 0$, con lo cual

$$9y^2 = 18 \qquad \text{o} \qquad y = \pm\sqrt{2}.$$

Ahora podemos trazar la elipse (Fig. 52). Dado que $\sqrt{2} \approx 1.4 < 3$, el eje mayor está en el eje x.

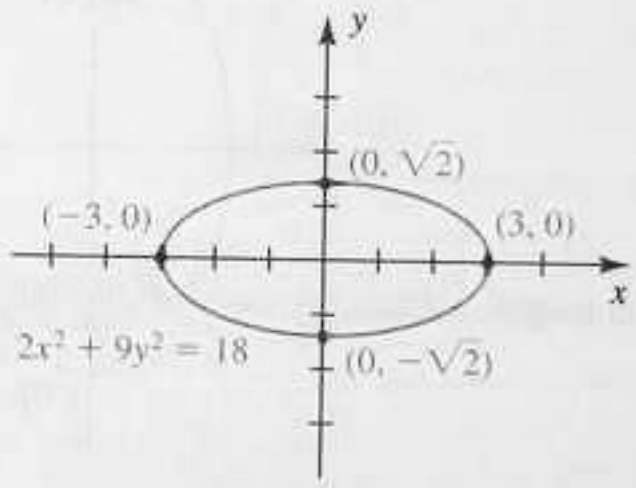


FIGURA 52

Para hallar los focos, hagamos $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$ y calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7.$$

Por lo tanto, $c = \sqrt{7}$, y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$.

EJEMPLO 2 *Trazado de una elipse con centro en el origen*

Traza la gráfica de $9x^2 + 4y^2 = 25$ y encuentra los focos.

Solución Al igual que en el ejemplo 1, la gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en un eje coordenado. A fin de encontrar las intersecciones en x, hacemos $y = 0$ y obtenemos

$$9x^2 = 25 \qquad \text{o} \qquad x = \pm\tfrac{5}{3}.$$

A fin de hallar las intersecciones en y, hacemos $x = 0$ y obtenemos

$$4y^2 = 25 \qquad \text{o} \qquad y = \pm\tfrac{5}{2}.$$

www.elsolucionario.net

Estos cálculos nos dan el diagrama de la figura 53. Puesto que $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, el eje mayor está en el eje y.

Para hallar los focos, hacemos $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{5}{3}$ y calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{125}{36}.$$

Por lo tanto, $c = \sqrt{125/36} = 5\sqrt{5}/6 \approx 1.86$, y los focos son $(0, \pm 5\sqrt{5}/6)$.

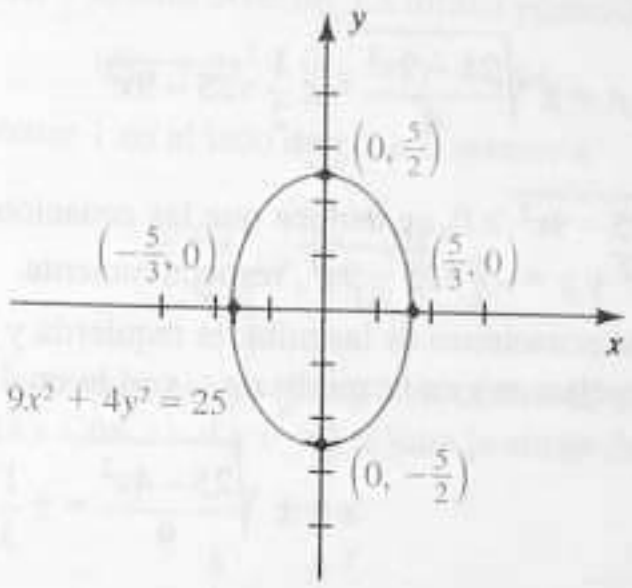


FIGURA 53

EJEMPLO 3 *Determinación de la ecuación de una elipse dados sus vértices y focos*

Encuentra una ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$.

Solución En vista de que los focos están en el eje x y equidistan del origen, el eje mayor está en el eje x y la elipse tiene centro $(0, 0)$. Así, una ecuación general de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Puesto que los vértices son $(\pm 4, 0)$, concluimos que $a = 4$; ya que los focos son $(\pm 2, 0)$, tenemos $c = 2$; por lo tanto,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12,$$

y una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

En ciertas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de una elipse. El ejemplo que viene indica la forma de hallar ecuaciones en tales casos.

EJEMPLO 4 *Determinación de ecuaciones para semielipses*

Encuentra ecuaciones para las mitades superior, inferior, izquierda y derecha de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$.

www.elsolucionario.net

Solución La gráfica de toda la elipse aparece en la figura 53. A fin de establecer las ecuaciones de las mitades superior e inferior, despejamos y en términos de x de esta manera:

$$9x^2 + 4y^2 = 25 \qquad \text{dado}$$

$$y^2 = \frac{25 - 9x^2}{4} \qquad \text{despejar } y^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{25 - 9x^2}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2} \qquad \text{tomar la raíz cuadrada}$$

Puesto que $\sqrt{25 - 9x^2} \geq 0$, se deduce que las ecuaciones para las mitades superior e inferior son $y = \frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$ y $y = -\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$, respectivamente.

Para hallar ecuaciones de las mitades izquierda y derecha, usamos un procedimiento similar al citado y despejamos x en términos de y, con lo cual

$$x = \pm\sqrt{\frac{25 - 4y^2}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}.$$

La mitad izquierda de la elipse tiene la ecuación $x = -\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$ y la mitad derecha está dada por $x = \frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$.

Si tomamos una ecuación estándar de una elipse (de la forma $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) y sustituimos x por $x - h$ y y por $y - k$, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{se convierte en} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

La gráfica de (*) es una elipse con centro (h, k). Al elevar al cuadrado los términos en (*) y simplificar obtenemos una ecuación del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde los coeficientes son números reales y tanto A como C son positivas. A la inversa, si comenzamos con tal ecuación, al completar cuadrados llegamos a una forma que ayuda a darnos el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se ilustra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 5 *Trazado de una elipse con centro (h, k)*

Analiza y traza la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

Solución Comencemos por agrupar los términos que contengan x y los que contengan y:

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 18y) = 71$$

A continuación, factorizamos los coeficientes de x^2 y y^2:

$$16(x^2 + 4x + __) + 9(y^2 - 2y + __) = 71$$

www.elsolucionario.net

Ahora completamos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + \underline{16 \cdot 4} + \underline{9 \cdot 1}$$

Al sumar 4 a la expresión dentro de los primeros paréntesis hemos sumado 64 al lado izquierdo (LI)de la ecuación; por lo tanto, debemos compensar sumando 64 al lado derecho (LD). Del mismo modo, al sumar 1 a la expresión dentro de los segundos paréntesis, añadimos 9 al lado izquierdo; y, así pues, tenemos que sumar 9 al lado derecho. La última ecuación se escribe

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

Al dividir entre 144 para obtener 1 en el lado derecho llegamos a

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

La grafica de la última ecuación es una elipse con centro $C(-2, 1)$ y eje mayor en la recta vertical $x = -2$ (porque $9 < 16$). Con $a = 4$ y $b = 3$ resulta la elipse de la figura 54.

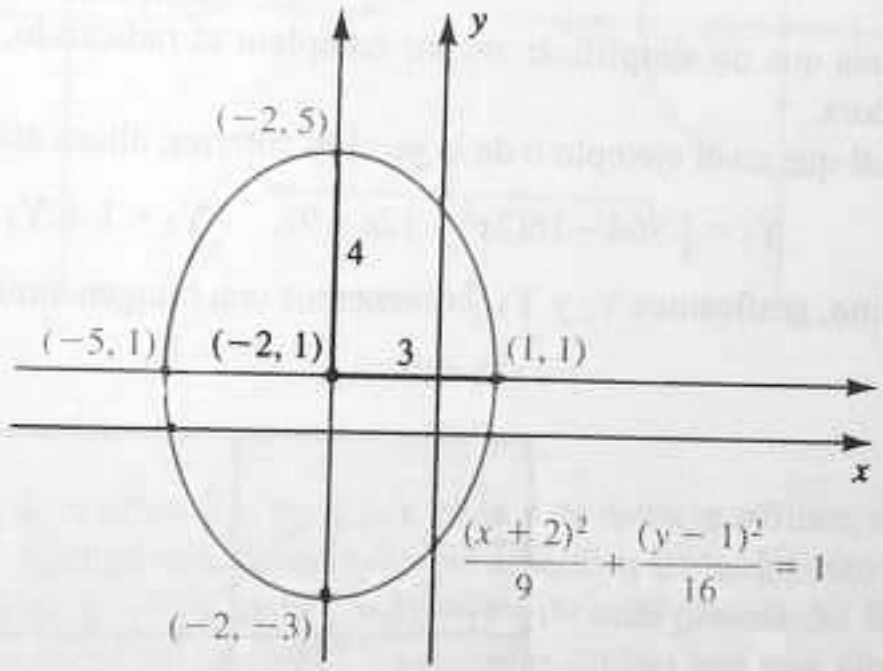


FIGURA 54

Para hallar los focos, calculamos primero

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

La distancia desde el centro de la elipse a los focos es $c = \sqrt{7}$. Puesto que el centro es (–2, 1), los focos son $(-2, 1 \pm \sqrt{7})$.

En ocasiones, las calculadoras graficadoras y los programas de computadora son inútiles para trazar las gráficas de una ecuación del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

como la considerada en el último ejemplo. En estos casos primero despejamos y en términos de x y luego trazamos las dos funciones resultantes, según se expone en el ejemplo que viene.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 6 *Graficado de semielipses*

Traza la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0$.

Solución La ecuación se puede considerar como cuadrática en y de la forma $ay^2 + by^2 + c = 0$ al reacomodar términos de este modo:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática a la ecuación anterior, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$, llegamos a

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8}$$

$$= 1 \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}.$$

Advertirás que no simplificamos por completo el radicando, ya que usaremos una calculadora graficadora.

Igual que en el ejemplo 6 de la sección anterior, ahora asignamos

$$Y_1 = \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}, \quad Y_2 = 1 + Y_1 \quad \text{y} \quad Y_3 = 1 - Y_1.$$

Por último, graficamos Y_2 y Y_3 y obtenemos una imagen similar a la figura 55.

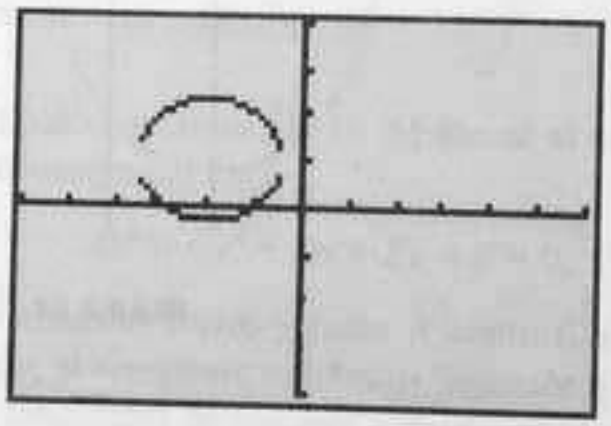


FIGURA 55 [–6, 6] por [–4, 4]

Las elipses pueden ser muy planas o casi circulares. Para obtener información sobre la *redondez* de una elipse, en ocasiones usamos el término *excentricidad*, que se define como sigue, con a, b y c con los mismos significados que antes.

Definición de excentricidad

La **excentricidad** e de una elipse es

$$e = \frac{\text{distancia del centro al foco}}{\text{distancia del centro al vértice}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

www.elsolucionario.net

Consideremos la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, y supongamos que la longitud $2a$ del eje mayor es fija y la longitud $2b$ del eje menor es variable (observa que $0 < b < a$). Puesto que b^2 es positiva, $a^2 - b^2 < a^2$ y, por lo tanto, $\sqrt{a^2 - b^2} < a$. Al dividir entre a ambos lados de la última desigualdad tenemos $\sqrt{a^2 - b^2}/a < 1$, o $0 < e < 1$. Si b es cercana a 0 (c es cercana a a), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$, $e \approx 1$ y la elipse es muy plana. Este caso se ilustra en la figura 56a, con $a = 2$, $b = 0.3$ y $e \approx 0.99$. Si b es cercana a a (c es cercana a 0), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, $e \approx 0$, y la elipse es casi circular. Este caso se expone en la figura 56b, con $a = 2$, $b = 1.9999$ y $e \approx 0.01$.

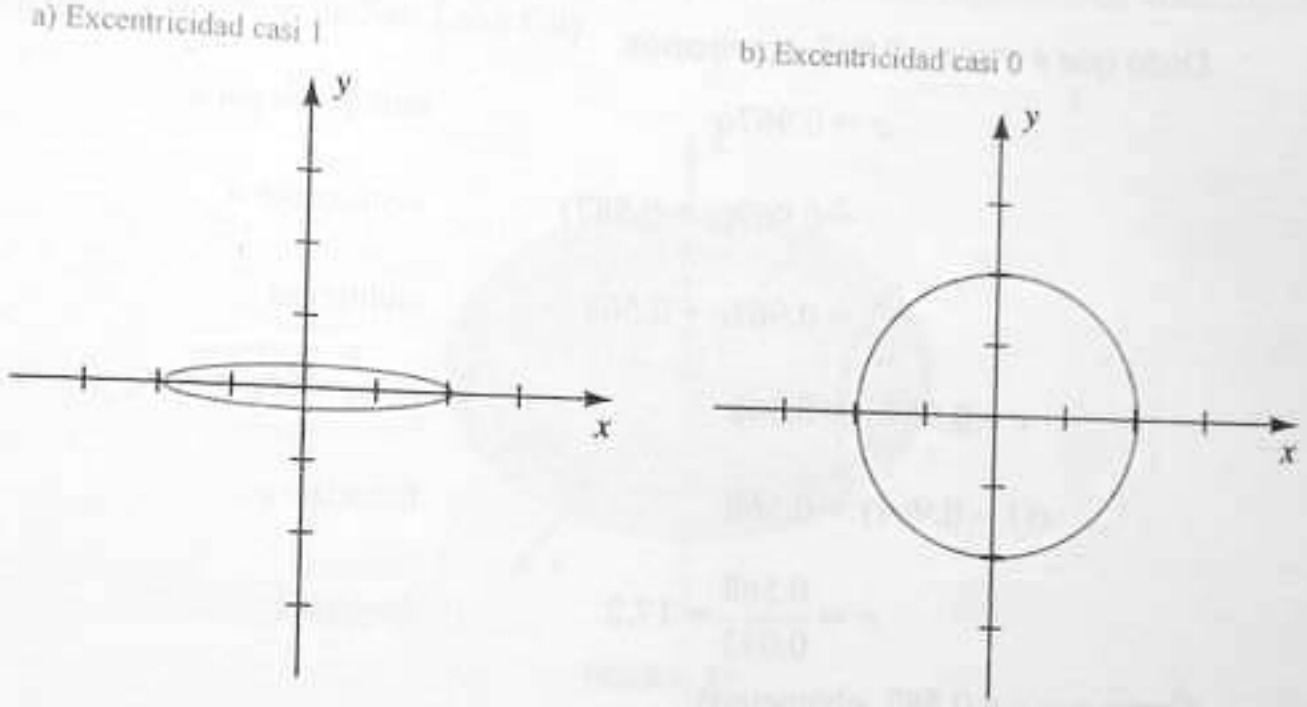


FIGURA 56

Tras muchos años de analizar una enorme cantidad de datos empíricos, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló tres leyes que describen el movimiento planetario alrededor del Sol. La primera ley de Kepler señala que la órbita de cada planeta del Sistema Solar es una elipse con el Sol en un foco. En su mayor parte, estas órbitas son casi circulares, así que sus correspondientes excentricidades son cercanas a 0. Con objeto de ilustrar lo anterior, para la Tierra $e \approx 0.017$; Marte, $e \approx 0.093$ y Urano $e \approx 0.046$. Las órbitas de Mercurio y Plutón son menos circulares, con excentricidades de 0.206 y 0.249, respectivamente.

Muchos cometas tienen órbitas elípticas con el Sol en un foco. En este caso la excentricidad e es cercana a 1 y la elipse es muy plana. En el próximo ejemplo usamos la **unidad astronómica** (UA) —es decir, la distancia promedio de la Tierra al Sol— para especificar grandes distancias (1 UA $\approx$ 93 000 000 mi).

EJEMPLO 7 *Cálculo de una distancia en una trayectoria elíptica*

El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad $e = 0.967$. Lo más cerca que llega al Sol es 0.587 UA. Calcula la distancia máxima del cometa desde el Sol, al 0.1 UA más cercano.

Solución La figura 57 ilustra la órbita del cometa, donde c es la distancia desde el centro de la elipse a un foco (el Sol) y $2a$ es la longitud del eje mayor.

Puesto que $a - c$ es la distancia mínima entre el Sol y el cometa, tenemos (en UA)

$$a - c = 0.587 \qquad \text{o} \qquad a = c + 0.587.$$

www.elsolucionario.net

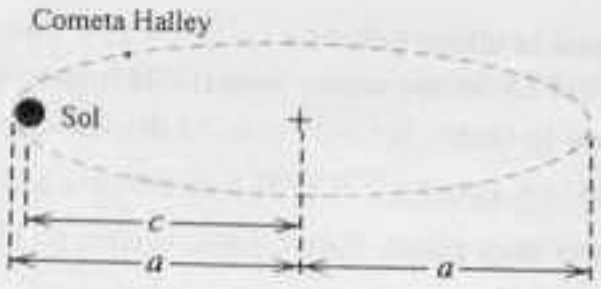


FIGURA 57

Dado que $e = c/a = 0.967$, obtenemos:

$$\begin{aligned} c &= 0.967a && \text{multiplicar por } a \\ &= 0.967(c + 0.587) && \text{sustituir por } a \\ &\approx 0.967c + 0.568 && \text{multiplicar} \\ c - 0.967c &\approx 0.568 && \text{restar } 0.967c \\ c(1 - 0.967) &\approx 0.568 && \text{factorizar } c \\ c &\approx \frac{0.568}{0.033} \approx 17.2 && \text{despejar } c \end{aligned}$$

Como $a = c + 0.587$, obtenemos

$$a \approx 17.2 + 0.587 \approx 17.8,$$

y la distancia máxima entre el Sol y el cometa es

$$a + c \approx 17.8 + 17.2 = 35.0 \text{ AU}.$$

Una elipse tiene una *propiedad reflectora* análoga a la de la parábola estudiada al final de la sección anterior. Para ilustrar esto, denotemos con l la línea tangente en un punto P en una elipse con focos F y F' (Fig. 58). Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l, y β es el ángulo agudo entre FP

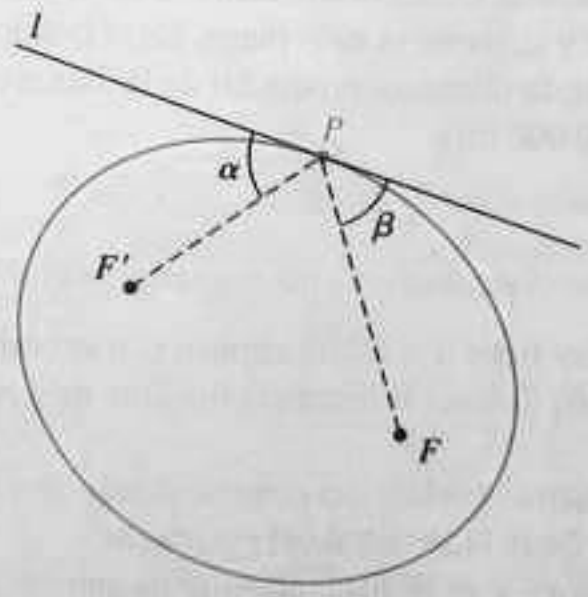


FIGURA 58

www.elsolucionario.net

y l, es posible demostrar que $\alpha = \beta$. Así, si un rayo de luz o sonido emana de un foco, es reflejado al otro foco. Esta propiedad se utiliza en el diseño de ciertos tipos de equipo óptico.

Si la elipse con centro O y focos F' y F en el eje x se gira alrededor del eje x (Fig. 59), obtenemos una superficie tridimensional llamada **elipsoide.** La mitad superior o inferior es un semielipsoide, igual que las mitades derecha e izquierda. Las ondas sonoras u otros impulsos emitidos desde el foco F' se reflejarán del elipsoide al foco F. Esta propiedad se aprovecha en el diseño de *galerías susurrantes* —es decir, estructuras con techos elipsoidales— en que una persona que hable en voz baja en un foco es escuchada en el otro foco. Algunos ejemplos de galerías susurrantes en la Unión Americana son la rotonda del edificio del capitolio, en Washington, D.C. y el tabernáculo mormón de Salt Lake City.

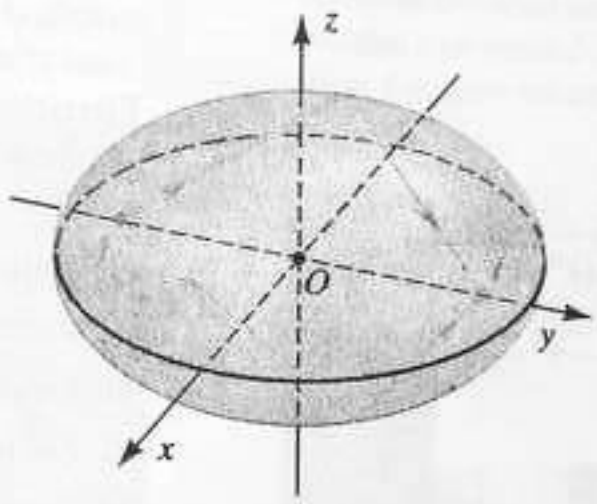


FIGURA 59

La propiedad reflectora de elipsoides (y semielipsoides) se usa en medicina moderna en un aparato llamado *litotríptero*, que desintegra cálculos renales por medio de ondas de choque de alta energía bajo el agua. Después de tomar medidas extremadamente precisas, el operador coloca al paciente de modo que el cálculo quede en un foco; luego genera ondas de choque de ultraalta frecuencia en el otro foco, y las ondas reflejadas desbaratan el cálculo. El tiempo de recuperación con esta técnica suele ser de tres a cuatro días, en lugar de las dos o tres semanas con cirugía convencional. Además, la tasa de mortalidad es menor al 0.01%, en comparación con el 2 o 3% para la cirugía tradicional (Ejers. 47 y 48).

4.7 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 14: encuentra los vértices y focos de la elipse. Traza su gráfica y muestra los focos.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

3. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$

4. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{49} = 1$

5. $4x^2 + y^2 = 16$

6. $y^2 + 9x^2 = 9$

7. $4x^2 + 25y^2 = 1$

8. $10y^2 + x^2 = 5$

9. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

www.elsolucionario.net

10. $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

11. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$

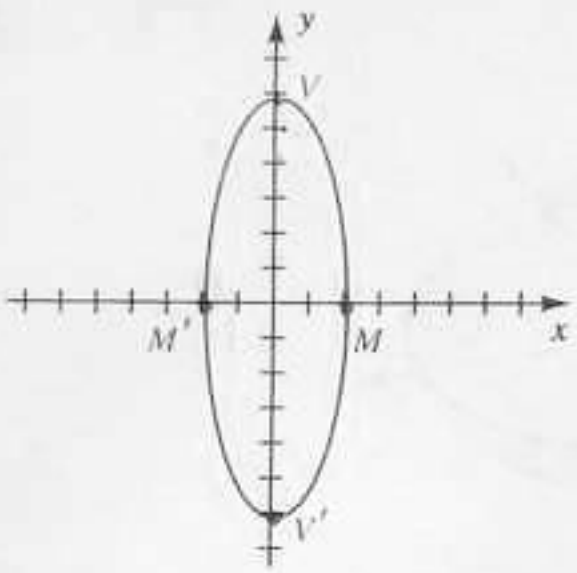
12. $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

13. $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

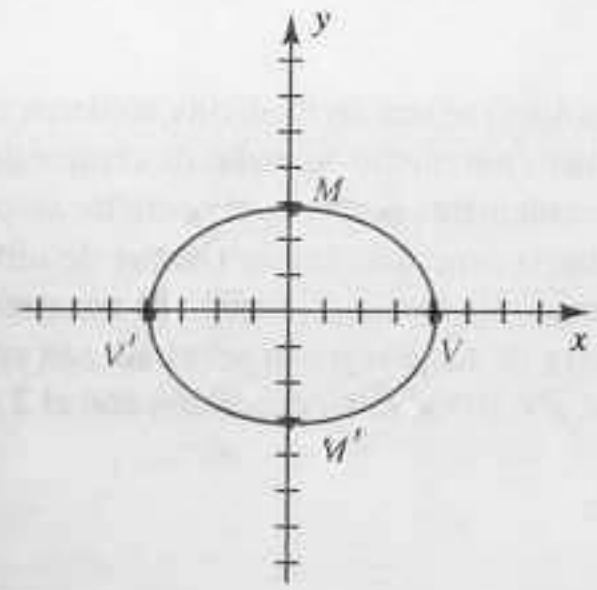
14. $4x^2 + y^2 = 2y$

Ejercicios 15 al 18: propón una ecuación para la elipse de la figura.

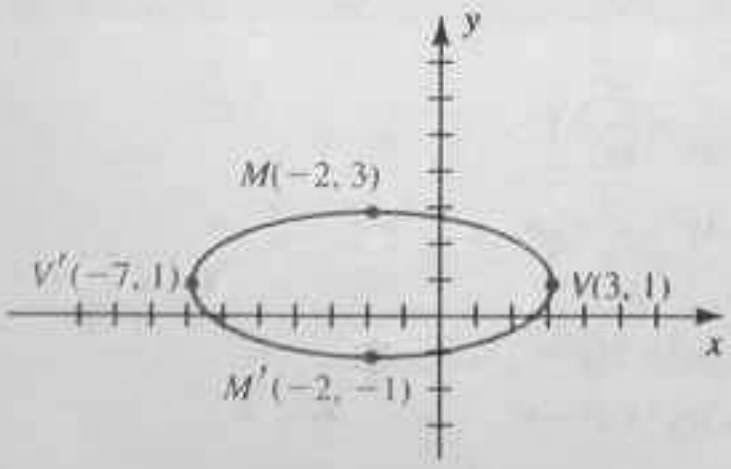
15.



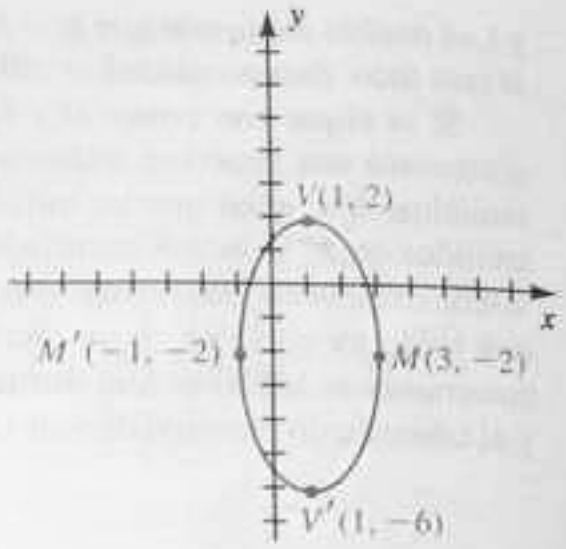
16.



17.



18.



Ejercicios 19 al 30: encuentra una ecuación para la elipse con centro en el origen y que satisfaga las condiciones dadas.

19. Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$

20. Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$

21. Vértices $V(0, \pm 5)$, eje menor de longitud 3

22. Focos $F(\pm 3, 0)$, eje menor de longitud 2

23. Vértices $V(0, \pm 6)$ que pasa por (3, 2)

24. Que pasa por (2, 3) y (6, 1)

25. Excentricidad $\frac{3}{4}$, vértices $V(0, \pm 4)$

26. Excentricidad $\frac{1}{2}$, vértices en el eje x que pasa por (1, 3)

27. Intersecciones en x ± 2, intersecciones en y $\pm\frac{1}{3}$

28. Intersecciones en x 1/2, intersecciones en y ± 4

29. Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5

30. Eje mayor vertical de longitud 7, eje menor de longitud 6

Ejercicios 31 al 34: halla una ecuación para el conjunto de puntos de un plano xy tal que la suma de las distancias de F y F' sea k.

31. $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$; $k = 10$

32. $F(12, 0)$, $F'(-12, 0)$; $k = 26$

33. $F(0, 15)$, $F'(0, -15)$; $k = 34$

34. $F(0, 8)$, $F'(0, -8)$; $k = 20$

Ejercicios 35 al 42: indica si la gráfica de la ecuación es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una elipse y encuentra una ecuación para la elipse.

35. $y = 11\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{49}}$

36. $y = -6\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$

37. $x = -\frac{1}{3}\sqrt{9 - y^2}$

38. $x = \frac{4}{7}\sqrt{25 - y^2}$

www.elsolucionario.net

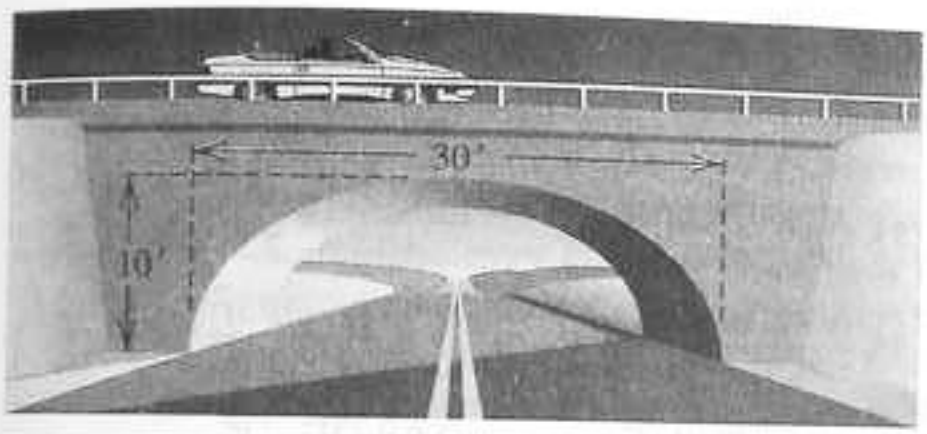
39. $x = 1 + 2\sqrt{1 - \dfrac{(y+2)^2}{9}}$

40. $x = -2 - 5\sqrt{1 - \dfrac{(y-1)^2}{16}}$

41. $y = 2 - 7\sqrt{1 - \dfrac{(x+1)^2}{9}}$

42. $y = -1 + \sqrt{1 - \dfrac{(x-3)^2}{16}}$

43. **Dimensiones de un arco** El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 ft de un lado al otro y la parte más alta del arco mide 10 ft arriba de la calzada horizontal (ve la figura). Encuentra la altura del arco a 6 ft del centro de la base.

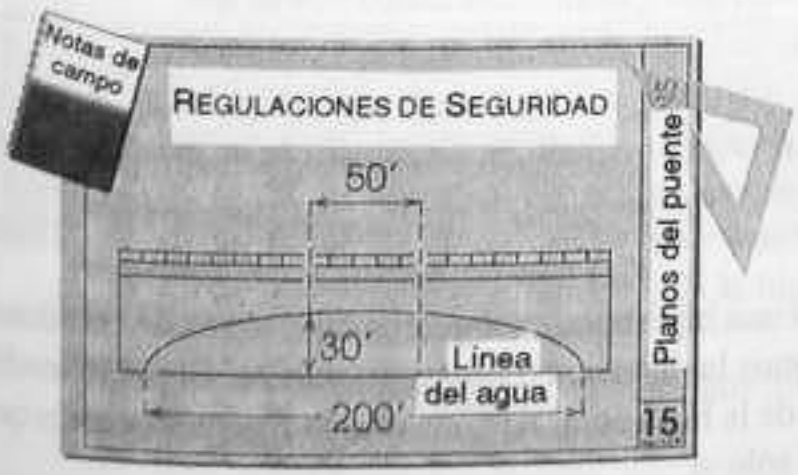


EJERCICIO 43

44. **Diseño de un puente** Se va a construir un puente para cruzar un río que mide 200 ft de ancho. El arco del puente debe ser semielíptico y construirse de modo que un barco de menos de 50 ft de ancho y 30 ft de alto pueda pasar con seguridad por el arco, como se ve en la figura.

a) Encuentra una ecuación para definir el arco.

b) Calcula la altura del arco en el centro del puente.



EJERCICIO 44

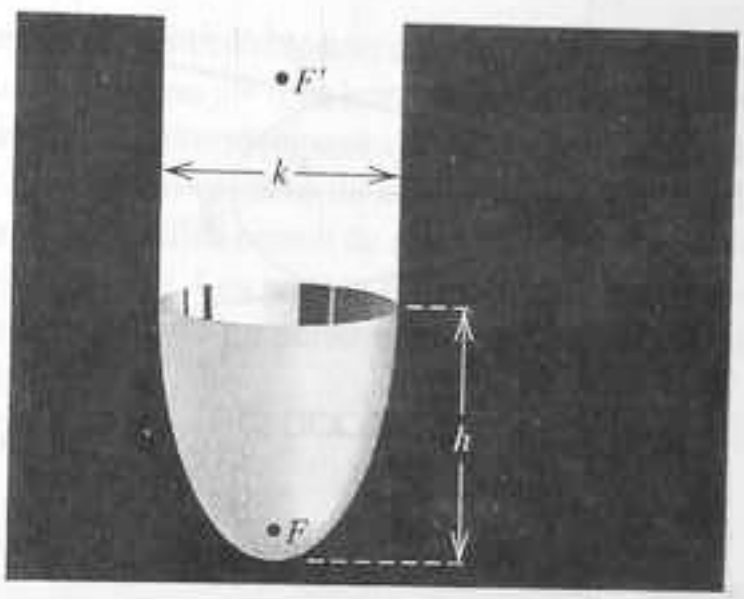
45. **Órbita de la Tierra** Supongamos que la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra es de 186 000 000 mi y que la excentricidad es 0.017. Calcula, a las 1000 mi más cercanas, las distancias máxima y mínima entre la Tierra y el Sol.

46. **Órbita de Mercurio** Mercurio se mueve en una órbita elíptica que tiene excentricidad 0.206 y eje mayor de longitud 0.774 UA. Encuentra las distancias máxima y mínima entre Mercurio y el Sol.

47. **Reflector elíptico** La forma básica de un reflector elíptico es una semielipsoide de altura h y diámetro k (ve la figura). Las ondas emitidas desde el foco F se reflejarán de la superficie al foco F'.

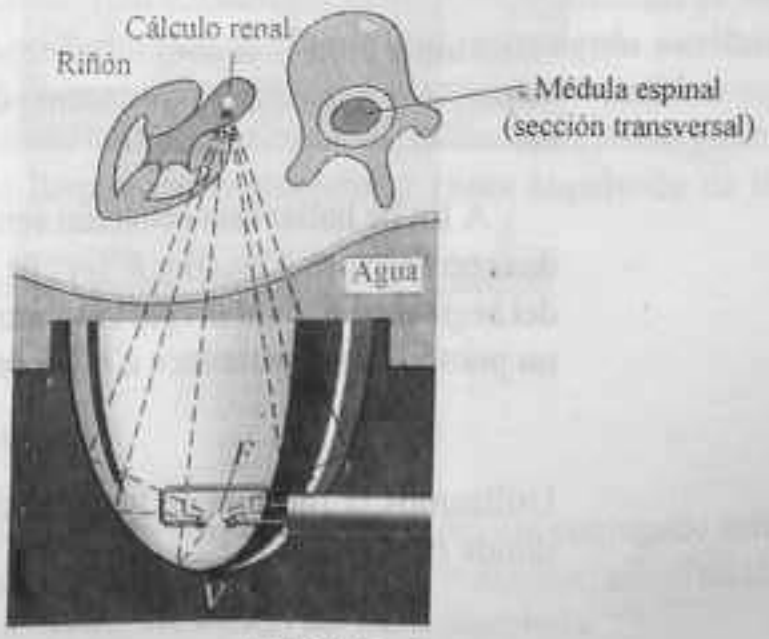
a) Indica las distancias $d(V, F)$ y $d(V, F')$ en términos de h y k.

b) Un reflector elíptico de 17 cm de altura se va a construir de modo que las ondas emitidas desde F se reflejen a un punto F' que está a 32 cm de V. Encuentra el diámetro del reflector y la ubicación de F.



EJERCICIO 47

48. **Operación del litotríptero** Se va a construir un litotríptero de 15 cm de altura y 18 de diámetro (ve la figura). Las ondas de choque de alta energía bajo el agua se



EJERCICIO 48

www.elsolucionario.net

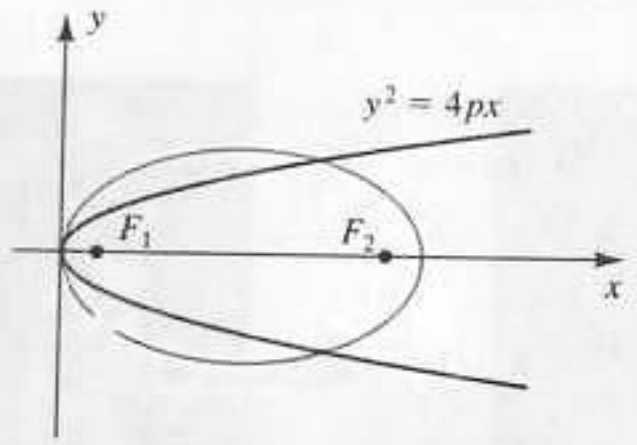
emitirán desde el foco F que es el punto más cercano al vértice V

a) Encuentra la distancia de V a F.

b) ¿A qué distancia de V (en dirección vertical) debe localizarse el cálculo?

49. Galería susurrante El techo de una galería susurrante tiene la forma del semielipsoide de la figura 59, con el punto más alto del techo a 15 ft sobre el piso elíptico y los vértices del piso a 50 ft uno de otro. Si dos personas están de pie en los focos F' y F, ¿a qué distancia de los vértices se encuentran sus pies?

50. Una elipse tiene un vértice en el origen y focos $F_1(p, 0)$ y $F_2(p + 2c, 0)$, según se aprecia en la figura. Si el foco de F_1 está fijo y (x, y) está en la elipse, demuestra que y^2 se aproxima a $4px$ conforme $c \to \infty$. (Así, a medida que $c \to \infty$, la elipse adopta la forma de una parábola).



EJERCICIO 50

C **Ejercicios 51 y 52: los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas. Dado el semieje mayor a en millones de kilómetros y excentricidad e, grafica la órbita para el planeta. Centra el eje mayor en el eje x y localiza la ubicación del Sol en un foco.**

51. Trayectoria de la Tierra $a = 149.6$, $e = 0.093$

52. Trayectoria de Plutón $a = 5913$, $e = 0.249$

C **Ejercicios 53 al 56: grafica las elipses en el mismo plano coordenado y calcula sus puntos de intersección.**

53. $\dfrac{x^2}{2.9} + \dfrac{y^2}{2.1} = 1$; $\dfrac{x^2}{4.3} + \dfrac{(y-2.1)^2}{4.9} = 1$

54. $\dfrac{x^2}{3.9} + \dfrac{y^2}{2.4} = 1$; $\dfrac{(x+1.9)^2}{4.1} + \dfrac{y^2}{2.5} = 1$

55. $\dfrac{(x+0.1)^2}{1.7} + \dfrac{y^2}{0.9} = 1$; $\dfrac{x^2}{0.9} + \dfrac{(y-0.25)^2}{1.8} = 1$

56. $\dfrac{x^2}{3.1} + \dfrac{(y-0.2)^2}{2.8} = 1$; $\dfrac{(x+0.23)^2}{1.8} + \dfrac{y^2}{4.2} = 1$

4.8 Hipérbolas

La definición de una hipérbola es semejante a la de una elipse. El único cambio es que en lugar de usar la *suma* de distancias desde dos puntos fijos, usamos la *diferencia*.

Definición de una hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos de un plano, la diferencia de cuyas distancias desde dos puntos fijos (los **focos**) del plano es una constante positiva.

A fin de hallar una ecuación sencilla para una hipérbola, escogemos un sistema de coordenadas con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotamos la distancia (constante) con $2a$. El punto medio del segmento $F'F$ (el origen) se llama **centro** de la hipérbola. Al consultar la figura 60 vemos que un punto $P(x, y)$ pertenece a la hipérbola si y sólo si

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Utilizamos la fórmula de la distancia, eliminamos radicales y obtenemos la siguiente ecuación, donde $b^2 = c^2 - a^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

www.elsolucionario.net

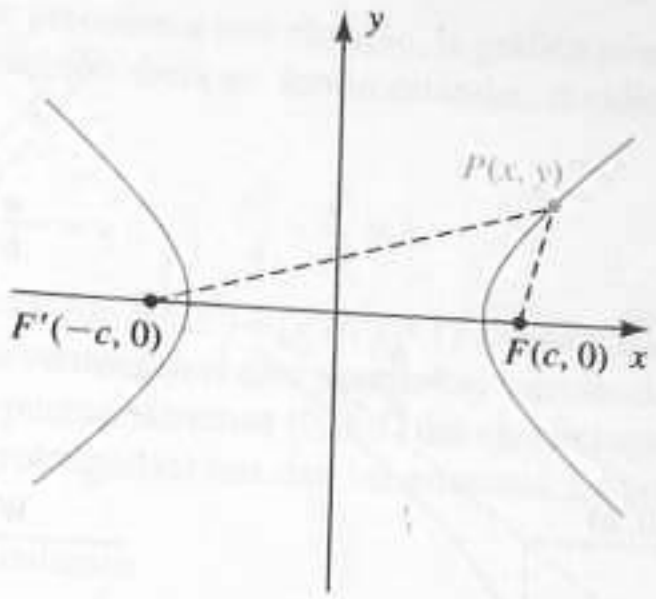


FIGURA 60

Al aplicar pruebas de simetría, la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Podemos encontrar las intersecciones en x de la hipérbola con $y = 0$ en la ecuación; de esta manera llegamos a $x^2/a^2 = 1$, o sea $x^2 = a^2$ y, en consecuencia, las intersecciones x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ de la gráfica se llaman **vértices** de la hipérbola (Fig. 61). El segmento de recta $V'V$ se denomina **eje transverso.** La gráfica carece de intersección y porque la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ tiene las soluciones *complejas* $y = \pm bi$. Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son puntos extremos del **eje conjugado** $W'W$. Los puntos W y W' no pertenecen a la hipérbola pero, según veremos, son útiles para describir la gráfica.

Al despejar y de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ resulta

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Si $x^2 - a^2 < 0$, o lo que es lo mismo, $-a < x < a$, entonces no hay puntos (x, y) en la gráfica. Hay puntos $P(x, y)$ en la gráfica si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

Es posible probar que *las rectas* $y = \pm(b/a)x$ *son asíntotas para la hipérbola.* Estas asíntotas sirven como excelentes guías para dibujar la gráfica. Una forma sencilla de trazar las asíntotas consiste en encontrar primero los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (Fig. 61). Si se dibujan líneas verticales y horizontales que pasen por estos puntos extremos de los ejes transverso y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del **rectángulo auxiliar** resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$; por lo tanto, al prolongar estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$. La hipérbola se traza como en la figura 61, usando las asíntotas como guías. Las dos partes que conforman la hipérbola se llaman **rama derecha** y **rama izquierda** de la hipérbola.

Del mismo modo, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la hipérbola son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje conjugado son $(\pm b, 0)$, según se aprecia en la figura 62. Las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$ (*no* $y = \pm(b/a)x$, como en el caso anterior), y anora nos referimos a las **ramas superior** e **inferior** de la hipérbola.

El análisis anterior se resume de este modo:

www.elsolucionario.net

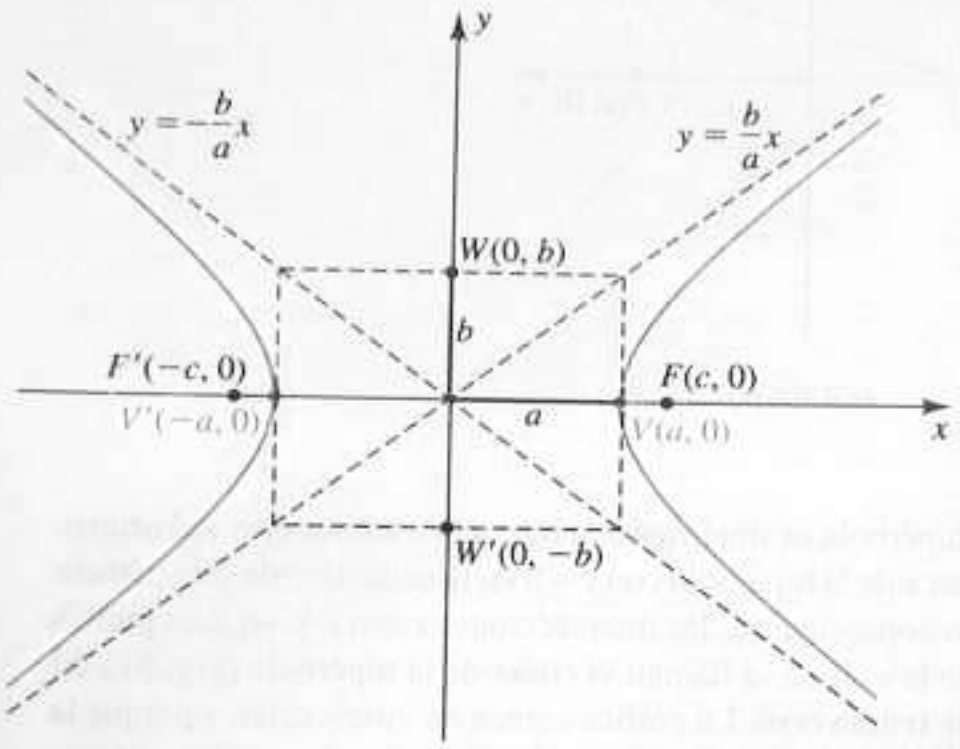


FIGURA 61

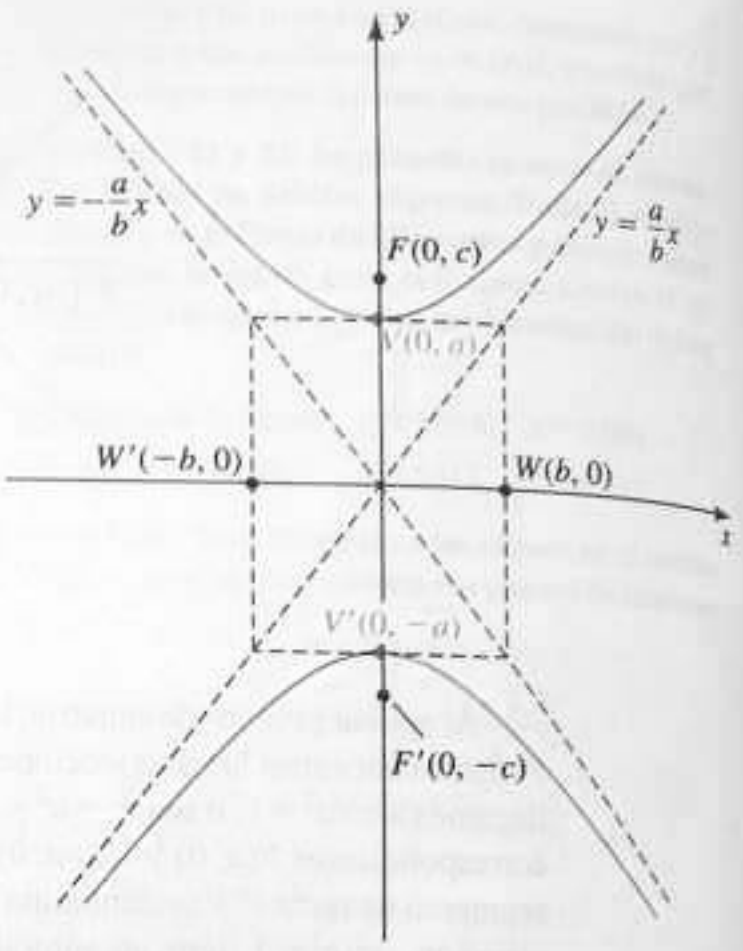


FIGURA 62

Ecuaciones estándares de una hipérbola con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con centro en el origen. La longitud del eje transverso es $2a$ y la longitud del eje conjugado, $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Hemos demostrado que una ecuación de una hipérbola con centro en el origen y focos en un eje coordenado siempre se puede escribir en la forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{o} \qquad qx^2 + py^2 = pq,$$

donde p y q tienen signos contrarios. Los vértices están en el eje x si p es positiva o en el eje y si q es positiva.

EJEMPLO 1 *Trazo de una hipérbola con centro en el origen*

Traza la gráfica de $9x^2 - 4y^2 = 36$. Encuentra los focos y ecuaciones de las asíntotas.

www.elsolucionario.net

Solución Según las observaciones que preceden a este ejemplo, la gráfica es una hipérbola con centro en el origen. Para expresar la ecuación dada en forma estándar, dividimos ambos lados entre 36 y simplificamos, con lo cual

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Al comparar $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$ con $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, vemos que $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$; esto es $a = 2$ y $b = 3$. La hipérbola tiene sus vértices en el eje x porque hay intersecciones x pero no intersecciones y. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan el rectángulo auxiliar cuyas diagonales (prolongadas) nos dan las asíntotas. La gráfica de la ecuación aparece en la figura 63.

Para hallar los focos calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13.$$

Así, $c = \sqrt{13}$, y los focos son $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm\frac{3}{2}x$, se encuentran consultando la gráfica o la ecuación $y = \pm(b/a)x$.

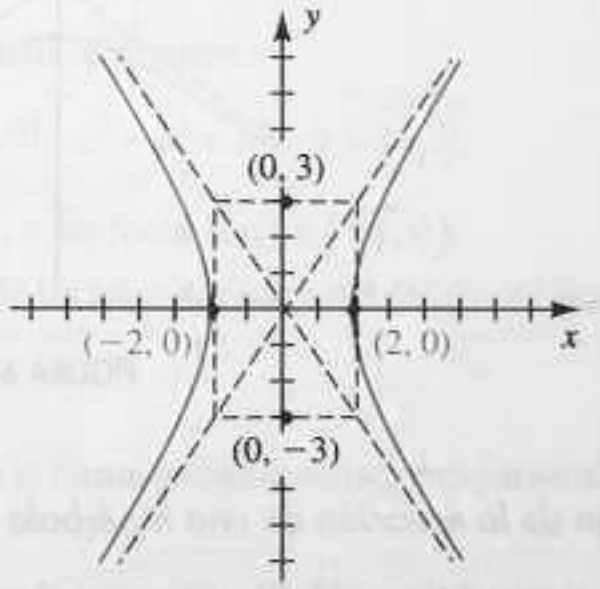


FIGURA 63

El ejemplo anterior indica que, para hipérbolas, no siempre es verdadero que $a > b$, como es el caso para elipses. De hecho, es factible tener $a < b$, $a > b$ o $a = b$.

EJEMPLO 2 *Trazo de una hipérbola con centro en el origen*

Traza la gráfica de $4y^2 - 2x^2 = 1$. Encuentra los focos y ecuaciones de las asíntotas.

Solución Para expresar la ecuación dada en forma estándar, escribimos

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Así,

$$a^2 = \tfrac{1}{4}, \qquad b^2 = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = \tfrac{3}{4},$$

www.elsolucionario.net

y en consecuencia

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La hipérbola tiene sus vértices en el eje y, ya que hay intersecciones en y pero no intersecciones en x. Los vértices son $(0, \pm\frac{1}{2})$, los puntos extremos de los ejes conjugados son $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$, y los focos son $(0, \pm\sqrt{3}/2)$. La gráfica aparece en la figura 64.

Para hallar las ecuaciones de las asíntotas, consultamos la figura o usamos $y = \pm(a/b)x$, con lo cual $y = \pm(\sqrt{2}/2)x$.

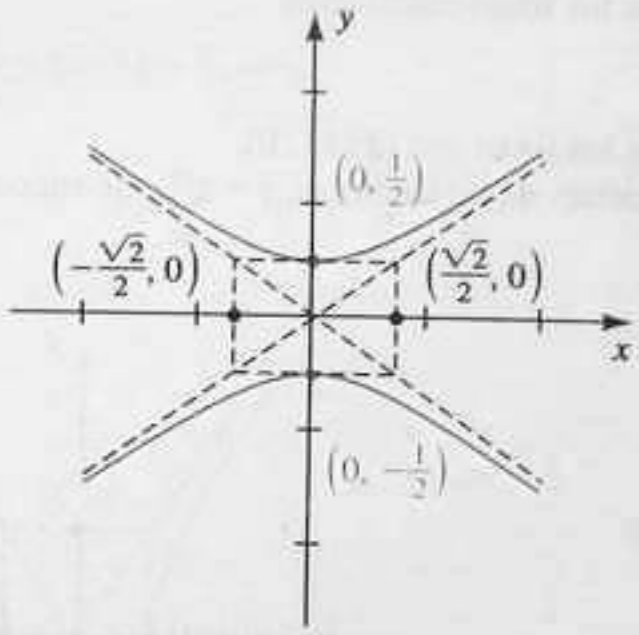


FIGURA 64

EJEMPLO 3 *Determinación de la ecuación de una hipérbola que satisfaga condiciones prescritas*

Una hipérbola tiene vértices $(\pm 3, 0)$ y pasa por el punto $P(5, 2)$. Encuentra su ecuación, focos y asíntotas.

Solución Comenzamos por trazar una hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ que pasa por el punto $P(5, 2)$, igual que en la figura 65.

Una ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dado que $P(5, 2)$ está en la hipérbola, las coordenadas x y y satisfacen esta ecuación; esto es

$$\frac{5^2}{3^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1.$$

Al despejar b^2 obtenemos $b^2 = \frac{9}{4}$, y, por lo tanto, una ecuación para la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

www.elsolucionario.net

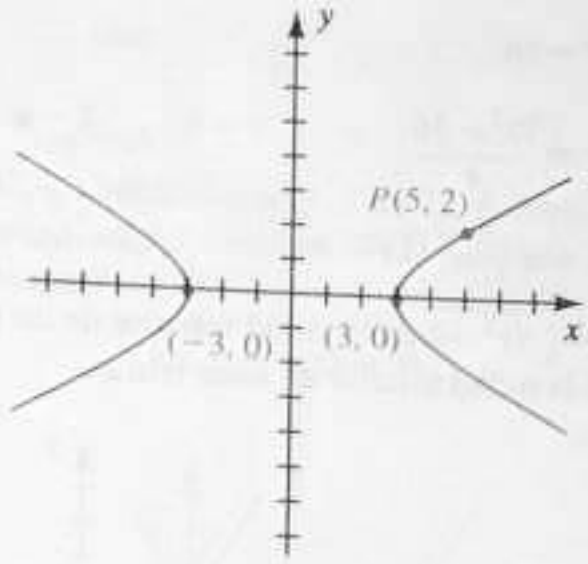


FIGURA 65

o, lo que equivale,

$$x^2 - 4y^2 = 9.$$

Para hallar los focos, calculamos primero

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{45}{4}.$$

Así pues, $c = \sqrt{\tfrac{45}{4}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3.35$, y los focos son $\left(\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{5}, 0\right)$.

Las ecuaciones generales de las asíntotas son $y = \pm(b/a)x$. Al sustituir $a = 3$ y $b = \tfrac{3}{2}$ llegamos a $y = \pm\tfrac{1}{2}x$.

El siguiente ejemplo indica la forma de hallar ecuaciones para ciertas partes de una hipérbola.

EJEMPLO 4 *Determinación de ecuaciones de porciones de una hipérbola*

La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se estudió en el ejemplo 1. Despeja la ecuación como se indica y describe la gráfica resultante.

a) Despeja x en términos de y **b)** Despeja y en términos de x

Solución **a)** Despejamos en términos de y:

$9x^2 - 4y^2 = 36$ dado

$x^2 = \dfrac{36 + 4y^2}{9}$ despejar x^2

$x = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ factorizar 4, y tomar raíz cuadrada

La gráfica de la ecuación $x = \tfrac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama derecha de la hipérbola del ejemplo 1 (y repetida en la Fig. 66), y la gráfica de $x = -\tfrac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama izquierda.

b) Despejamos y en términos de x: *(continúa)*

www.elsolucionario.net

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad \text{dado}$$

$$y^2 = \frac{9x^2 - 36}{4} \qquad \text{despeja } y^2$$

$$y = \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4} \qquad \text{factorizar 9 y tomar raíz cuadrada}$$

La gráfica de $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad superior de las ramas derecha e izquierda, y la gráfica de $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad inferior de estas ramas.

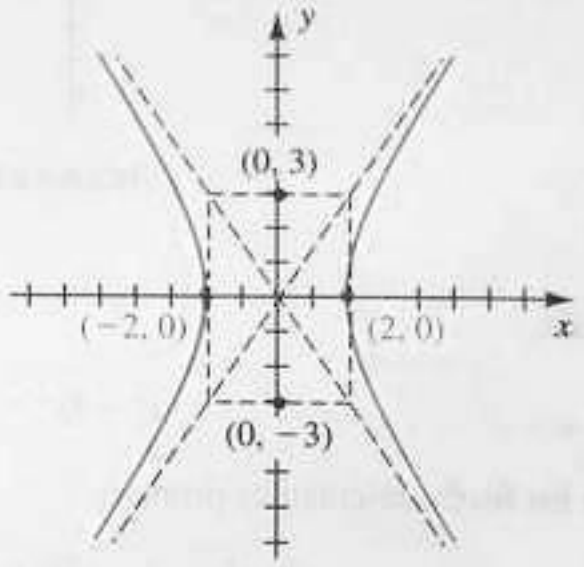


FIGURA 66

Como fue el caso de elipses, podemos usar translaciones para ayudar a trazar hipérbolas con centros en algún punto $(h, k) \neq (0, 0)$. El próximo ejemplo expone esta técnica.

EJEMPLO 5 *Trazo de una hipérbola con centro* (h, k)

Analiza y traza la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

Solución Se acomodan los cálculos mediante un procedimiento semejante al utilizado para elipses en el ejemplo 5 de la sección previa:

$$(9x^2 - 54x) + (-4y^2 - 16y) = -29 \qquad \text{agrupar términos}$$

$$9(x^2 - 6x + _) - 4(y^2 + 4y + _) = -29 \qquad \text{factorizar 9 y } -4$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + \underline{9 \cdot 9} - \underline{4 \cdot 4} \qquad \text{completar los cuadrados}$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 36 \qquad \text{factorizar y simplificar}$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \qquad \text{dividir entre 36}$$

La última ecuación indica que la hipérbola tiene centro $C(3, -2)$ con vértices y focos en la recta horizontal $y = -2$, porque el término en x es positivo. También sabemos que

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 13.$$

www.elsolucionario.net

Por lo tanto,

$$a = 2, \qquad b = 3 \qquad \text{y} \qquad c = \sqrt{13}.$$

Según se ilustra en la figura 67, los vértices son $(3 \pm 2, -2)$, es decir, $(5, -2)$ y $(1, -2)$. Los puntos extremos del eje conjugado son $(3, -2 \pm 3)$, esto es, $(3, 1)$ y $(3, -5)$. Los focos son $(3 \pm \sqrt{13}, -2)$, y las ecuaciones de las asíntotas son

$$y + 2 = \pm \tfrac{3}{2}(x - 3).$$

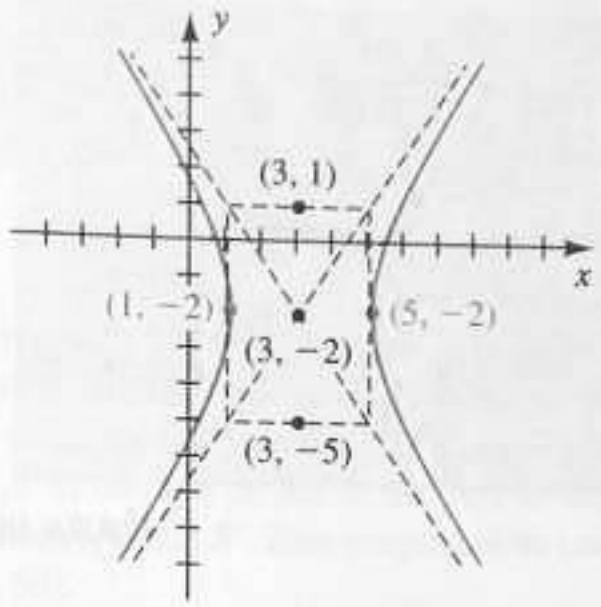


FIGURA 67

Los resultados de las secciones 4.6 a la 4.8 indican que la gráfica de toda ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, excepto en ciertos casos degenerados en que se obtiene un punto, una o dos rectas o no se obtiene gráfica. Aun cuando hemos considerado sólo ejemplos especiales, nuestros métodos son aplicables a cualquiera de tales ecuaciones. Si A y C son iguales y no son 0, entonces la gráfica, cuando existe, es un círculo o, en casos excepcionales, un punto. Si A y C no son iguales pero poseen el mismo signo, se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando existe, es una elipse (o un punto). Si A y C tienen signos contrarios, resulta una ecuación de una hipérbola o, quizás en el caso degenerado, dos rectas que se cortan. Si A o C (pero no ambas) es 0, la gráfica es una parábola o, en ciertos casos, un par de rectas paralelas.

Concluiremos esta sección con una aplicación con hipérbolas.

EJEMPLO 6 *Localización de un barco*

La estación A de guardacostas está a 200 mi directamente al este de otra estación B. Un barco navega en una recta paralela a la línea que enlaza A y B, a 50 mi al norte. Se envían señales de radio de A y B a razón de 980 ft/μs (microsegundo). Si a la 1:00 p.m., la señal de B llega a la embarcación 400 μs después que la señal de A, encuentra la posición del navío en ese momento.

Solución Introduzcamos un sistema coordenado [Fig. 68a)], con las estaciones en los puntos A y B en el eje x y el barco en P en la recta $y = 50$. Dado que a la 1:00 p.m. tarda 400 μs más para que

www.elsolucionario.net

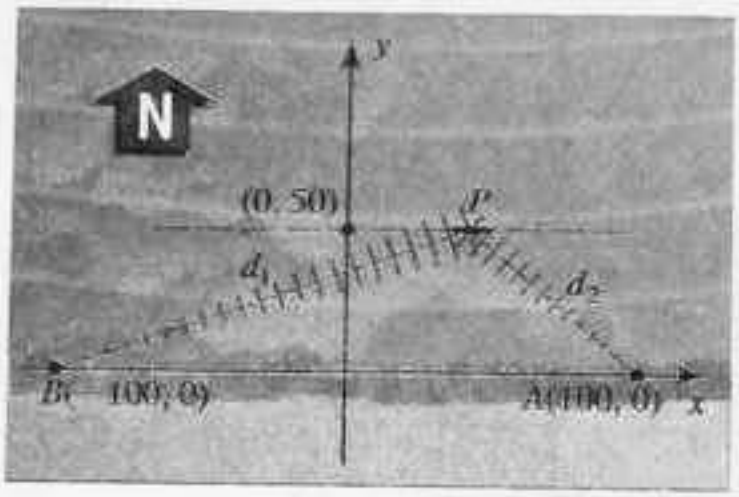
la señal llegue desde B que desde A, la diferencia $d_1 - d_2$ en las distancias indicadas en ese momento es

$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392\,000 \text{ ft.}$$

Al dividir entre 5280 ft/mi se obtiene

$$d_1 - d_2 = \frac{392\,000}{5280} = 74.\overline{24} \text{ mi.}$$

a)



b)

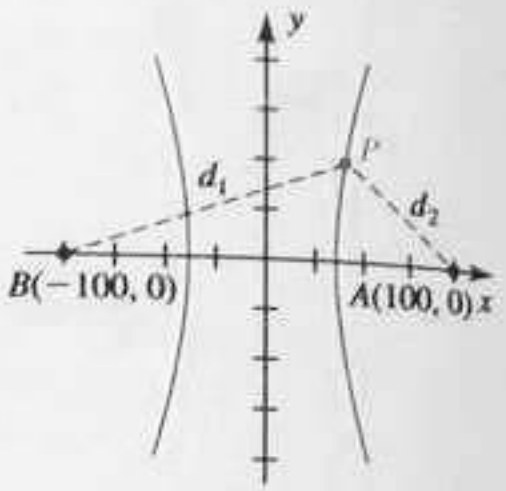


FIGURA 68

A la 1:00 p.m., P está en la rama derecha de una hipérbola cuya ecuación es $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ [Fig. 68b)], formada por todos los puntos cuya diferencia en distancias de los focos B y A es $d_1 - d_2$. En nuestra derivación de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, hacemos $d_1 - d_2 = 2a$; se deduce que esta situación

$$a = \frac{74.\overline{24}}{2} = 37.\overline{12} \qquad \text{y} \qquad a^2 \approx 1378.$$

Puesto que la distancia c desde el origen a cualquier foco es 100

$$b^2 = c^2 - a^2 \approx 10\,000 - 1378 \qquad \text{o} \qquad b^2 \approx 8622.$$

Por lo tanto, una ecuación (aproximada) para la hipérbola con focos A y B y pasa por P es

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{y^2}{8622} = 1.$$

Si $y = 50$ (la coordenada y de P), obtenemos

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{2500}{8622} = 1.$$

Al despejar x llegamos a $x \approx 42.16$. Redondeamos a la milla más cercana y encontramos que las coordenadas de P son aproximadamente (42, 50).

Una extensión del método utilizado en el ejemplo 6 es la base para el sistema de navegación LORAN (por LOng RAnge Navigation). En este sistema hay dos pares de radiotransmisores, como los ubicados en T, T' y S y S' de la figura 69. Supongamos que las señales enviadas de los transmisores T y T' llegan al radiorreceptor de un barco ubicado en algún punto P. La diferencia en los tiempos de llegada de las señales se sirve para determinar la diferencia en las distancias de P desde T y T'. Así, P está en una de las ramas de una hipérbola con focos en T y T'. Al repetir este proceso para el otro par de transmisores, vemos que P también se halla en una rama de una hipérbola con focos en S y S'. La intersección de estas dos ramas define la posición de P.

www.elsolucionario.net

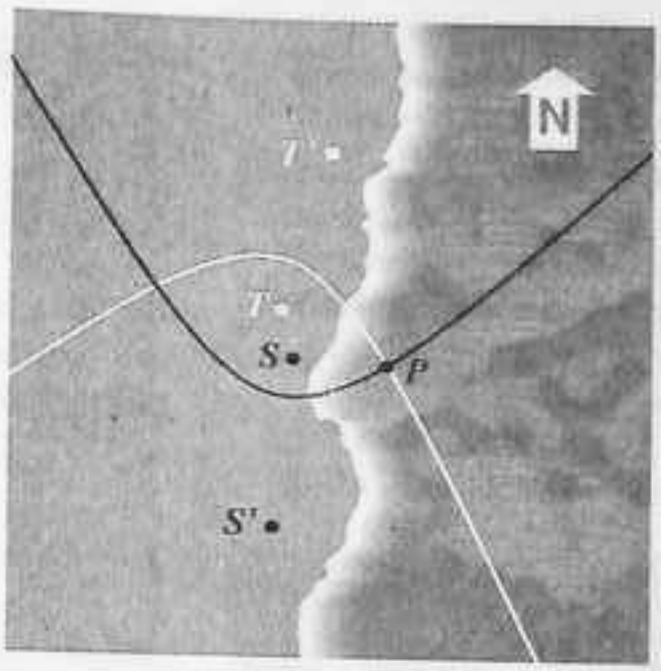


FIGURA 69

Una hipérbola posee una *propiedad reflectora* análoga a la de la elipse estudiada en la sección anterior. Para ilustrar esto, denotemos con l la línea tangente en un punto P en una hipérbola con focos F y F' (Fig. 70). Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l y β es el ángulo agudo entre FP y l, es posible demostrar que $\alpha = \beta$. Si un rayo de luz se dirige a lo largo de la recta l_1 hacia F, se reflejará en P a lo largo de la recta l_2 hacia F'. Esta propiedad se usa en el diseño de telescopios del tipo Cassegrain (ve el Ejer. 50).

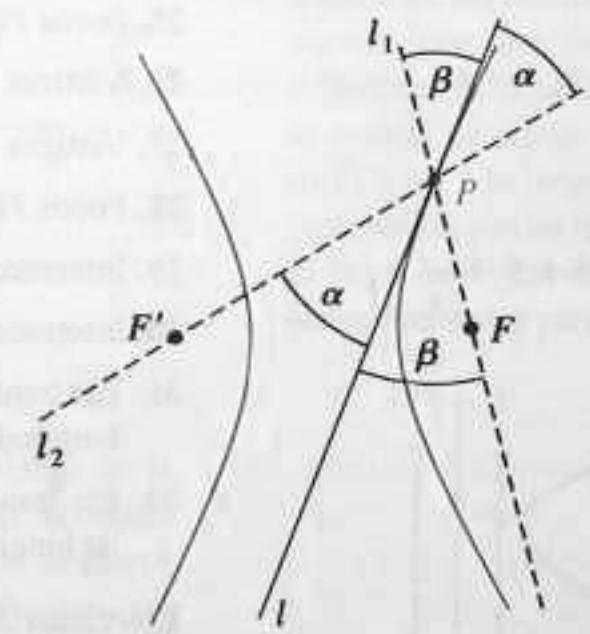


FIGURA 70

4.8 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 16: encuentra los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Traza su gráfica y muestra las asíntotas y focos.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2. $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$

3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x}{4} = 1$

4. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$

5. $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$

6. $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$

7. $y^2 - 4x^2 = 16$

8. $x^2 - 2y^2 = 8$

9. $16x^2 - 36y^2 = 1$

10. $y^2 - 16x^2 = 1$

11. $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$

12. $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

www.elsolucionario.net

13. $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$

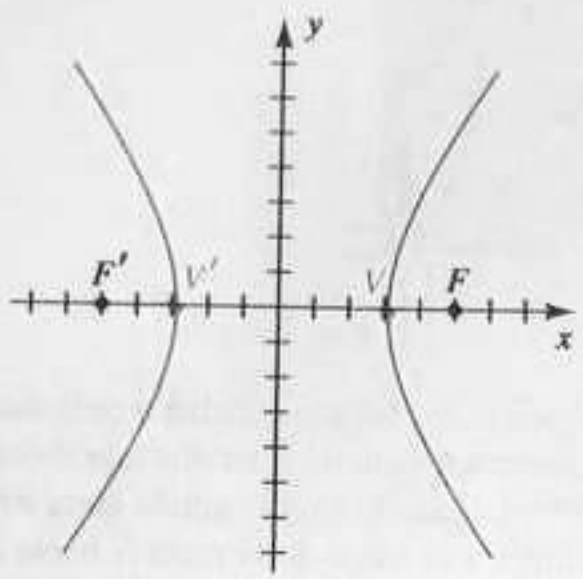
14. $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

15. $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

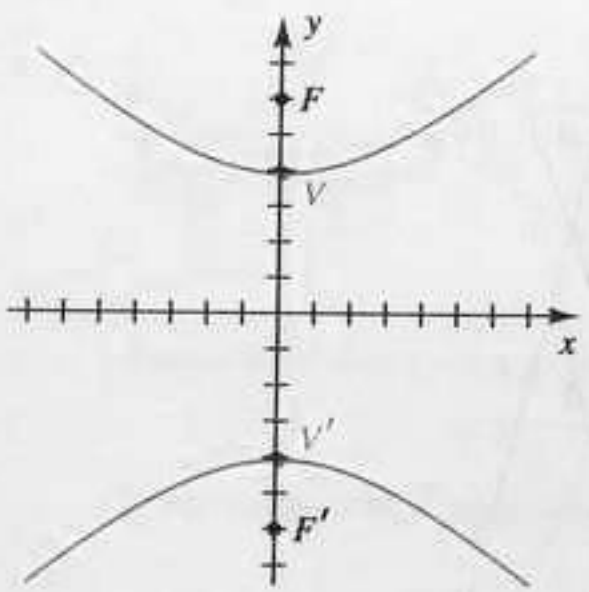
16. $25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$

Ejercicios 17 al 20: propón una ecuación para la hipérbola de la figura.

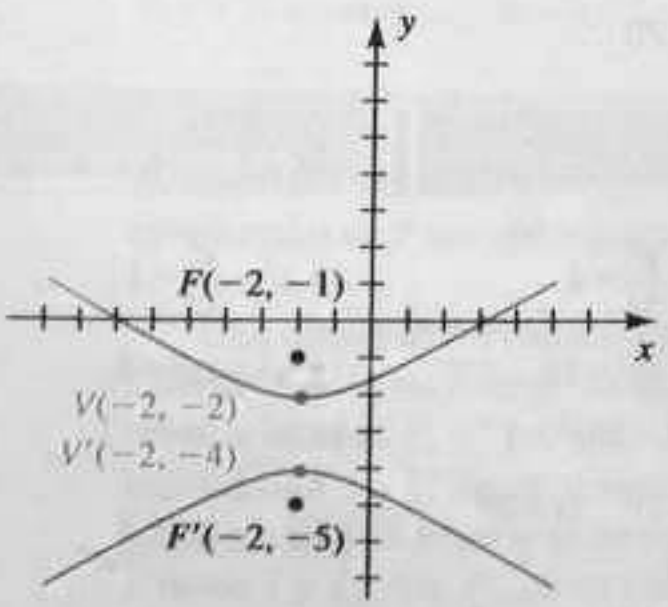
17.



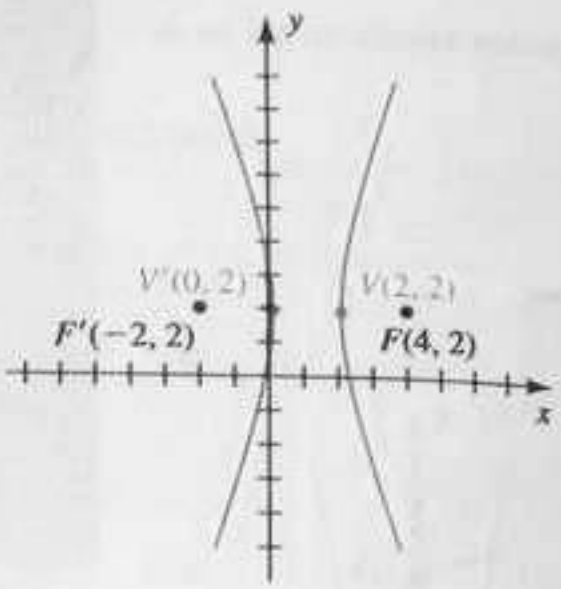
18.



19.



20.



Ejercicios 21 al 32: encuentra una ecuación para la hipérbola que tenga su centro en el origen y satisfaga las condiciones dadas.

21. Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$

22. Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$

23. Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$

24. Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$

25. Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4

26. Vértices $V(\pm 4, 0)$ que pasa por $(8, 2)$

27. Vértices $V(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

28. Focos $F(0, \pm 10)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$

29. Intersecciones x ± 5, asíntotas $y = \pm 2x$

30. Intersecciones y ± 2, asíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$

31. Eje transverso vertical de longitud 10, eje conjugado de longitud 14

32. Eje transverso horizontal de longitud 6, eje conjugado de longitud 2

Ejercicios 33 al 36: da una ecuación para el conjunto de puntos de un plano xy tal que la diferencia de las distancias de F y F' sea k.

33. $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$; $k = 24$

34. $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$; $k = 8$

35. $F(0, 10)$, $F'(0, -10)$; $k = 16$

36. $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$; $k = 30$

Ejercicios 37 al 44: describe la parte de la hipérbola dada por la ecuación.

37. $x = \frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

38. $x = -\frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

39. $y = \frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

40. $y = -\frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

41. $y = -\frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

42. $y = \frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

www.elsolucionario.net

43. $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$ **44.** $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

45. Las gráficas de las ecuaciones

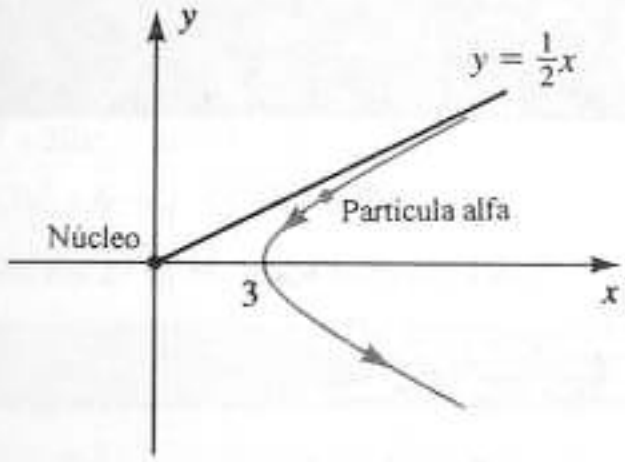
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se llaman *hipérbolas conjugadas*. Traza las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano coordenado, con $a = 5$ y $b = 3$, y describe la relación entre las dos gráficas.

46. Halla una ecuación de la hipérbola con focos $(h \pm c, k)$ y vértices $(h \pm a, k)$, donde

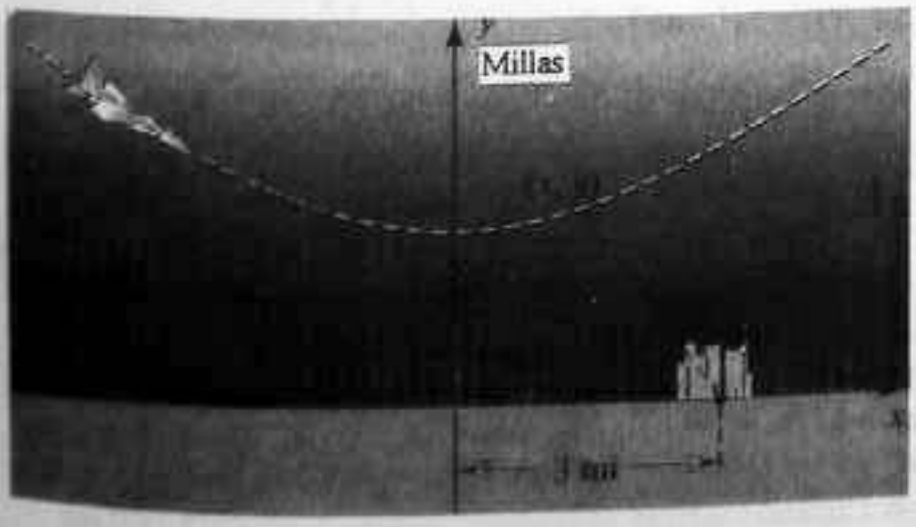
$$0 < a < c \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

47. Partículas alfa En 1911, el físico sir Ernest Rutherford (1871-1937) descubrió que si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, ésta termina repeliéndolas y siguen trayectorias hiperbólicas. La figura ilustra la trayectoria de una partícula que arranca hacia el origen a lo largo de la recta $y = \frac{1}{2}x$ y se acerca a tres unidades del núcleo. Encuentra una ecuación de la trayectoria.



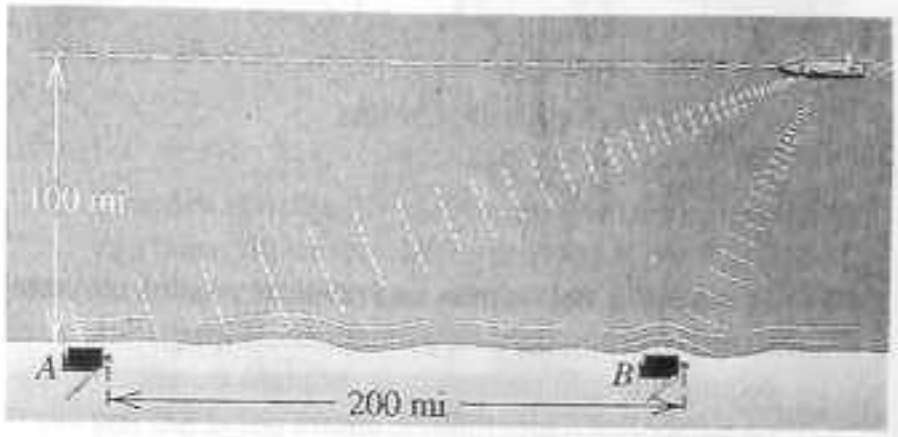
EJERCICIO 47

48. Maniobra de avión Un avión vuela a lo largo de la trayectoria hiperbólica de la figura. Si una ecuación de la trayectoria es $2y^2 - x^2 = 8$, señala cuánto se acerca la nave a la ciudad ubicada en (3, 0). (*Sugerencia*: denota con S el cuadrado de la distancia desde un punto (x, y) en la trayectoria a (3, 0), y encuentra el valor mínimo de S.)



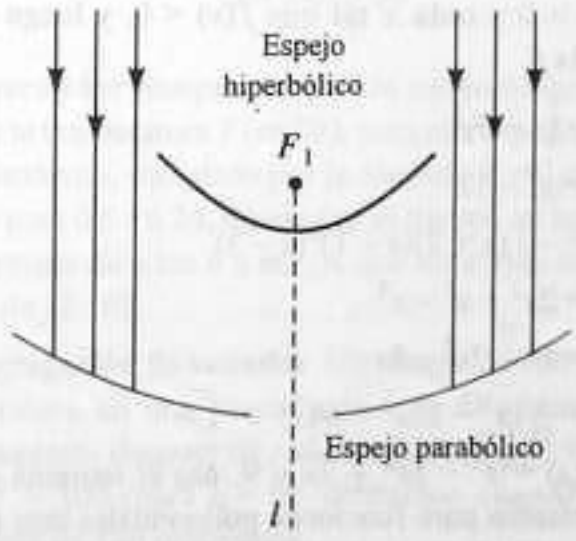
EJERCICIO 48

49. Localización de un barco Una embarcación navega siguiendo un curso que está a 100 mi de una costa en línea recta y paralelo a la costa. El navío envía una señal de auxilio que se recibe en dos estaciones A y B de guardacostas, ubicadas a 200 mi entre sí, según se ve en la figura. Al medir la diferencia en los tiempos de recepción de la señal, se establece que el barco está 160 mi más cerca de B que de A. ¿Dónde se encuentra la nave?



EJERCICIO 49

50. Diseño de un telescopio El diseño del telescopio Cassegrain (que data de 1672) aprovecha las propiedades reflectoras de la parábola y de la hipérbola. En la figura se aprecia un espejo parabólico (seccionado), con foco en F_1 y eje a lo largo de la recta l, y un segundo espejo hiperbólico, con un foco también en F_1 y eje transverso a lo largo de l. ¿En dónde se concentran finalmente las ondas luminosas paralelas al eje común?



EJERCICIO 50

C **Ejercicios 51 y 52: grafica las hipérbolas en el mismo plano coordenado y calcula el punto de intersección del primer cuadrante.**

51. $\dfrac{(y-0.1)^2}{1.6} - \dfrac{(x+0.2)^2}{0.5} = 1;$

www.elsolucionario.net

$$\frac{(y-0.5)^2}{2.7} - \frac{(x-0.1)^2}{5.3} = 1$$

52. $\frac{(x-0.1)^2}{0.12} - \frac{y^2}{0.1} = 1$; $\frac{x^2}{0.9} - \frac{(y-0.3)^2}{2.1} = 1$

C **Ejercicios 53 y 54: traza las hipérbolas en el mismo plano coordenado y determina el número de puntos de intersección.**

53. $\frac{(x-0.3)^2}{1.3} - \frac{y^2}{2.7} = 1$; $\frac{y^2}{2.8} - \frac{(x-0.2)^2}{1.2} = 1$

54. $\frac{(x+0.2)^2}{1.75} - \frac{(y-0.5)^2}{1.6} = 1$;

$$\frac{(x-0.6)^2}{2.2} - \frac{(y+0.4)^2}{2.35} = 1$$

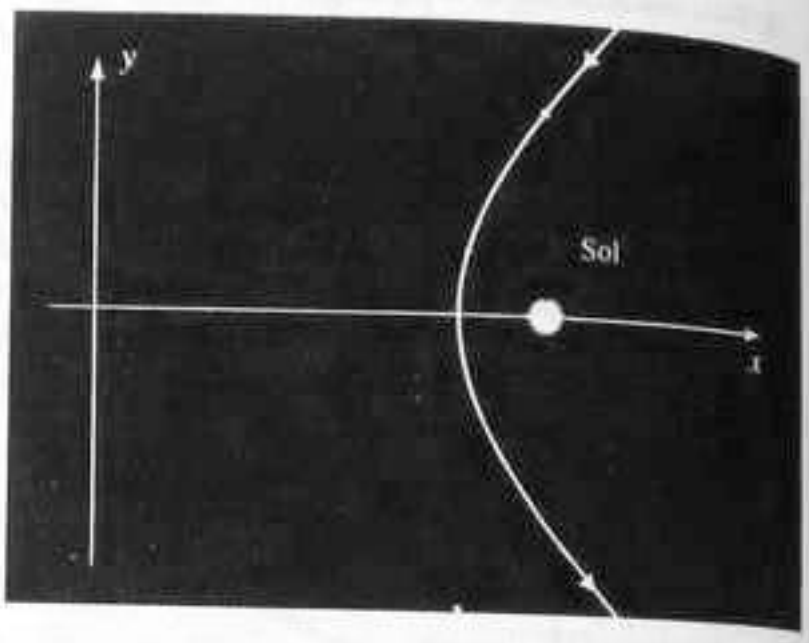
55. Trayectoria de cometa Los cometas pueden moverse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se desplaza en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará por el Sol una vez y nunca regresará. Supongamos que las coordenadas de un cometa (en mi) se describen mediante la ecuación

$$\frac{x^2}{26 \times 10^{14}} - \frac{y^2}{18 \times 10^{14}} = 1 \text{ para } x > 0,$$

donde el Sol se ubica en un foco (ve la figura).

a) Calcula las coordenadas del Sol.

b) Para que el cometa conserve una trayectoria hiperbólica, la velocidad mínima v del cometa (en m/s), debe satisfacer $v > \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia entre el cometa y el centro del Sol en metros y $k = 1.325 \times 10^{20}$ es una constante. Determina v cuando r sea mínima.



EJERCICIO 55

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

Ejercicios 1 al 6: Encuentra todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y luego traza la gráfica de f.

1. $f(x) = (x+2)^3$
2. $f(x) = x^6 - 32$
3. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2(x-3)$
4. $f(x) = 2x^2 + x^3 - x^4$
5. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$
6. $f(x) = \frac{1}{15}(x^5 - 20x^3 + 64x)$
7. Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, usa el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales con objeto de probar que hay un número real a tal que $f(a) = 100$.
8. Demuestra que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

Ejercicios 9 y 10: encuentra el cociente y el residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

9. $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 5$; $p(x) = x^3 - 2x + 7$
10. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 1$; $p(x) = x^2$
11. Si $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, con el teorema del residuo halla $f(-2)$.
12. Usa el teorema del factor y demuestra que $x - 3$ es un factor de $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$.

Ejercicios 13 y 14: utiliza la división sintética para hallar el cociente y el residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

13. $f(x) = 6x^5 - 4x^2 + 8$; $p(x) = x + 2$
14. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$; $p(x) = x - \sqrt{2}$

Ejercicios 15 y 16: un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene el (los) cero(s) y grado(s) indicado(s) y satisface la condición dada. Expresa $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

15. $-3 + 5i$, -1; grado 3; $f(1) = 4$
16. $1 - i$, 3, 0; grado 4; $f(2) = -1$
17. Encuentra un polinomio $f(x)$ de grado 7 con coeficiente inicial 1 tal que -3 sea un cero de multiplicidad 2 y 0 sea un cero de multiplicidad 5, y traza la gráfica de f.

www.elsolucionario.net

18. Demuestra que 2 es un cero de multiplicidad 3 del polinomio $f(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 52x + 24$, y expresa $f(x)$ como producto de factores lineales.

Ejercicios 19 y 20: halla los ceros de $f(x)$ y expresa la multiplicidad de cada cero.

19. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

20. $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2$

Ejercicios 21 y 22: a) con la regla de los signos de Descartes determina el número de posibles soluciones complejas positivas, negativas y no reales de la ecuación y b) encuentra los enteros máximo y mínimo que sean cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación.

21. $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

22. $x^5 - 4x^3 + 6x^2 + x + 4 = 0$

23. Demuestra que $7x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 10$ no tiene cero real.

Ejercicios 24 al 26: halla todas las soluciones de la ecuación.

24. $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 49x + 30 = 0$

25. $16x^3 - 20x^2 - 8x + 3 = 0$

26. $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

Ejercicios del 27 al 36: traza la gráfica de f.

27. $f(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

29. $f(x) = \dfrac{3x^2}{16 - x^2}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{(x+5)(x^2 - 5x + 4)}$

31. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{-x^2 + 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

33. $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 10}{x^2 + 2x}$

34. $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

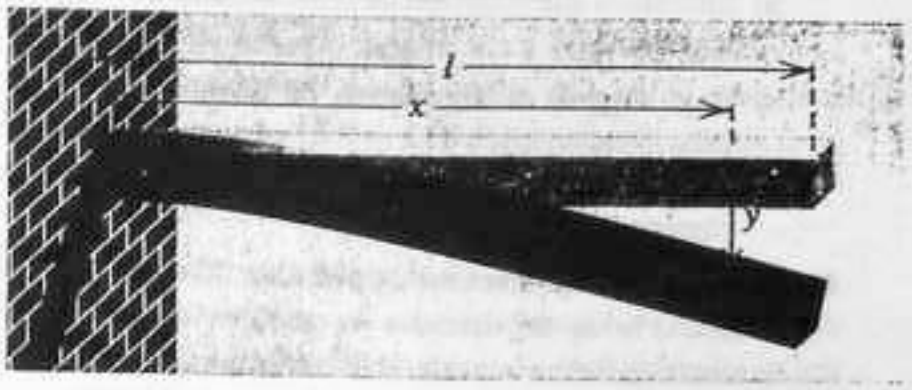
35. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x + 3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^3}$

37. **Flexión de una viga** Una viga horizontal de 1 ft de largo nada más está sostenida en un extremo (ve la figura). Si se somete a una carga uniforme y y denota su flexión en una posición a x ft del extremo sostenido, entonces cabe demostrar que $y = cx^2(x^2 - 4lx + 6l^2)$, donde c es una constante positiva que depende del peso de la carga y las propiedades físicas de la viga.

a) Si la viga mide 10 ft de largo y la flexión en el extremo no sostenido es de 2 ft, encuentra c.

b) Demuestra que la flexión es 1 ft entre $x = 6.1$ y $x = 6.2$.

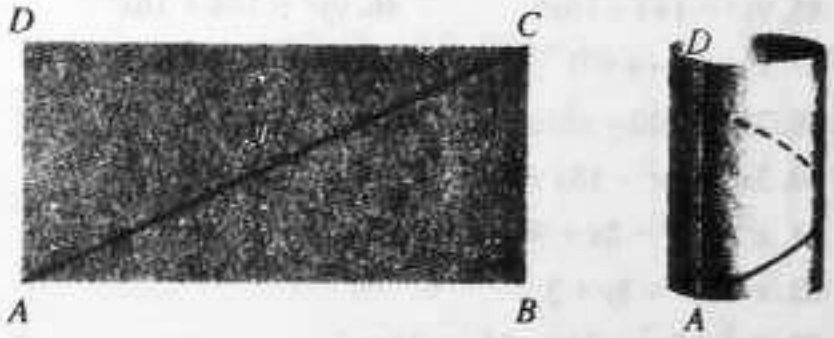


EJERCICIO 37

38. **Cilindro elástico** Un rectángulo de material elástico se va a convertir en un cilindro uniendo el borde AD al BC (ve la figura). Se coloca un alambre de longitud fija l a lo largo de la diagonal del rectángulo para sostener la estructura. Denotemos con x la altura del cilindro.

a) Expresa el volumen V del cilindro en términos de x.

b) ¿Para qué valores positivos de x es $V > 0$?



EJERCICIO 38

39. **Determinar temperaturas** Un meteorólogo encuentra que la temperatura T (en °F), para cierto periodo de 24 h en invierno, está dado por la fórmula $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \le t \le 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 a.m. ¿A qué hora(s) la temperatura era de 32 °F?

40. **Propagación de venados** Un rebaño de 100 cabezas se introduce en una pequeña isla. Si el número $N(t)$ de ejemplares después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$ (para $t > 0$), determina cuándo pasará el rebaño de 180 individuos.

41. **Curva de respuesta de umbral** En bioquímica, la curva general de respuesta de umbral es la gráfica de una ecuación

$$R = \frac{kS^n}{S^n + a^n},$$

donde R es la respuesta química cuando el nivel de la sustancia afectada es S; por otro lado, a, k y n son

www.elsolucionario.net

constantes positivas. Un ejemplo es la tasa R de eliminación de alcohol del torrente sanguíneo por el hígado, cuando la concentración de alcohol en sangre es S.

a) Encuentra una ecuación de la asíntota horizontal para la gráfica.

b) En el caso de la eliminación de alcohol, $n = 1$ y un valor característico de k es 0.22 gramos por litro por minuto (l/m). ¿Cuál es la interpretación de k en este contexto?

42. Limpieza de un derrame de petróleo El costo $C(x)$ de limpiar $x\%$ de un derrame de petróleo de una costa aumenta en forma considerable conforme x se aproxima a 100. Supongamos que

$$C(x) = \frac{20x}{101 - x} \text{ mil dólares}$$

a) Compara $C(100)$ con $C(90)$.

b) Traza la gráfica de C para $0 < x < 100$.

Ejercicios 43 al 58: encuentra los vértices y focos de la cónica y traza su gráfica.

43. $y^2 = 64x$

44. $y = 8x^2 + 32x + 33$

45. $9y^2 = 144 - 16x^2$

46. $9y^2 = 144 + 16x^2$

47. $x^2 - y^2 - 4 = 0$

48. $25x^2 + 36y^2 = 1$

49. $25y = 100 - x^2$

50. $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

51. $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$

52. $x = 2y^2 + 8y + 3$

53. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

54. $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

55. $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

56. $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

57. $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

58. $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

Ejercicios 59 y 60: halla la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que satisfaga las condiciones dadas.

59. Intersecciones x −10 y −4, intersección y 80

60. Intersecciones x −11 y 3, que pasa por (2, 39)

Ejercicios 61 al 70: encuentra una ecuación para la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

61. Hipérbola, con vértices $V(0, \pm 7)$ y puntos extremos de eje conjugado $(\pm 3, 0)$

62. Parábola, con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$.

63. Parábola, con foco $F(0, -10)$ y directriz $y = 10$.

64. Parábola, con vértice en el origen, simétrica al eje x, y que pasa por el punto $(5, -1)$.

65. Elipse, con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$

66. Hipérbola, con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$

67. Hipérbola, con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas $y = \pm 9x$

68. Elipse, con focos $F(\pm 2, 0)$ y pasa por el punto $(2, \sqrt{2})$.

69. Elipse, con excentricidad $\frac{2}{3}$ y puntos extremos de eje menor $(\pm 5, 0)$.

70. Elipse, con excentricidad $\frac{3}{4}$ y focos $F(\pm 12, 0)$.

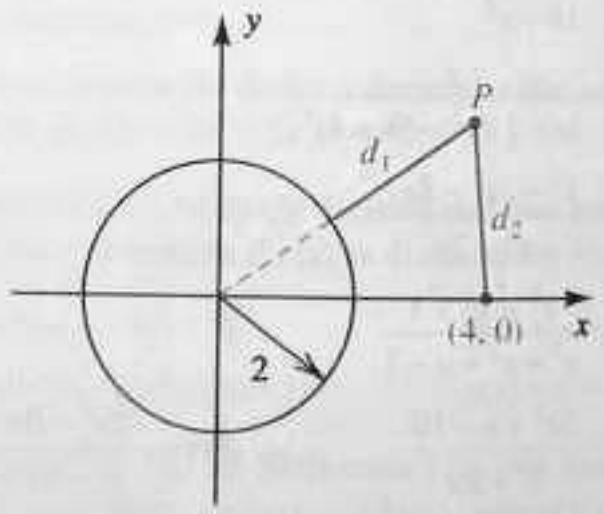
71. a) Determina A de modo que el punto $(2, -3)$ pertenezca a la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.

b) ¿La cónica es una elipse o una hipérbola?

72. Si un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados está inscrito en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, expresa el área A del cuadrado en términos de a y b.

73. Encuentra la ecuación estándar del círculo con centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y pasa por el origen.

74. Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia de $(4, 0)$ que del círculo $x^2 + y^2 = 4$, como se ilustra en la figura. Demuestra que la concentración de todos esos puntos forma una rama de una hipérbola, y traza su gráfica.



EJERCICIO 74

EJERCICIOS DE ANÁLISIS DEL CAPÍTULO 4

1. Compara el dominio, rango, número de intersecciones x y forma general de polinomios de grado par y polinomios de grado non.

2. Cuando usas la división sintética, ¿puedes utilizar un número complejo c en lugar de un número real en $x - c$?

www.elsolucionario.net

3. Analiza la forma en que la división sintética ayuda a encontrar el cociente y residuo cuado $4x^3 - 8x^2 - 11x + 9$ se divide entre $2x + 3$. Estudia cómo es que dicha división se puede usar con cualquier factor lineal de la forma $ax + b$.

4. Dibuja (a mano) una función polinomial de tercer grado con intersecciones x de 1, 2 y 3, una intersección y de 6, y pase por el punto $(-1, 25)$. ¿Puedes obtener la gráfica que acabas de dibujar?

5. ¿Cuántos puntos diferentes necesitas para especificar un polinomio de grado n?

6. Demuestra el teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio. (*Sugerencia:* para un polinomio arbitrario f, examina los conjugados de ambos lados de la ecuación $f(z) = 0$.)

7. Proporciona un ejemplo de una función racional con un factor común en el numerador y el denominador, pero que *no tenga* un hueco en su gráfica. Estudia, cómo es que esto puede ocurrir.

8. **a)** ¿La gráfica de $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (donde $ax + b \neq cx + d$)

puede cruzar su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde?

b) ¿Es posible que la gráfica de $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$

(supón que no hay factores iguales) cruce su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde?

9. Multiplica tres enteros consecutivos y luego suma el segundo entero a ese producto. Usa la división sintética para ayudarte a demostrar que la suma es el cubo de un entero y determina cuál entero.

10. En una parábola el segmento de recta que pasa por el foco perpendicular al eje y que corta la parábola se llama *cuerda focal* o *lado recto*. La longitud de la cuerda focal es el *ancho focal*. Encuentra una fórmula para el ancho focal w en términos de la longitud focal $|p|$.

11. En la gráfica de una hipérbola con centro en el origen O, dibuja un círculo con centro en el origen y radio $r = d(O, F)$, donde F denota un foco de la hipérbola. ¿Cuál relación observas?

12. Un punto $P(x, y)$ está en una elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a.$$

Si $b^2 = a^2 - c^2$, deriva la ecuación general de una elipse; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

13. Un punto $P(x, y)$ es una hipérbola si y sólo si

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Si $c^2 = a^2 + b^2$, deriva la ecuación general de una hipérbola, es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

www.elsolucionario.net

Funciones exponenciales y logarítmicas

5

5.1 Funciones exponenciales

5.2 Función exponencial natural

5.3 Funciones logarítmicas

5.4 Propiedades de los logaritmos

5.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

www.elsolucionario.net

Las funciones exponenciales y logarítmicas son trascendentales, ya que no se pueden definir sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y potencias racionales de una variable x, como es el caso de las funciones algebraicas consideradas en capítulos anteriores. Son de la mayor importancia en matemáticas y tienen aplicaciones en casi todos los campos de trabajo del hombre; resultan especialmente útiles en los campos de la química, biología, física e ingeniería, en donde contribuyen a describir cómo crecen o decrecen las magnitudes en la naturaleza. Según veremos en este capítulo, hay una estrecha relación entre funciones específicas exponenciales y logarítmicas, mismas que son inversas entre sí.

5.1 Funciones exponenciales

En capítulos anteriores estudiamos funciones con términos de la forma

$$\text{base variable}^{\text{potencia constante}},$$

por ejemplo x^2, $0.2x^{1.3}$ y $8x^{2/3}$. Ahora dirigiremos nuestra atención a funciones con términos del tipo

$$\text{base constante}^{\text{potencia variable}},$$

como 2^x, $(1.04)^{4x}$ y 3^{-x}. Comencemos por analizar la función f definida por

$$f(x) = 2^x,$$

en donde x está restringida a números *racionales* (recuerda que si $x = m/n$ para los enteros m y n con $n > 0$, entonces $2^x = 2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m$). En la tabla de abajo se enumeran las coordenadas de varios puntos de la gráfica de $y = 2^x$.

x	−10	−3	−2	−1	0	1	2	3	10
$y = 2^x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

Otros valores de y para el racional x, como $2^{1/3}$, $2^{-9/7}$ y $2^{5.143}$, se pueden obtener con calculadora. Algebraicamente es factible demostrar que si x_1 y x_2 son números racionales tales que $x_1 < x_2$, entonces $2^{x_1} < 2^{x_2}$. De este modo, f es una función creciente y su gráfica sube. Localizar puntos nos lleva al trazo de la figura 1, en donde los puntos pequeños indican que sólo los puntos con coordenadas x *racionales* están en la gráfica. Hay un *hueco* en la gráfica siempre que la coordenada x de un punto sea irracional.

A fin de ampliar el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente x *irracional*. A fin de ilustrar esto, si se desea definir 2^π se utiliza el decimal que no sea finito y represente 3.1415926. . . con π y se consideran las siguientes potencias *racionales* de 2:

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.1415} 2^{3.14159}, \ldots.$$

Cabe demostrar, mediante cálculo, que cada potencia sucesiva se aproxima a un número real único denotado por 2^π. De este modo,

$$2^x \to 2^\pi \quad \text{a medida que} \quad x \to \pi, \text{ con } x \text{ racional.}$$

www.elsolucionario.net

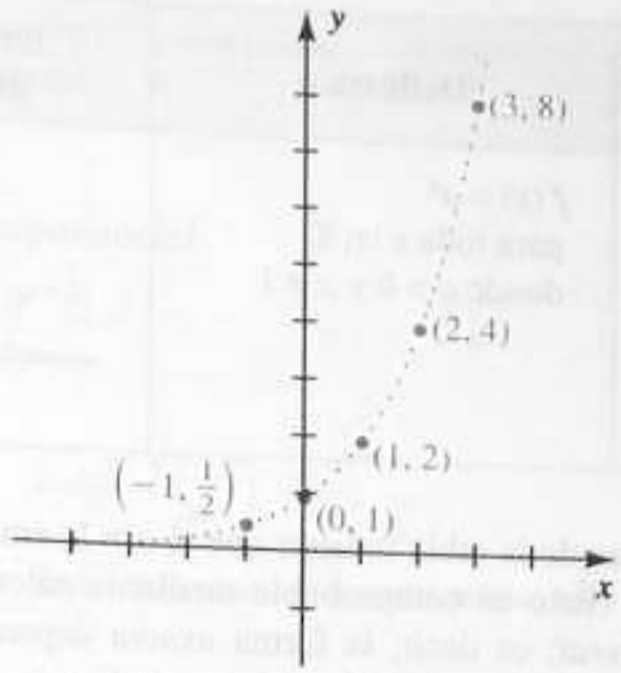


FIGURA 1

Es factible usar la misma técnica para cualquier otra potencia irracional de 2. Con objeto de trazar la gráfica de $y = 2^x$ con x *real*, se sustituyen los huecos de la gráfica de la figura 1 con puntos y se obtiene la gráfica de la figura 2. La función f definida por $f(x) = 2^x$ para todo número real x se llama *función exponencial con base* 2.

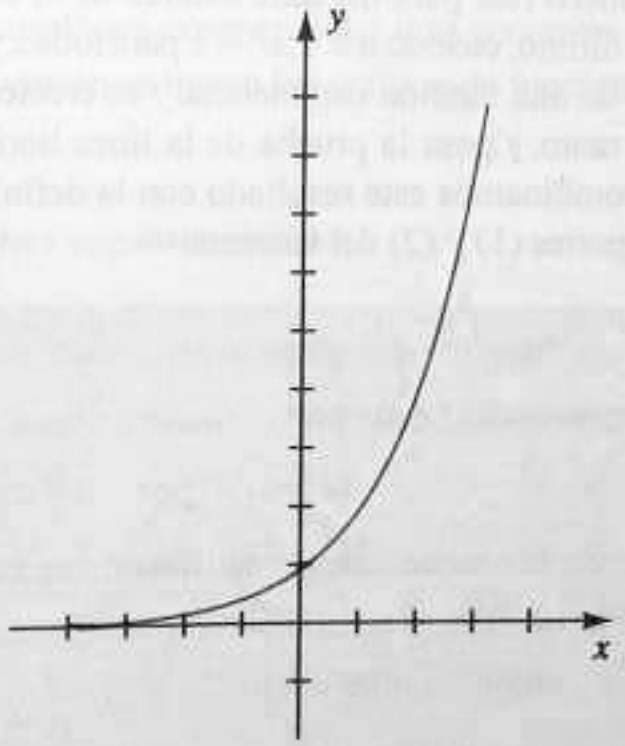
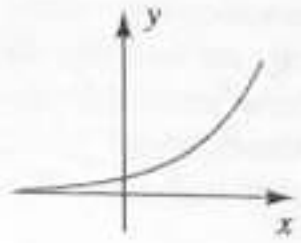
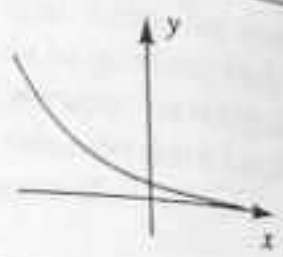


FIGURA 2

Consideremos en seguida *cualquier* base a, en donde a es un número real positivo diferente de 1. Al igual que en el análisis previo, a cada número real x corresponde un número positivo a^x para el que las leyes de los exponentes se cumplen; en consecuencia, como se ve en la tabla, resulta viable definir una función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es el conjunto de números reales positivos.

www.elsolucionario.net

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en $\mathbb{R}$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Las gráficas de la tabla indican que si $a > 1$, entonces f es creciente en $\mathbb{R}$, y si $0 < a < 1$, f decrece en $\mathbb{R}$. (Esto es comprobable mediante cálculo.) Las gráficas simplemente indican la apariencia *general*; es decir, la forma *exacta* depende del valor de a. Observarás que como $a^0 = 1$, la intersección con el eje y es 1 para toda a.

Si $a > 1$, conforme x *decrece* hasta valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje de las x (consulta la tercera columna de la tabla); por lo tanto, el eje x es una *asíntota horizontal*. A medida que x aumenta hasta valores positivos, la gráfica sube con rapidez. Este tipo de variación es característica de la **ley exponencial de crecimiento** y f recibe a veces el nombre de **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, en tanto x *crece*, la gráfica de f se aproxima asintóticamente al eje x (consulta la última columna de la tabla). Este tipo de variación se conoce como **decremento** o **decaimiento exponencial**.

Cuando consideramos a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Toma nota de que si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para muchos valores de x, como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{6}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ es indefinido. Por último, cuando $a = 1$, $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $y = a^x$ es una línea horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente en todo su dominio o decreciente en el mismo; por lo tanto, f pasa la prueba de la línea horizontal (pág. 222) y, en consecuencia, f es biunívoca. Si combinamos este resultado con la definición de una función biunívoca (pág. 221), obtenemos las partes (1) y (2) del teorema:

Teorema: las funciones exponenciales son biunívocas

La función exponencial f dada por

$$f(x) = a^x \quad \text{por} \quad 0 < a < 1 \ \text{ o } \ a > 1$$

es biunívoca; en consecuencia, se satisfacen las condiciones equivalentes que siguen para números reales x_1 y x_2:

(1) si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

(2) si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando se usa este teorema como razón para dar un paso en la solución de un ejemplo, *las funciones exponenciales son biunívocas*.

ILUSTRACIÓN

Las funciones exponenciales son biunívocas

■ Si $7^{3x} = 7^{2x+5}$, entonces $3x = 2x + 5$, o $x = 5$.

www.elsolucionario.net

En el ejemplo que viene se resuelve una *ecuación exponencial*; es decir, una ecuación en que la variable aparece en un exponente.

EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación exponencial*

Resuelve la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

Solución

$3^{5x-8} = 9^{x+2}$	dado
$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}$	expresar ambos lados con la misma base
$3^{5x-8} = 3^{2x+4}$	ley de los exponentes
$5x - 8 = 2x + 4$	las funciones exponenciales son biunívocas
$3x = 12$	restar $2x$ y sumar 8
$x = 4$	dividir entre 3

Observa que la solución del ejemplo 1 depende del hecho de que la base 9 pudo anotarse como 3 elevado a alguna potencia. Consideraremos sólo ecuaciones exponenciales de este tipo por ahora, pero después resolveremos ecuaciones exponenciales más generales.

En los dos ejemplos que vienen se trazan las gráficas de funciones exponenciales.

EJEMPLO 2 *Trazo de gráficas de funciones exponenciales*

Si $f(x) = (\frac{3}{2})^x$, y $g(x) = 3^x$, traza las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

Solución Como $\frac{3}{2} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica *sube* a medida que x crece. La siguiente tabla muestra coordenadas para varios puntos de las gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (\frac{3}{2})^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

La localización de puntos y la familiaridad con la gráfica de $y = a^x$, nos conducen a las gráficas que aparecen en la figura 3.

El ejemplo 2 hace ver que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x, y $b^x < a^x$ para valores negativos de x. En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ de la figura 1 se encuentra entre las gráficas de f y g de la figura 3.

www.elsolucionario.net

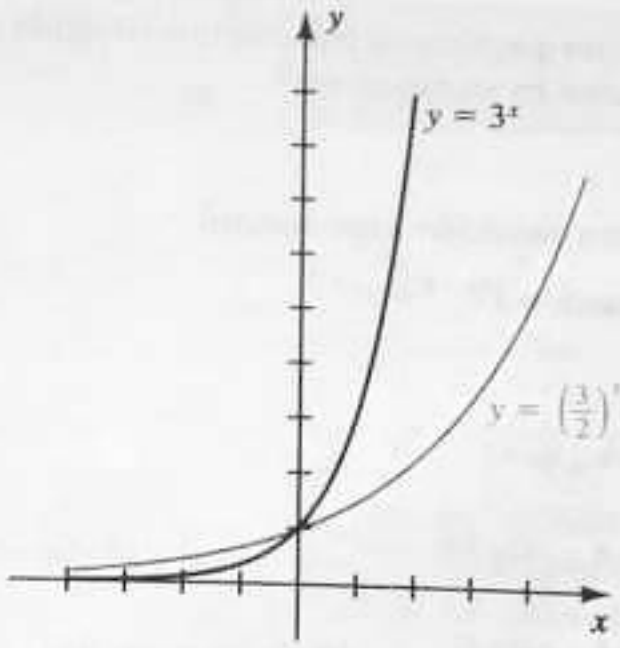


FIGURA 3

EJEMPLO 3 *Trazo de la gráfica de una función exponencial*

Traza la gráfica de la ecuación $y = (\frac{1}{2})^x$.

Solución Puesto que $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *cae* a medida que x crece. En la tabla de abajo se enumeran las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica está trazada en la figura 4. Puesto que $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, la gráfica es igual a la gráfica de la ecuación $y = 2^{-x}$. Notarás que es una reflexión hasta el eje y de la gráfica de $y = 2^x$ de la figura 2

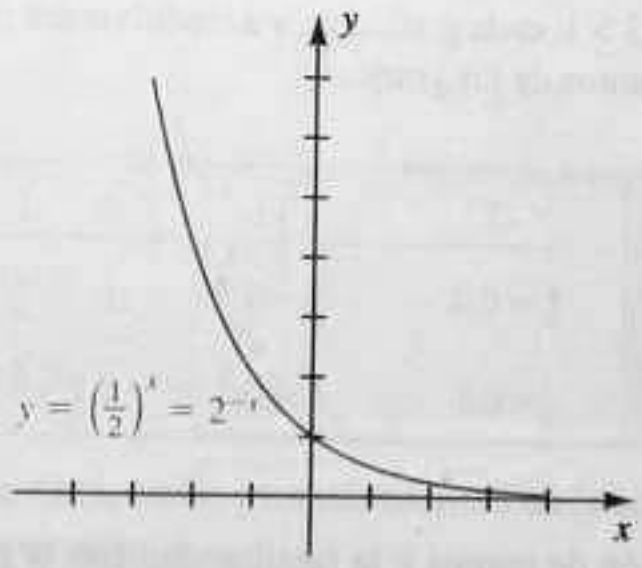


FIGURA 4

En la práctica se presentan ecuaciones de la forma $y = a^u$, en donde u es alguna expresión en x; los dos próximos ejemplos presentan ecuaciones de este tipo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4 *Desplazamiento de gráficas de funciones exponenciales*

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = 3^{x-2}$ **b)** $y = 3^x - 2$

Solución **a)** La gráfica de $y = 3^x$ se trazó en la figura 3 y se vuelve a trazar en la 5. De nuestro análisis sobre desplazamientos horizontales de la sección 1.4, podemos obtener la gráfica de $y = 3^{x-2}$ corriendo la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades a la derecha (Fig. 5).

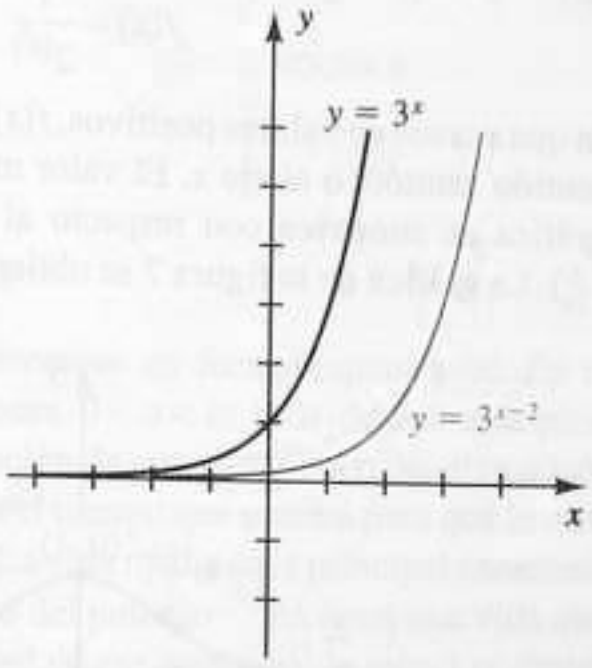


FIGURA 5

La gráfica de $y = 3^{x-2}$ también se puede obtener si se localizan varios puntos y se usan como guía para trazar una curva de tipo exponencial.

b) De nuestro análisis sobre desplazamientos verticales de la sección 1.4 podemos obtener la gráfica de $3^x - 2$, recorriendo la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo (Fig. 6). Observa que la intersección con el eje y es -1 y la línea $y = -2$ es una asíntota horizontal para la gráfica.

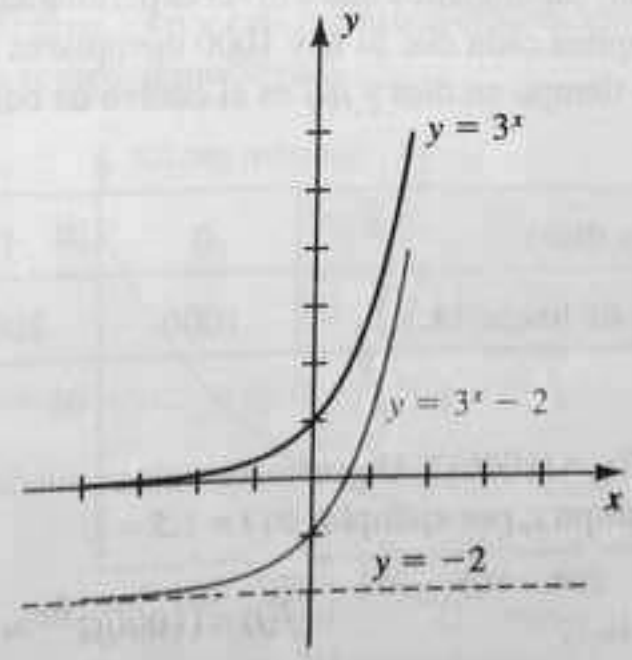


FIGURA 6

www.elsolucionario.net

La gráfica en forma de campana de la función del próximo ejemplo es similar a una curva de *probabilidad normal* empleada en estudios estadísticos.

EJEMPLO 5 *Trazo de una gráfica en forma de campana*

Si $f(x) = 2^{-x^2}$, traza la gráfica de f.

Solución Si reescribimos $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2^{(x^2)}}$$

se ve que a medida que x crece en valores positivos, $f(x)$ decrece con rapidez; de aquí que la gráfica se aproxime en sentido asintótico al eje x. El valor máximo de f es $f(0) = 1$. Dado que f es una función par, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Algunos puntos de la gráfica son $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(2, \frac{1}{16})$. La gráfica de la figura 7 se obtiene localizando puntos y aplicando simetría.

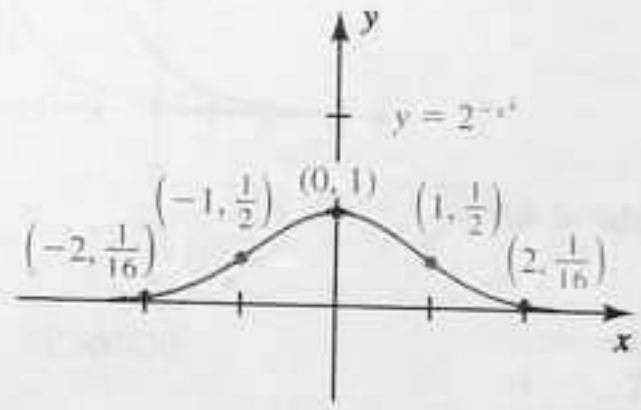


FIGURA 7

APLICACIÓN

Crecimiento de bacterias

Las funciones exponenciales resultan útiles para describir el crecimiento de ciertas poblaciones. Como ilustración, supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias de un cultivo se duplica cada día. Si hay 1000 ejemplares al comienzo, se obtiene la tabla siguiente, en donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es el conteo de bacterias en el tiempo t.

t (tiempo en días)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (conteo de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16 000

Está claro que $f(t) = (1000)2^t$. Con esta fórmula se puede predecir la cantidad de bacterias presentes en cualquier tiempo t; por ejemplo, en $t = 1.5 = \frac{3}{2}$,

$$f(t) = (1000)2^{3/2} = 2828.$$

La gráfica de f aparece en la figura 8.

www.elsolucionario.net

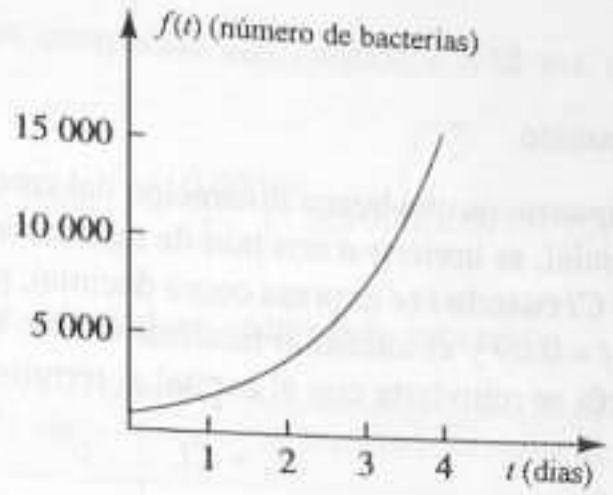


FIGURA 8

APLICACIÓN

Desintegración radiactiva

Ciertas cantidades físicas *decrecen* en forma exponencial. En tales casos, si a es la base de la función exponencial, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes de decremento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva o isótopo. La **vida media** (o **periodo radiactivo**) de un isótopo es el tiempo que tomará para que la mitad de la cantidad original de una muestra dada se desintegre. La vida media es la principal característica que distingue una sustancia radiactiva de otra. El isótopo del polonio ^{210}Po tiene una vida media de alrededor de 140 días; es decir, dada cualquier cantidad de esa sustancia, la mitad se desintegrará en 140 días. Si había 20 miligramos de ^{210}Po al inicio, la tabla de abajo indica la cantidad restante después de varios intervalos.

t **(tiempo en días)**	0	140	280	420	560
$f(t)$ **(mg restantes)**	20	10	5	2.5	1.25

La curva de la figura 9 ilustra la naturaleza exponencial de la desintegración.

Otras sustancias radiactivas poseen una vida media mucho más larga. En particular, un subproducto de los reactores nucleares es el isótopo del plutonio radiactivo ^{239}Pu, cuya vida media alcanza alrededor de 24 000 años. Es por esta razón que el almacenamiento de desechos radiactivos es un grave problema en la sociedad moderna.

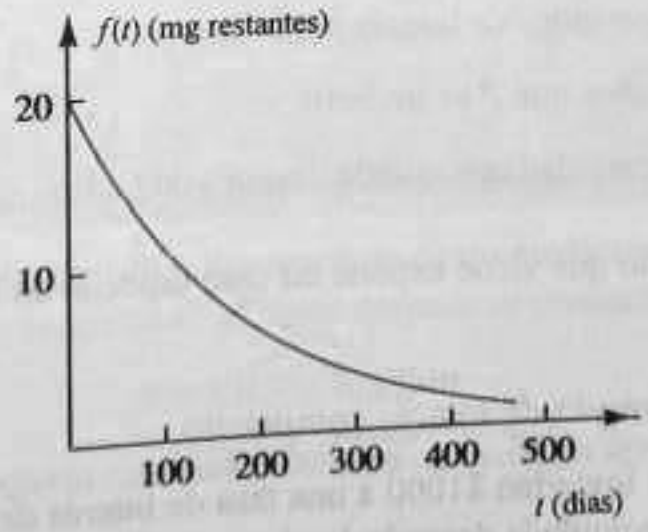


FIGURA 9

www.elsolucionario.net

APLICACIÓN

Interés compuesto

El *interés compuesto* es una buena ilustración del crecimiento exponencial. Si una suma de dinero C, o capital inicial, se invierte a una tasa de interés *simple*, o i, el interés al término de un periodo es el producto Ci cuando i se expresa como decimal; por ejemplo, si $C = \$1000$ y la tasa de interés es 9% al año, $i = 0.09$ y el interés al finalizar un año es $\$1000(0.09)$, o sea \$90.

Si el interés se reinvierte con el capital al término del periodo, la cantidad acumulada (A) es

$$C + Ci, \qquad \text{o} \qquad C(1 + i).$$

Advierte que para hallar la cantidad acumulada, multiplicamos el capital inicial por $(1 + i)$. En el ejmplo anterior, A es $\$1000\ (1.09)$ o sea \$1090.

Transcurrido otro periodo de interés, la cantidad acumulada se encuentra multiplicando $C(1 + i)$ por $(1 + i)$; por lo tanto, después de dos periodos de interés será $C(1 + i)^2$. Si se continúa la reinversión, pasados tres periodos será $C(1 + i)^3$; luego de cuatro, $C(1 + i)^4$ en general, después de k periodos de interés la cantidad acumulada es

$$A = C(1 + i)^k.$$

El interés acumulado por medio de esta fórmula se llama **interés compuesto.** Observa que A se expresa en términos de una función exponencial con base $1 + i$. El periodo de interés se puede medir en años, meses, semanas, días o cualquier otra unidad de tiempo apropiada. Cuando apliques la fórmula para encontrar A, conviene recordar que *i es la tasa de interés por periodo de interés expresada como decimal*; por ejemplo, si la tasa se indica al 6% *por año compuesto mensualmente*, la tasa por mes es (6/12)%, que equivale al 0.5%. En consecuencia, $i = 0.005$ y k son los meses. Si se invierten \$100 a esta tasa, la fórmula para A es

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k.$$

En general, tenemos esta fórmula:

Fórmula de interés compuesto

$$A = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt},$$

donde C = capital inicial

i = tasa de interés expresada como decimal

n = periodos de interés por año

t = años que P se invierte

A = cantidad acumulada después de t años

El ejemplo que viene expone un caso especial de la fórmula de interés compuesto.

EJEMPLO 6 *Uso de la fórmula de interés compuesto*

Supón que se invierten \$1000 a una tasa de interés de 9% compuesto mensualmente. Encuentra la cantidad acumulada después de cinco, 10 y 15 años. Ilustra gráficamente el crecimiento de la inversión.

www.elsolucionario.net

Solución Al aplicar la fórmula de interés compuesto con $i = 0.09$, $n = 12$ y $C = \$1000$, vemos que dicha cantidad luego de t años es

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}.$$

Al sustituir $t = 5$, 10 y 15 y usar calculadora, obtenemos esta tabla:

Número de años	Cantidad acumulada
5	$A = \$1000(1.0075)^{60} = \$1565.68$
10	$A = \$1000(1.0075)^{120} = \$2451.36$
15	$A = \$1000(1.0075)^{180} = \$3838.04$

La naturaleza exponencial del aumento está indicada porque durante los primeros cinco años, el crecimiento de la inversión es \$565.68; en el segundo quinquenio, fue de \$885.68, y en el último llegó a \$1368.68.

La curva de la figura 10 ilustra el crecimiento de \$1000 invertidos en un lapso de 15 años.

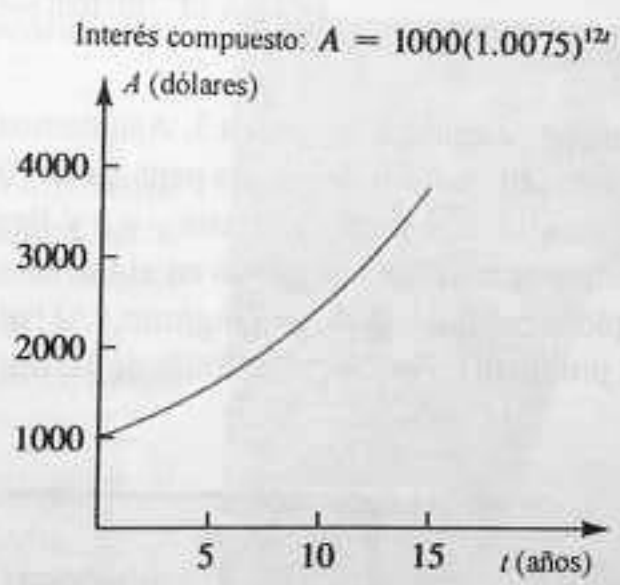


FIGURA 10

Concluimos esta sección con un ejemplo del uso de la calculadora graficadora.

EJEMPLO 7 *Cálculo de cantidades de medicamento en el torrente sanguíneo*

Si un adulto ingiere una pastilla de 100 miligramos de cierto medicamento, la rapidez R con que el fármaco entra en el torrente sanguíneo t minutos después se pronostica con

$$R = 5(0.95)^t \text{ mg/min}.$$

El cálculo permite demostrar que la cantidad A del medicamento en sangre en el tiempo t se puede estimar mediante

$$A = 97.4786[1 - (0.95)^t] \text{ mg}.$$

www.elsolucionario.net

a) Calcula cuánto tardarán 50 mg del medicamento en entrar en la circulación.

b) Calcula los miligramos del fármaco en la corriente sanguínea cuando está entrando a razón de 3 mg/min.

Solución **a)** Deseamos determinar t cuándo A es igual a 50. Puesto que el valor de A no puede rebasar 97.4786, dimensionamos la pantalla a [0, 100] por [0, 100] con Xscl = Yscl = 10.

A continuación asignamos $97.4786[1-(0.95)^x]$ a Y_1, 50 a Y_2 y graficamos Y_1 y Y_2. Así obtenemos una curva semejante a la de la figura 11 (observarás que $x = t$). Con la función zoom o intersect, calculamos que $A = 50$ mg cuando $x = 14$ min.

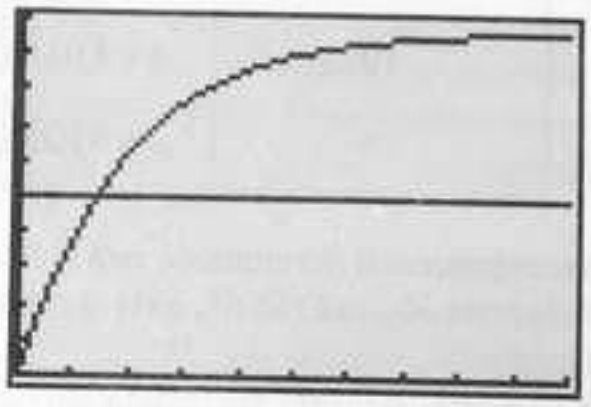


FIGURA 11 [0, 100] por [0, 100]

b) Queremos hallar t cuándo R es igual a 3. Asignamos primero $5(0.95)^x$ a Y_2. Dado que el valor máximo de Y_3 es 5 (en $t = 0$), usamos una pantalla de [0, 15] por [0, 10] y obtenemos una imagen parecida a la figura 12. Trazamos Y_3 hasta $y = 3$ y llegamos a $x \approx 9.96$; así, después de casi 10 minutos, el medicamento estará entrando en el torrente sanguíneo a razón de 3 mg/min. (Observarás que la rapidez inicial, a $t = 0$, es 5 mg/min.) Al hallar el valor de Y_1 en $x = 0$, vemos que hay casi 39 mg del producto en la sangre después de 10 minutos.

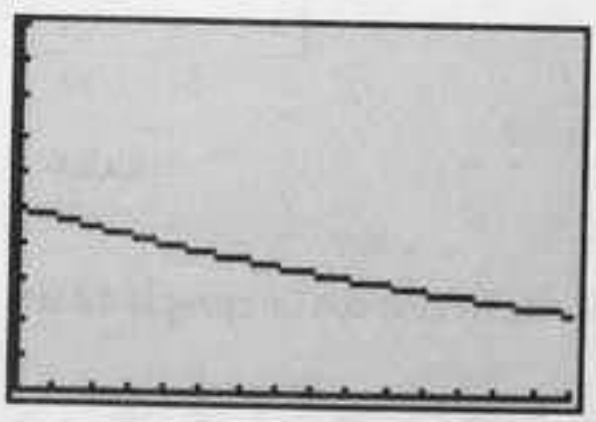


FIGURA 12 [0, 15] por [0, 10]

5.1 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: resuelve la ecuación.

1. $7^{x+6} = 7^{3x-4}$
2. $6^{7-x} = 6^{2x+1}$
5. $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$
6. $(\frac{1}{2})^{6-x} = 2$
3. $3^{2x+1} = 3^{(x^2)}$
4. $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$
7. $4^{x-3} = 8^{4-x}$
8. $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

www.elsolucionario.net

9. Traza la gráfica de f si $a = 2$.

a) $f(x) = a^x$ b) $f(x) = -a^x$

c) $f(x) = 3a^x$ d) $f(x) = a^x + 3$

e) $f(x) = a^x + 3$ f) $f(x) = a^{x-3}$

g) $f(x) = a^x - 3$ h) $f(x) = a^{-x}$

i) $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ j) $f(x) = a^{3-x}$

10. Trabaja el ejercicio 9 si $a = \frac{1}{2}$.

Ejercicios 11 al 20: traza la gráfica de f.

11. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ 12. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

13. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ 14. $f(x) = -3^x + 9$

15. $f(x) = 2^{|x|}$ 16. $f(x) = 2^{-|x|}$

17. $f(x) = 3^{1-x^2}$ 18. $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$

19. $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 20. $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

21. **Población de alces** Se introducen cien alces, cada uno de un año de edad, en una biorreserva. El número $N(t)$ de animales vivos después de t años se predice mediante $N(t) = 100(0.9)^t$. Calcula el número de animales vivos después de

a) Un año b) Cinco años c) 10 años

22. **Dosis de medicamento** El cuerpo elimina cierto fármaco a través de la orina. Supón que para una dosis inicial de 10 mg, la cantidad $A(t)$ en el cuerpo, t horas después de administrada, está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.

a) Calcula la cantidad de medicamento en el cuerpo ocho horas después de la dosis inicial.

b) ¿Qué porcentaje del producto que permanece en el cuerpo se elimina cada hora?

23. **Crecimiento bacteriano** La cantidad de bacterias en cierto cultivo aumenta de 600 a 1800 entre las 7:00 a.m. y las 9:00 a.m. Suponiendo un crecimiento exponencial, la cantidad $f(t)$ de bacterias t horas después de las 7:00 a.m. está dada por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

a) Calcula la cantidad de bacterias en el cultivo a las 8:00, 10:00 y 11:00 a.m.

b) Traza la gráfica de f para $0 \le t \le 4$.

24. **Ley de Newton del enfriamiento** Según esta ley, la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia en temperatura entre el objeto y el medio circundante. La cara de una plancha doméstica se enfría de 125° a 100° en 30 minutos en un cuarto que permanece a una temperatura constante de 75°. Por cálculo integral, la temperatura $f(t)$ de la cara de la plancha, después de t horas de enfriamiento, está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.

a) Supón que $t = 0$ corresponde a la 1:00 p.m. y calcula, al décimo de grado más cercano, la temperatura a las 2:00, 3:30 y 4:00 p.m.

b) Traza la gráfica de f para $0 \le t \le 4$.

25. **Desintegración radiactiva** El isótopo radiactivo del bismuto ^{210}Bi tiene una vida media de cinco días. Si hay 100 mg de ^{210}Bi presente en $t = 0$, la cantidad $f(t)$ restante al cabo de t días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.

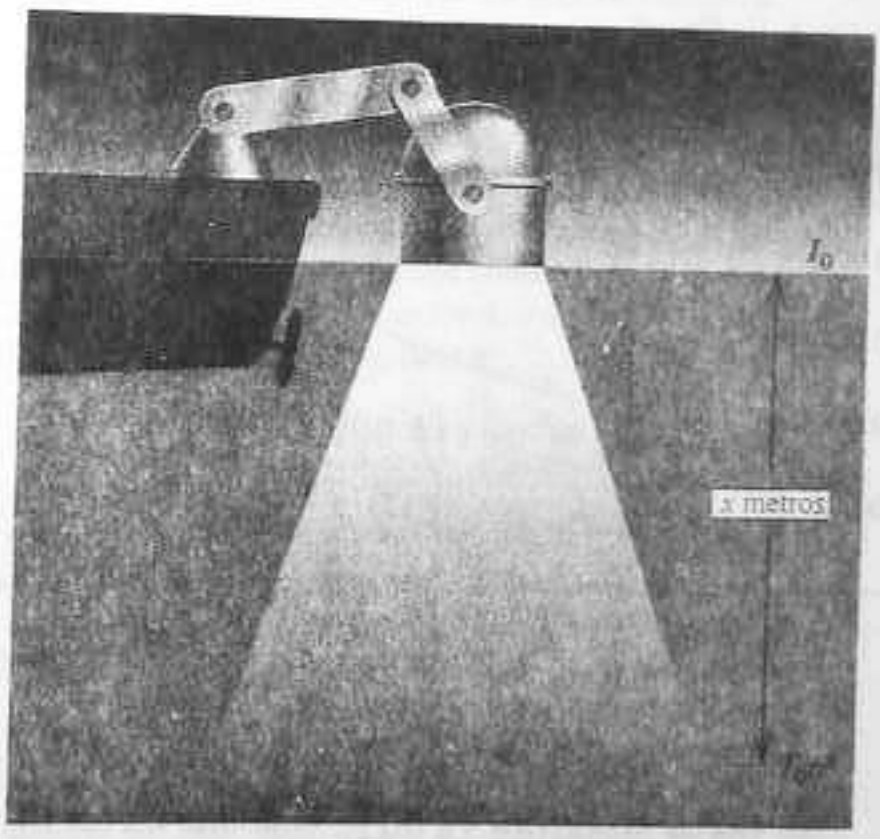
a) ¿Cuánto ^{210}Bi quedará después de cinco, 10 y 12.5 días?

b) Traza la gráfica de f para $0 \le t \le 30$.

26. **Penetración de la luz en el océano** Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La ley de Beer-Lambert afirma que la función exponencial dada por $I(x) = I_0 c^x$ es un modelo para este fenómeno (ve la figura). Para cierto lugar, $I(x) = 10(0.4)^x$ es la cantidad de luz (en cal/cm^2/s) que llega a una profundidad de x metros.

a) Encuentra la cantidad de luz a una profundidad de dos metros

b) Traza la gráfica de I para $0 \le x \le 5$.



EJERCICIO 26

27. **Desintegración del radio** La vida media del radio es de 1600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0\, 2^{kt}$. Encuentra k.

28. **Disolución de sal en agua** Si se agregan 10 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$ insoluta luego de t minutos está dada por $q(t) = 10(\frac{4}{5})^t$. Traza una gráfica que muestre el valor de $q(t)$ en cualquier tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 10$.

www.elsolucionario.net

29. Interés compuesto Si se invierte $1000 a razón de 12% anual compuesto mensualmente, encuentra la cantidad acumulada transcurridos

a) Un mes **c)** Seis meses

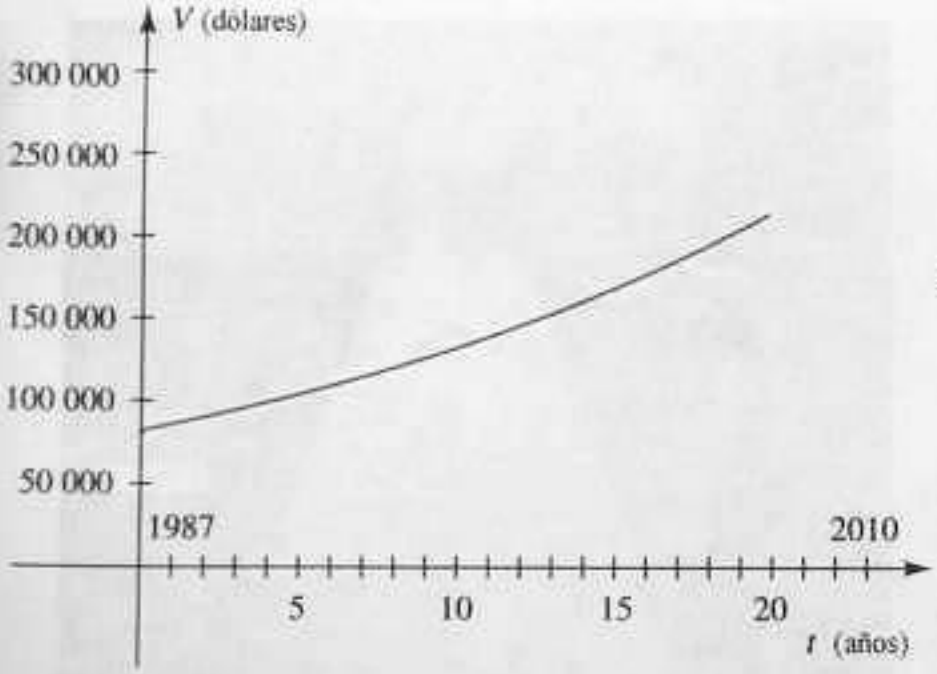
b) Dos meses **d)** Un año

30. Interés compuesto Si un fondo de ahorros paga interés a razón de 10% compuesto semestralmente, ¿cuánto habrá que invertir para tener $5000 al cabo de un año?

31. Valor de reventa de un auto usado Si se compra cierta marca en C dólares, su valor de reventa, $V(t)$, luego de t años, está dado por $V(t) = 0.78C(0.85)^{t-1}$. Si el costo original es $10 000, calcula, al dólar más cercano, el valor después de

a) Un año **b)** Cuatro años **c)** Siete años

32. Avalúo de bienes raíces Si el valor inmobiliario crece a razón de 5% anual, después de t años el valor V de una casa comprada con P dólares es $V = P(1.05)^t$. En la figura se muestra una gráfica para determinar el valor de una propiedad adquirida en $80 000 en 1986. Calcula su valor, a los $1000 más cercanos, en el año 2010.



EJERCICIO 32

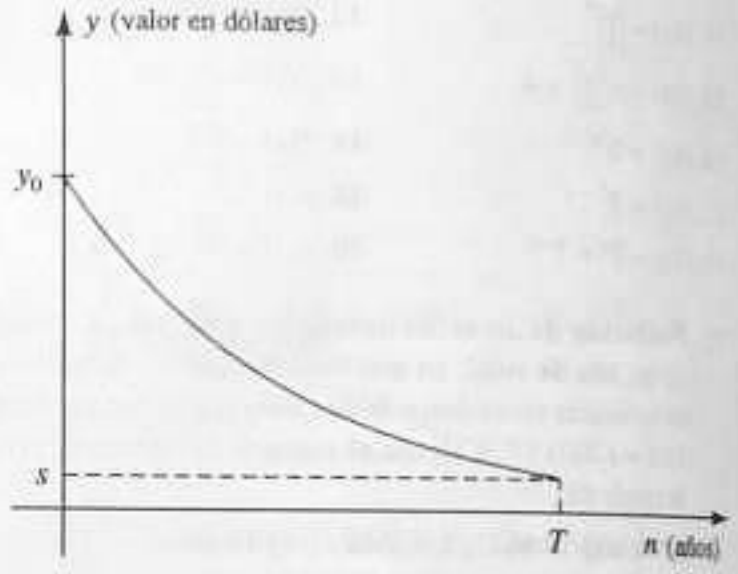
33. Isla de Manhattan La isla de Manhattan fue vendida en $24 en 1626. ¿A cuánto ascendería esta cantidad en 1996 si se hubiera invertido al 6% anual compuesto trimestralmente?

34. Interés de las tarjetas de crédito Una tienda departamental cobra a sus tarjetahabientes el 18% anual compuesto mensualmente sobre saldos insolutos. Si un cliente compra a crédito un televisor en $500 y no paga durante un año, ¿cuánto debe al término del año?

35. Depreciación En contabilidad, el método de disminución de saldo es aquel en que la cantidad de depreciación tomada cada año es un porcentaje fijo del valor presente de un artículo. Si y es el valor del artículo en un año dado, la depreciación tomada es ay para alguna tasa de depreciación a con $0 < a < 1$, y el nuevo valor es $(1 - a)y$.

a) Si el valor inicial del artículo es y_0, demuestra que el valor después de n años de depreciación es $(1 - a)^n y_0$.

b) Al término de T años, el artículo tiene un valor de desecho de s dólares. El contribuyente desea escoger una tasa de depreciación tal que el valor del artículo después de T años sea igual al valor de desecho (ve la figura). Demuestra que $a = 1 - \sqrt[T]{s/y_0}$.



EJERCICIO 35

36. Estimar la antigüedad de una lengua La glotocronología es un método para calcular la antigüedad de una lengua en una etapa en particular, con base en la teoría de que en un largo tiempo ocurren cambios lingüísticos con una rapidez más bien constante. Supón que un lenguaje tenía originalmente N_0 palabras básicas y que en un tiempo t, medido en milenios (1000 años), el número $N(t)$ de palabras básicas que permanece en uso común está dado por $N(t) = N_0(0.805)^t$.

a) Calcula el porcentaje de palabras básicas perdidas cada 100 años.

b) Si $N_0 = 200$, traza la gráfica de N para $0 \le t \le 5$.

Ejercicios 37 al 40: algunas instituciones de préstamo calculan el pago mensual M, sobre un préstamo de L dólares, a una tasa de interés i (expresada como un decimal) mediante la fórmula

$$M = \frac{LiK}{12(k-1)},$$

donde $k = [1 + (i/12)]^{12t}$ y t es el número de años que el préstamo está en efecto.

37. Hipoteca sobre viviendas

www.elsolucionario.net

a) Encuentra el pago mensual de una hipoteca sobre vivienda de $90 000 a 30 años, si la tasa de interés es 12 por ciento.

b) Indica el total de intereses pagados sobre el préstamo de la parte a).

38. **Hipoteca sobre viviendas** Halla la hipoteca sobre vivienda más alta, a un plazo de 25 años que se pueda obtener a una tasa de 10%, si el pago mensual es de $800.

39. **Préstamo para compra de autos** Un distribuidor ofrece a sus clientes un préstamo sin enganche y pago a tres años a una tasa del 15 por ciento. Encuentra el precio del carro más caro que pueda comprar un cliente, si su capacidad de pago es de $220 al mes.

40. **Préstamo a empresas** El propietario de un pequeño negocio decide solicitar un financiamiento para adquirir una computadora; así pues, pide un préstamo de $3000 a dos años y una tasa de interés de 12.5 por ciento.

a) Determina el pago mensual.

b) Encuentra el interesés total pagado sobre el préstamo.

C **Ejercicios 41 y 42: calcula la función al valor x a cuatro lugares decimales.**

41. a) $f(x) = 13^{\sqrt{x+1.1}}$, $x = 3$

b) $g(x) = \left(\frac{5}{42}\right)^{-x}$, $x = 1.43$

c) $h(x) = (2^x + 2^{-x})^{2x}$, $x = 1.06$

42. a) $f(x) = 2^{\sqrt[3]{1-x}}$, $x = 2.5$

b) $g(x) = \left(\frac{2}{25} + x\right)^{-3x}$, $x = 2.1$

c) $h(x) = \dfrac{3^{-x} + 5}{3^x - 16}$, $x = \sqrt{2}$

C **Ejercicios 43 y 44: traza la gráfica de la ecuación. a) Calcula y si $x = 40$ y b) calcula x si $y = 2$.**

43. $y = (1.085)^x$ 44. $y = (1.0525)^x$

C **Ejercicios 45 y 46: usa una gráfica para calcular las raíces de la ecuación.**

45. $1.4x^2 - 2.2^x = 1$

46. $1.21^{3x} + 1.4^{-1.1x} - 2x = 0.5$

C **Ejercicios 47 y 48: grafica f en el intervalo dado. a) Determina si f es biunívoca y b) calcula los ceros de f.**

47. $f(x) = \dfrac{3.1^x - 2.5^{-x}}{2.7^x + 4.5 - x}$; $[-3, 3]$

48. $f(x) = x^{0.6x} - 1.3^{(x^{1.8})}$; $[-4, 4]$ (*Sugerencia*: cambia $x^{1.8}$ a una fórmula equivalente definida por $x < 0$.)

C **Ejercicios 49 y 50: grafica f en el intervalo dado. a) Calcula en dónde crece o decrece F y b) calcula el rango de f.**

49. $f(x) = 0.7x^3 + 1.7^{(-1.8x)}$; $[-4, 1]$

50. $f(x) = \dfrac{3.1^{-x} - 4.1^x}{4.4^{-x} + 5.3^x}$; $[-3, 3]$

C 51. **Población de truchas** En un gran estanque se introducen 1000 especímenes de un año de edad. El número de truchas todavía vivas después de t años se calcula mediante $N(t) = 1000(0.9)^t$. Utiliza la gráfica de N para hallar cuándo estarán todavía vivos 500 ejemplares.

C 52. **Poder de compra** Un economista predice que el poder de compra $B(t)$ de un dolar, t años a partir de ahora, está dado por $B(t) = (0.95)^t$. Calcula con la gráfica cuándo el poder de compra será la mitad de lo que es ahora.

C 53. **Función Gompertz** La función Gompertz,

$$y = ka^{(b^t)} \text{ con } k > 0,\ 0 < a < 1,\ \text{y } 0 < b < 1,$$

se emplea a veces para describir las ventas de un nuevo producto cuya comercialización inicial es voluminosa pero luego se dirige a un nivel de saturación máxima. Grafica, en el mismo plano coordenado, la línea $y = k$ y la función Gompertz con $k = 4$, $a = \frac{1}{8}$, y $b = \frac{1}{4}$. ¿Cuál es la importancia de la constante k?

C 54. **Función logística** La función logística,

$$y = \frac{1}{k + ab^x} \text{ con } k > 0,\ a > 0,\ \text{y } 0 < b < 1,$$

se utiliza en ocasiones para describir las ventas de un nuevo producto que experimenta ventas lentas al inicio, seguidas por un crecimiento hacia un nivel de saturación máxima. Grafica, en el mismo plano coordenado, la línea $y = 1/k$ y la función logística con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{5}{8}$. ¿Cuál es la importancia del valor de $1/k$?

C **Ejercicios 55 y 56: si se depositan pagos mensuales p en una cuenta de ahorros que pagan una tasa de interés anual i, la cantidad A de la cuenta después de n años está dada por**

$$A = \frac{p\left(1 + \frac{i}{12}\right)\left[\left(\frac{1+i}{12}\right)^{12n} - 1\right]}{\frac{i}{12}}.$$

www.elsolucionario.net

Grafica A para cada valor de p e i y calcula n para $A =$ $100 000.

55. $p = 100$, $i = 0.05$ **56.** $p = 250$, $i = 0.09$

C 57. **Recaudación del gobierno** En la tabla que sigue se muestra la recaudación del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para los años seleccionados.

Años	1910	1930	1950	1970
Recaudación	0.7	4.6	39.4	192.8

Años	1980	1990	1995
Recaudación	517.1	1031.3	1346.4

a) Sea $x = 0$ correspondiente a 1910. Localiza la información junto con las funciones f y g:

(1) $f(x) = 0.809\,(1.094)^x$

(2) $g(x) = 0.375x^2 - 18.4x + 88.1$

b) Determina con cuál función, exponencial o cuadrática, obtienes un mejor modelo de la información.

c) Con la opción de la barte b) estima gráficamente el año en que el gobierno federal recolecto $1 billón por primera vez.

C 58. **Epidemias** En 1840, en la Gran Bretaña se presentó una epidemia en bovinos llamada epizootia. En la tabla aparece la cantidad estimada de nuevos casos encontradas cada 28 días. En aquel tiempo, el *London Daily* hizo la terrible predicción de que los nuevos casos continuarán aumentando indefinidamente; pero William Farr predijo en forma correcta cuándo llegarían a su máximo. De las dos funciones,

$$f(t) = 653(1.028)^t$$

$$g(t) = 54\,700e^{-0.5[(t-200)^2/7500}$$

una de ellas fue el modelo matématico de la predicción del diario y la otra fue el modelo de Farr, donde t es en días con t = 0 correspondiente al 12 de agosto de 1840.

Fecha	Nuevos casos
Ago. 12	506
Sept. 9	1289
Oct. 7	3487
Nov. 4	9597
Dic. 2	18 817
Dic. 30	33 835
En. 27	47 191

a) Grafica cada función, junto con los datos, en la pantalla de [0, 400] por [0, 60 000].

b) Determina cuál función es mejor modelo para la predicción de Farr.

c) Establece la fecha en que los nuevos casos llegaron al máximo.

5.2 Función exponencial natural

La *fórmula de interés compuesto* estudiada en la sección anterior es

$$A = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt},$$

en donde C es el capital inicial invertido, i es la tasa de interés (expresada como decimal), n son los periodos de interés por año y t los años en que se invierte el capital. El próximo ejemplo ilustra lo que ocurre si la tasa y el tiempo total invertido son fijos, pero el *periodo de interés* se hace variar.

EJEMPLO 1 ***Uso de la fórmula de interés compuesto***

Supón que se invierten $1000 a una tasa de interes compuesto de 9 por ciento. Encuentra la cantidad acumulada (A) al cabo de un año, si el interés es compuesto cada tres meses, un mes, una semana, a diario, por hora y cada minuto.

www.elsolucionario.net

Solución Con $C = \$100$ (capital inicial), $t = 1$ e $i = 0.09$ en la fórmula de interés compuesto, tenemos

$$A = \$1000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^n$$

para n periodos de interés por año. Los valores de n que deseamos considerar se enumeran en la tabla siguiente, donde hemos tomado el año de 365 días y por lo tanto (365)(24) = 8760 horas y (8769)(60) = 525 600 minutos. (En transacciones financieras prácticas, un año de inversión tiene 360 días.)

Periodo de interés	Trimestre	Mes	Semana	Día	Hora	Minuto
n	4	12	52	365	8760	525 600

Con la fórmula de interés compuesto (y una calculadora), obtenemos las cantidades de esta tabla:

Periodo de interés	**Cantidad acumulada después de un año**
Trimestre	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^4 = \$1093.08$
Mes	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} = \$1093.81$
Semana	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{52}\right)^{52} = \$1094.09$
Día	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365} = \$1094.16$
Hora	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \$1094.17$
Minuto	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{525\,600}\right)^{525\,600} = \$1094.17$

Observa que en el ejemplo anterior, después de que se llega a un periodo de interés de una hora, el número de periodos de interés por año no tiene efecto en la cantidad final. Si el interés se hubiera compuesto cada *segundo*, el resultado sería aún de \$1094.17, siempre que se corte A al centavo más cercano. (Algunos lugares decimales, *cambian después* de los primeros dos.) Por lo

www.elsolucionario.net

tanto, la cantidad se aproxima a un valor fijo a medida que n aumenta. Se dice que el interés es **compuesto continuamente** si el número n de periodos por año aumenta sin límite.

Con $C = 1$, $i = 1$ y $t = 1$ en la fórmula de interés compuesto, llegamos a

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La expresión del lado derecho (LD) de la ecuación es importante en cálculo. En el ejemplo 1 consideramos una situación similar: a medida que n aumenta, A se aproxima a un valor límite. El mismo fenómeno ocurre con esta fórmula, según se ilustra en la tabla inmediata.

n	Aproximación a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10 000	2.71814593
100 000	2.71826824
1 000 000	2.71828047
10 000 000	2.71828169
100 000 000	2.71828181
1 000 000 000	2.71828183

En cálculo se demuestra que a medida que n aumenta sin límite, el valor de la expresión $[1 + (1/n)]^n$ se aproxima a cierto número irracional, denotado con e. El número e aparece en la investigación de muchos fenómenos físicos. Una aproximación es $e \approx 2.71828$. Con la notación introducida en la sección 4.5, denotamos este dato de esta forma:

El número e

Si n es un entero positivo, entonces

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.71828 \text{ a medida que } n \to \infty.$$

En la próxima definición usamos e como base de una importante función exponencial.

www.elsolucionario.net

Definición de la función exponencial natural

La **función exponencial natural** f está definida por

$$f(x) = e^x$$

para todo número real x.

La función exponencial natural es una de las funciones más útiles en matemáticas avanzadas y en la práctica. Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, según se exhibe en la figura 13. Las calculadoras graficadoras científicas tienen una tecla $\boxed{e^x}$ para calcular valores de la función exponencial natural.

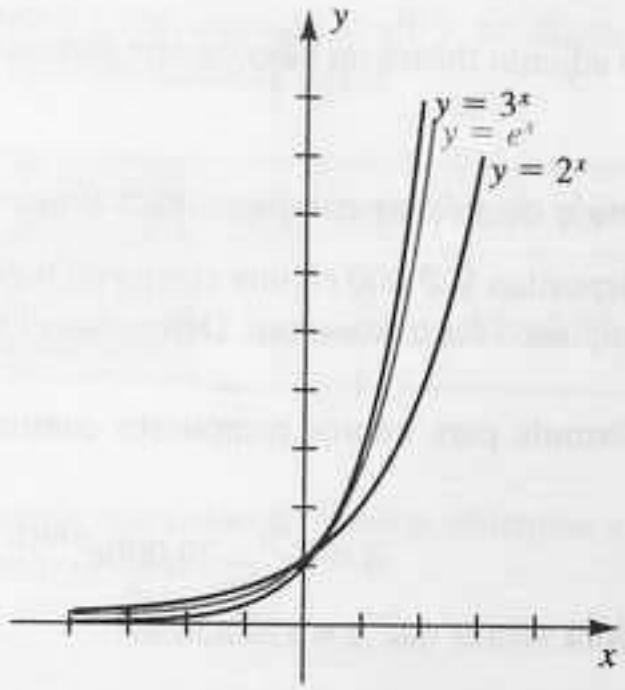


FIGURA 13

APLICACIÓN

Interés compuesto continuamente

La fórmula del interés compuesto es

$$A = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}.$$

Con $1/k = i/n$, entonces $k = n/i$, $n = ki$, $nt = kit$ y la fórmula se puede reescribir:

$$A = C\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kit} = C\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{it}.$$

Para un interés compuesto continuamente se hace que n (cantidad de periodos de interés por año) aumente sin límite, denotado por $n \to \infty$ o bien, lo que equivale, con $k \to \infty$. Aprovechamos que $[1 + (1/k)]^k \to e$ conforme $k \to \infty$,

$$C\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{it} \to C[e]^{it} = Pe^{it} \qquad \text{a medida que } k \to \infty.$$

www.elsolucionario.net

Este resultado da la fórmula que sigue:

Fórmula de interés compuesto continuamente

$$A = Ce^{it},$$

donde C = capital inicial

i = tasa de interés expresada como decimal

t = los años que C está invertido

A = cantidad acumulada después de t años

El ejemplo adjunto ilustra un caso de esta fórmula.

EJEMPLO 2 *Uso de la fórmula de interés compuesto continuamente*

Supón que se depositan \$20 000 en una cuenta de mercado de dinero que paga interés a razón de 8% por año compuesto continuamente. Determina el saldo de la cuenta después de cinco años.

Solución Al aplicar la fórmula para interés compuesto continuamente con $C = 20\,000$, $i = 0.08$, y $t = 5$, tenemos

$$A = Ce^{it} = 20\,000e^{0.08(5)} = 20\,000e^{0.4}.$$

Con la calculadora vemos que $A = \$29\,836.49$.

La fórmula de interés compuesto continuamente es sólo un caso específico de la siguiente ley.

Fórmula de la ley de crecimiento (o decaimiento)

Sea q_0 el valor de una cantidad q en el tiempo t = 0 (esto es, q_0 es la cantidad inicial de q). si q cambia instantaneamente a una razón proporcional a su valor actual, entonces

$$q = q_0e^{rt},$$

donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento (o $r < 0$ es la tasa de decaimiento) de q.

EJEMPLO 3 *Predicción de la población de una ciudad*

En 1970, una ciudad tenía 153 800 habitantes Supón que la población aumenta continuamente a razón de 5% por año, pronostica la población de la ciudad en el año 2010.

Solución Aplicamos la fórmula del crecimiento $q = q_0e^{rt}$ con población inicial $q0 = 153\,800$, tasa de crecimiento $r = 0.05$ y tiempo $t = 2010 - 1970 = 40$ años. Así, un promóstico para encontrar la población de la ciudad en el año 2010 es

$$153\,800e^{(0.05)(40)} = 153\,800e^2 \approx 1\,136\,437.$$

La función f del ejemplo adjunto es importante en aplicaciones avanzadas de matemáticas.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4 *Trazo de una gráfica con dos funciones exponenciales*

Traza la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Solución Observa que f es una función par porque

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Mediante calculadora o la tabla 2 del apéndice II, se obtienen estas aproximaciones de $f(x)$:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ **(aproximado)**	1	1.13	1.54	2.35	3.76

Al localizar puntos y usar simetría con respecto al eje y, obtenemos la curva de la figura 14. La gráfica *parece* una parábola, pero no es el caso.

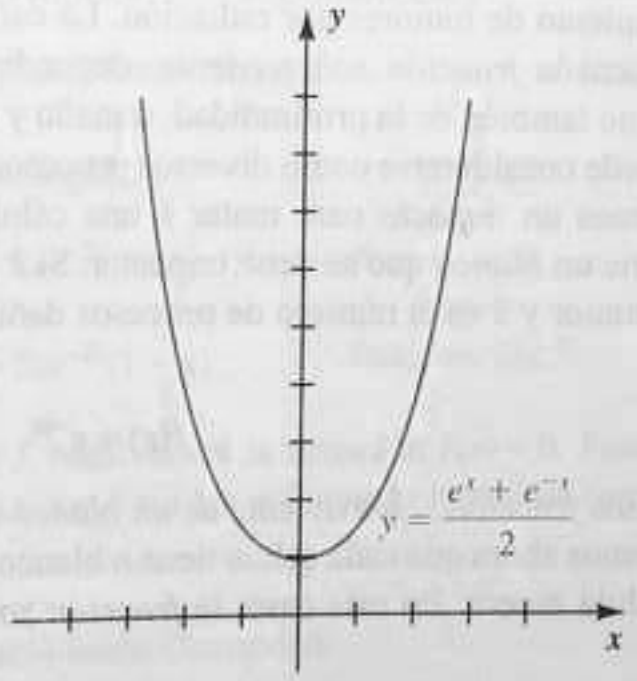


FIGURA 14

APLICACIÓN

Cables flexibles

La función f del ejemplo 4 ocurre en matemáticas aplicadas e ingeniería, en donde recibe el nombre de **función coseno hiperbólica.** Sirve para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos estén sostenidos a la misma altura, como las líneas telefónicas o de energía

www.elsolucionario.net

eléctrica (Fig. 15). Si introducimos un sistema coordenado, según se indica en la figura, podremos demostrar que una ecuación que corresponde a la forma del cable es

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

donde a es un número real. La gráfica se llama **catenaria,** derivada de la palabra latina que significa *cadena*. La función del ejemplo 4 es el caso especial en que $a = 1$.

En el ejercicio 1 para analizar al final del capítulo hallarás la aplicación de una catenaria.

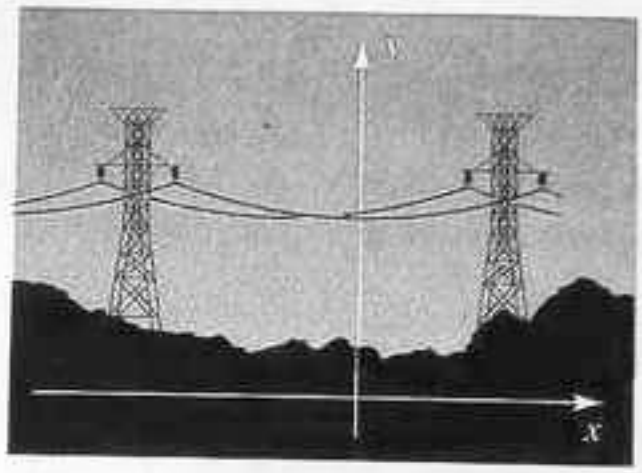


FIGURA 15

APLICACIÓN

Radioterapia

Las funciones exponenciales desempeñan una importante función en el campo de la *radioterapia*, que es el tratamiento de tumores por radiación. La cantidad de células de tumor que resisten el tratamiento, llamada *fracción sobreviviente*, depende no sólo de la energía y naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor. La exposición a radiaciones puede considerarse como diversos procesos potencialmente dañinos, en los cuales se requiere al menos un *impacto* para matar a una célula de un tumor; por ejemplo, supón que cada célula tiene un *blanco* que se debe impactar. Si k denota el tamaño promedio del blanco de una célula de tumor y x es el número de procesos dañinos (*dosis*), la fracción sobreviviente $f(x)$ está dada por

$$f(x) = e^{-kx}.$$

Ésta se denomina *fracción sobreviviente de un blanco-un impacto.*

Consideremos ahora que cada célula tiene n blancos y que hay que impactar cada uno una vez para que la célula muera. En este caso, la *fracción sobreviviente de un blanco-un impacto* está dada por

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

El análisis de la gráfica de f (Fig. 16) permite determinar qué efecto tendrá el aumento de la dosis x en la disminución de la fracción tumoral sobreviviente. Observa que $f(0) = 1$; es decir, si no hay dosis, todas las células sobreviven. Como ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2. \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

www.elsolucionario.net

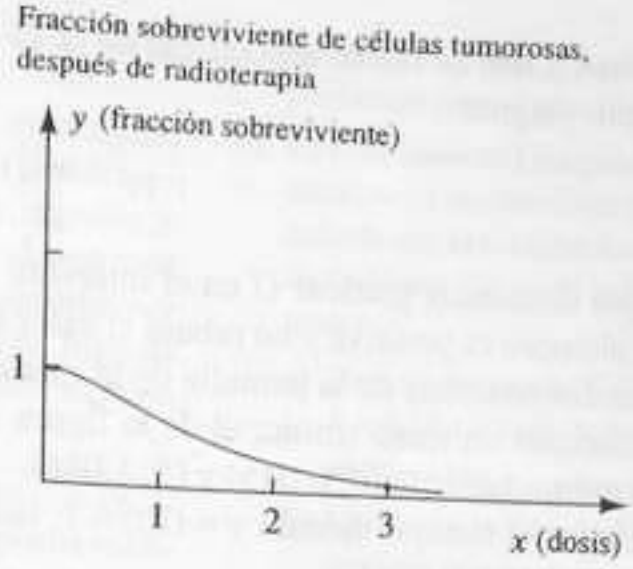


FIGURA 16

Un análisis completo de la gráfica de f requiere cálculo integral. El *hombro* de la curva cerca del punto (0, 1) representa la naturaleza de umbral del tratamiento; esto es, una pequeña dosis elimina una reducida cantidad de células tumorosas. Notarás que para una x considerable, un aumento de la dosis tiene poco efecto en la fracción sobreviviente. A fin de establecer la dosis ideal para cierto paciente, los especialistas también deben tomar en cuenta la cantidad de células sanas que mueren durante cada exposición.

Los problemas del tipo expuesto en el ejemplo que sigue, se presentan en el estudio del cáculo integral.

EJEMPLO 5 *Búsqueda de ceros en una función con exponenciales*

Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, halla los ceros de f.

Solución $f(x)$ se puede factorizar como sigue:

$$f(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \qquad \text{dados}$$

$$= 2xe^{-2x}(1 - x) \qquad \text{factorizar } 2xe^{-2x}$$

Para encontrar los ceros de f, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $e^{-2x} > 0$ para toda x, vemos que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $1 - x = 0$; por lo tanto, los ceros de f son 0 y 1.

EJEMPLO 6 *Trazo de una curva de crecimiento Gompertz*

En biología, la **función de crecimiento Gompertz** G dada por

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})},$$

donde k, A y B son constantes positivas, se usa para calcular el tamaño de ciertas cantidades en un tiempo t. La gráfica de G se llama **curva de crecimiento Gompertz**. La función siempre es positiva y creciente, y a medida que t aumenta sin límite, $G(t)$ se nivela y aproxima al valor de k. Grafica G en el intervalo [0, 5] para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y calcula el tiempo t en que $G(t) = 1$.

www.elsolucionario.net

Solución Algunas combinaciones de tecleo específicas de la TI-82 aparecen en el ejemplo 17, apéndice I. Comenzamos por asignar

$$1.1e^{(-3.2e^{-1.6t})}$$

a Y_1. Puesto que deseamos graficar G en el intervalo [0, 5], escogemos Ymín = 0 y Ymáx = 5. Dado que $G(t)$ siempre es positiva y no rebasa el valor de $k = 1.1$, elegimos Ymín = 0 y Ymáx = 2; por lo tanto, las dimensiones de la pantalla de la calculadora graficadora son [0, 5] por [0, 2]. Al graficar G obtenemos un trazo similar al de la figura 17. Los valores de los puntos finales de la gráfica son aproximadamente (0, 0.045) y (5, 1.086).

Para establecer el tiempo cuando $y = G(t) = 1$, usamos las funciones de intersect o zoom y llegamos a $x = t \approx 3.194$.

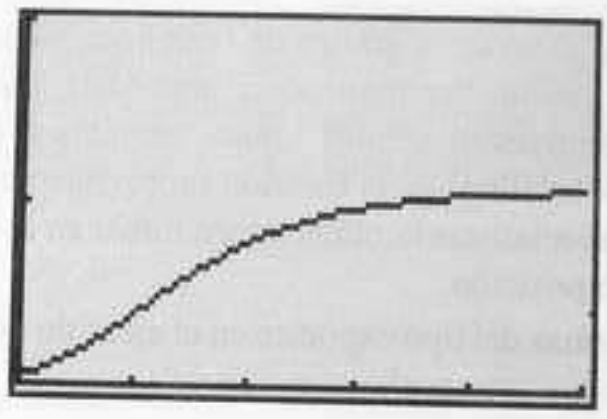


FIGURA 17 [0, 5] por [0, 2]

5.2 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 4: usa la gráfica de $y = e^x$ para ayudarte a trazar la gráfica de f.

1. a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = -e^x$
2. a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = 2e^x$
3. a) $f(x) = e^{x+4}$ b) $f(x) = e^x + 4$
4. a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $f(x) = -2e^x$

Ejercicios 5 y 6: si se depositan P dólares en una cuenta de ahorros que paga interés a razón de i% por año compuesto continuamente, encuentra el saldo después de t años.

5. $P = 1000,\ i = 8\frac{1}{4},\ t = 5$
6. $P = 100,\ i = 12\frac{1}{2},\ t = 10$

Ejercicios 7 y 8: ¿cuánto dinero, invertido a una tasa de interés de i% por año compuesto continuamente, alcanzará un monto de A dólares después de t años?

7. $A = 100\,000,\ i = 11,\ t = 18$
8. $A = 15\,000,\ i = 9.5,\ t = 4$

Ejercicios 9 y 10: una inversión de P dólares aumentó a A dólares en t años. Si el interés era compuesto continuamente, encuentra la tasa de interés.

9. $A = 13\,464,\ P = 1000,\ t = 20$
10. $A = 890.20,\ P = 400,\ t = 16$

Ejercicios 11 y 12: resuelve la ecuación.

11. $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$ 12. $e^{3x} = e^{2x-1}$

Ejercicios 13 al 16: encuentra los ceros de f.

13. $f(x) = xe^x + e^x$
14. $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$
15. $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$
16. $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ejercicios 17 y 18: simplifica la expresión.

17. $\dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

www.elsolucionario.net

18. $\dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$

19. **Crecimiento de la cosecha** Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0 e^{kt}$ para $k > 0$ describe el primer mes de crecimiento de cosechas como el maíz, algodón y frijol de soya. El valor de la función $W(t)$ es el peso total en miligramos, W_0 es el peso en el día de su aparición y t es el tiempo en días. Si, para una especie de frijol de soya, $k = 0.2$, y $W_0 = 68$ mg, predice el peso al término de 30 días.

20. **Crecimiento de la cosecha** Consulta el ejercicio 19. A menudo es difícil medir el peso W_0 de una planta cuando brota del suelo. Si, para una especie de algodón, $k = 0.21$ y el peso después de 10 días es 575 mg, calcula W_0.

21. **Crecimiento poblacional en Estados Unidos** En 1980 la población estadounidense era de unos 227 millones y ha estado creciendo a razón de 0.7% por año. Predice la población para el año 2010 si se mantiene esta tendencia.

22. **Crecimiento poblacional en la India** En 1985 la población estimada de la India era de 762 millones y ha estado aumentando a razón de 2.2% por año. Supón que continúe esta tasa de rápido crecimiento y calcula la población india $N(t)$ para el año 2010.

23. **Longevidad del lenguado** En la ciencia piscícola, un cardumen es un grupo de peces que resulta de una reproducción anual. Por lo general, se supone que el número de peces $N(t)$ aún vivos después de t años está dado por una función exponencial. Para el lenguado del Pacífico, $N(t) = N_0 e^{-0.2t}$, en donde N_0 es el tamaño inicial del cardumen. Calcula el porcentaje del número original de ejemplares aún vivos después de 10 años.

24. **Indicador radiactivo** El indicador radiactivo ^{51}Cr es útil para ubicar la posición de la placenta de una embarazada; en ocasiones es necesario solicitar estos indicadores a los laboratorios médicos. Si se remiten A_0 unidades (microcuries), por la desintegración radiactiva, el número de unidades $A(t)$ presente después de t días está dado por $A(t) = A_0 e^{-0.0249t}$.

    a) Si se envían 35 unidade y tardan dos días en llegar a su destino, ¿alrededor de cuántas unidades estarán disponibles para la prueba?

    b) Si se requieren 35 unidades para el análisis ¿aproximadamente cuántas unidades deben enviarse?

25. **Crecimiento de la población de la ballena azul** En 1978 se calculó que la población de ballenas azules en el hemisferio sur era de 5000. Como la pesca de cetáceos se ha prohibido y existe abundancia de alimento para estos animales, se espera que la población $N(t)$ crezca en sentido exponencial según la fórmula $N(t) = 5000e^{0.0036t}$, en donde t es en años y $t = 0$ corresponde a 1978. Predice la población para el año 2010.

26. **Crecimiento del lenguado** La longitud (en cm) de muchos peces comerciales comunes, de t años de edad, se calcula con la función de crecimiento de von Bertalanffy de la forma $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, donde a, b y k son constantes.

    a) Para el lenguado del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$ Calcula la longitud de un espécimen de 10 años.

    b) Utiliza la gráfica de f para calcular la longitud máxima que puede alcanzar este pez.

27. **Presión atmosférica** En ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en in) a una altitud de h pies está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altitud de 40 000 pies?

28. **Desintegración del isótopo del polonio** Si comenzamos con c miligramos del isótopo de polonio ^{210}Po, la cantidad restante después de t días se calcula por medio de $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es 50 miligramos, calcula, al centésimo más cercano, la cantidad restante después de

    a) 30 días b) 180 días c) 365 días

29. **Crecimiento de los niños** Por lo general se considera que el modelo Jenss es la fórmula más precisa para predecir la estatura de los preescolares. Si y es la estatura (en cm) y x es la edad (en años), entonces

$$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$$

    para $\frac{1}{4} \le x \le 6$. Por cálculo integral, la tasa de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 6.39 + 0.993e^{3.261 - 0.993x}$. Encuentra la estatura y tasa de crecimiento de un niño normal de un año.

30. **Velocidad de las partículas** Una partícula esférica muy pequeña (unos 5 micrones de diámetro) es lanzada en un aire quieto con una velocidad inicial de v_0 m/s, pero su velocidad disminuye por la fuerza de la resistencia al avance. Su velocidad t segundos después está dada por $v(t) = v_0 e^{-at}$ para alguna $a > 0$, y la distancia $s(t)$ que la partícula recorre está dada por

$$s(t) = \frac{v_0}{a}(1 - e^{-at}).$$

    La distancia de parada es la distancia recorrida por la partícula antes de llegar al reposo.

    a) Expresa la distancia de parada en términos de v_0 y a.

    b) Utiliza la fórmula de la parte a) para calcular la distancia de parada si $v_0 = 10$ m/s y $a = 8 \times 10^5$.

31. **Salario mínimo** En 1971, el salario mínimo en Estados Unidos era de $1.60 por hora. Suponiendo que la tasa de

www.elsolucionario.net

inflación es del 5% por año, indica el salario mínimo equivalente en el año 2010.

32. Valor del terreno En 1867, Estados Unidos compró Alaska a los rusos en $7 200 000. Hay 586 400 mi^2 de tierra en Alaska. Supón que el valor de las tierras aumenta en forma continua a razón de 3% por año y que las tierras se pueden comprar a un precio equivalente; determina el precio de un acre en el año 2000 (1 mi^2 equivale a 640 acres).

Ejercicios 33 y 34: el *rendimiento efectivo* (o tasa de interés anual efectiva) para una inversión es la tasa de interés simple que produciría, al cabo de un año, la misma cantidad dada por la tasa compuesta que se aplica. Calcula, al 0.01% más cercano, el rendimiento efectivo correspondiente a una tasa de interés de i% por año compuesto a) trimestral y b) continuamente.

33. $i = 7$ **34.** $i = 12$

Ejercicios 35 y 36: traza la gráfica de la ecuación. a) Calcula y si $x = 40$ y b) calcula x si $y = 2$.

35. $y = e^{0.085x}$ **36.** $y = e^{0.0525x}$

Ejercicios 37 al 39: a) grafica f en una calculadora y b) traza la gráfica de g tomando los recíprocos de las coordenadas y de a) *sin* usar el dispositivo.

37. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

38. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

39. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

40. Función de densidad de probabilidad En estadística, la función de densidad de probabilidad para la distribución normal está definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \text{ con } z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

donde μ y σ son números reales (μ es la *media* y σ^2 es la *varianza* de la distribución). Traza la gráfica de f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

Ejercicios 41 y 42: grafica f y g en el mismo plano coordenado y calcula las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

41. $f(x) = e^{0.5x} - e^{-0.4x}$; $g(x) = x^2 - 2$

42. $f(x) = 0.3e^x$; $g(x) = x^3 - x$

Ejercicios 43 y 44: las funciones f y g son útiles para calcular e^x en el intervalo [0, 1]. Grafica f, g y $y = e^x$ en el mismo plano coordenado y compara la precisión de $f(x)$ y $g(x)$ como aproximación a e^x.

43. $f(x) = x + 1$; $g(x) = 1.72x + 1$

44. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $g(x) = 0.84x^2 + 0.878x + 1$

(*Nota*: algunas secuencias de tecleo para la TI-82 se presentan en el Ejem. 18, Ap. I.)

Ejercicios 45 y 46: grafica f y calcula sus ceros.

45. $f(x) = x^2e^x - xe^{(x^3)} + 0.1$

46. $f(x) = x^3e^x - x^2e^{2x} + 1$

Ejercicios 47 y 48: grafica f en el intervalo $(0, 200]$. Halla una ecuación aproximada para la asíntota horizontal.

47. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ **48.** $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

Ejercicios 49 y 50: calcula la raíz real de la ecuación.

49. $e^{-x} = x$ **50.** $e^{3x} = 5 - 2x$

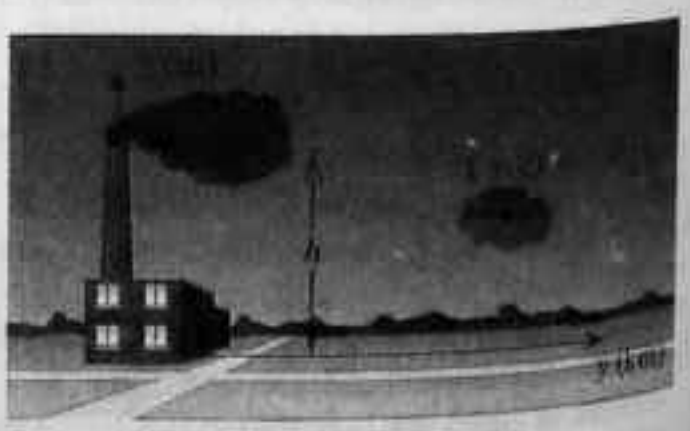
Ejercicios 51 y 52: grafica f y determina en dónde f es creciente o es decreciente.

51. $f(x) = xe^x$ **52.** $f(x) = x^2e^{-2x}$

53. Contaminación de una chimenea La concentración C (en unidades/m^3) de contaminación cerca de un punto a nivel del suelo que está a favor del viento desde una fuente de chimenea de altura h, se encuentra a veces por medio de

$$c = \frac{Q}{\pi vab} e^{-y^2/(2a^2)} \left[e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}\right],$$

donde Q es la intensidad de la fuente (en unidades/s), v es la velocidad promedio del viento (en m/s), z la altura (en m) sobre el punto a favor del viento, y la distancia desde el punto a favor del mismo en la dirección que es perpendicular a éste (dirección de viento transversal) y a y b son constantes que dependen de la distancia a favor del viento (ve la figura).



EJERCICIO 53

www.elsolucionario.net

a) ¿De qué forma modifica el aumento de la altura de la chimenea la concentración de contaminación al nivel del suelo en la posición a favor del viento ($y = 0$ y $z = 0$) si aumenta la altura de la chimenea?

b) ¿De qué modo se altera la concentración de contaminación al nivel del suelo ($z = 0$), para una chimenea de altura h fija si una persona se mueve con el viento de costado al aumentar y?

C **54. Concentración de la contaminación** Consulta el ejercicio 53. Si la altura de la chimenea es de 100 metros y $b = 12$, usa una gráfica para calcular la altura z sobre el punto a favor del viento ($y = 0$) donde ocurre la máxima concentración de contaminación.
(*Sugerencia:* haz $h = 100$, $b = 12$ y grafica la Ec. $C = e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}$.)

C **55. Densidad atmosférica** En la tabla que sigue aparece la densidad atmosférica a una altitud x.

Altitud	0	2000	4000
Densidad	1.225	1.007	0.819

Altitud	6000	8000	10 000
Densidad	0.660	0.526	0.414

a) Encuentra una función $f(x) = C_0e^{kx}$ que permita calcular la densidad a una altitud x, donde C_0 y K son constantes. Traza los datos y f en los mismos ejes coordenados.

b) Utiliza f para pronosticar la densidad a 3000 y 9000 metros. Compara las predicciones con los valores reales de 0.909 y 0.467, respectivamente.

C **56. Gastos gubernamentales** En la próxima tabla aparecen los gastos del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para los años indicados.

Año	1910	1930	1950	1970
Gastos	0.7	3.3	42.6	195.6

Año	1980	1990	1995
Gastos	590.9	1252.7	1538.9

a) Haz que $x = 0$ corresponda al año 1910. Encuentra una función $A(x) = A_0e^{kx}$ que permita calcular los datos, donde A_0 y k son constantes. Traza los datos y A en los mismos ejes coordenados.

b) Con A encuentra gráficamente el año en que el gobierno federal gastó \$1 billón por primera vez.

5.3 Funciones logarítmicas

En la sección 5.1 analizamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o $a > 1$ es biunívoca; en consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1} (Secc. 3.8). Esta inversa de la función exponencial con base a se llama **función logarítmica con base a** y se denota con **$\log_a$**. Sus valores se escriben $\log_a(x)$ o $\log_a x$, que se lee "el logaritmo de x con base a". Así pues por la definición de una función inversa f^{-1},

$$y = f^{-1}(x) \text{ si y sólo si } x = f(y),$$

la definición de $\log_a$ se expresa de esta forma:

Definición de $\log_a$

Sea a un número real positivo diferente de 1. El **logaritmo de x con base a** se define como

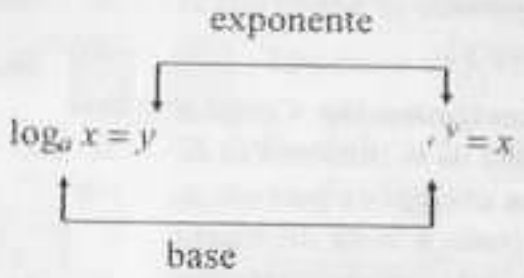
$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y.

www.elsolucionario.net

Notarás que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. La primera se llama **forma logarítmica** y la segunda, **forma exponencial**. Debes esforzarte en dominar la conversión de una en otra. El diagrama que viene puede ayudarte a alcanzar esta meta.

Forma logarítmica **Forma exponencial**



Observa que cuando las formas se cambian, *las bases de las formas logarítmica y exponencial son las mismas*. El número y (o sea, $\log_a x$) corresponde al exponente en la forma exponencial; en otras palabras, $\log_a x$ *es el exponente al que la base debe elevarse para obtener* x.

La próxima ilustración ofrece ejemplos de formas equivalentes.

ILUSTRACIÓN

Formas equivalentes

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
$\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
$r = \log_p q$	$p^r = q$
$w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$
$\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$

El próximo ejemplo contiene una aplicación donde se requiere cambiar de forma exponencial logarítmica.

EJEMPLO 1 *Cambio de forma exponencial en logarítmica*

La cantidad N de bacterias de cierto cultivo después de t horas está dado por $N = (1000)2^t$. Expresa t como una función logarítmica de N con base 2.

Solución

$$N = (1000)2^t \qquad \text{dado}$$

$$\frac{N}{1000} = 2^t \qquad \text{aislar la expresión exponencial}$$

$$t = \log_2 \frac{N}{1000} \qquad \text{cambiar a la forma logarítmica}$$

www.elsolucionario.net

En el ejemplo adjunto damos algunas casos especiales de logaritmos.

EJEMPLO 2 *Busqueda de logaritmos*

Encuentra el número, si es posible.

a) $\log_{10} 100$ **b)** $\log_2 \frac{1}{32}$ **c)** $\log_9 3$ **d)** $\log_7 1$ **e)** $\log_3 (-2)$

Solución En cada caso nos dan $\log_a x$ y debemos hallar el exponente y tal que $a^y = x$; así pues:

a) $\log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.

b) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ porque $2^{-5} = \frac{1}{32}$

c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{1/2} = 3$.

d) $\log_7 1 = 0$ porque $7^0 = 1$.

e) $\log_3 (-2)$ no es posible porque $3^y \neq -2$ para cualquier número real y.

Las propiedades generales que siguen se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

Propiedad de $\log_a x$	Razón	Ilustración
(1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(4) $a^{\log_a x} = x$	ve abajo	$5^{\log_5 7} = 7$

La razón para la propiedad (4) se deduce directamente de la definición de $\log_a$, puesto que

$$\text{si} \quad y = \log_a x, \quad \text{luego} \quad x = a^y \quad \text{o bien} \quad x = a^{\log_a x}.$$

La función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a, de modo que la gráfica de $y = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ hasta la línea $y = x$ (Secc. 3.6). Este procedimiento se ilustra en la figura 18 para el caso $a > 1$. Observa que la intersección x de la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de números reales positivos, el intervalo es ℝ y el eje y es una asíntota vertical. Raras veces se usan los logaritmos con base $0 < a < 1$; por lo tanto, obviaremos sus gráficas.

En la figura 18 se ve que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por lo tanto, es biunívoco, según el teorema de la página 223. Este resultado se combina con las partes (1) y (2) de la definición de una función biunívoca (pág. 221) se obtiene el siguiente teorema, que también se demuestra si $0 < a < 1$.

www.elsolucionario.net

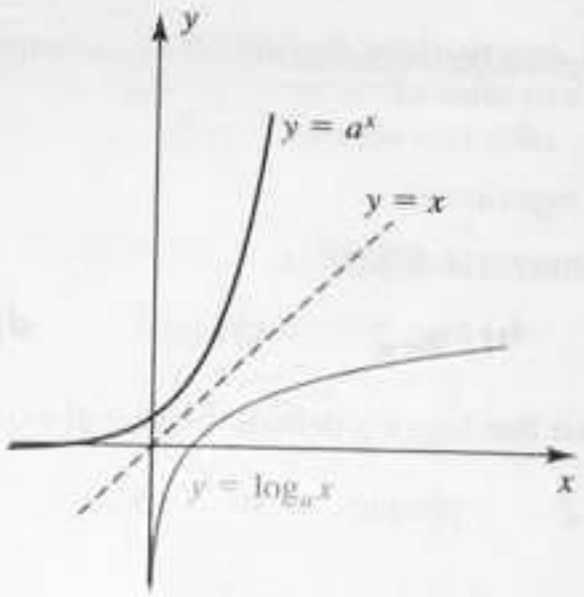


FIGURA 18

Teorema: las funciones logarítmicas son biunívocas

La función logarítmica con base a es biunívoca; por lo tanto, se satisfacen estas condiciones equivalentes para números reales x_1 y x_2:

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

(2) Si $\log_a x_1 = \log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando se usa este teorema como razón para un paso en la solución de un ejemplo, las *funciones logarítmicas son biunívocas.*

En el próximo ejemplo resolvemos una *ecuación logarítmica* simple; es decir, que contiene el logaritmo de una expresión que comprende una variable. Se pueden presentar soluciones extrañas cuando se resuelven ecuaciones logarítmicas; por lo tanto, debemos comprobar dichas respuestas para asegurarnos de que estamos tomando logaritmos *únicamente de números reales positivos*; de otra manera no podremos definir la función logarítmica.

EJEMPLO 3 *Solución de una ecuación logarítmica*

Resuelve la ecuación $\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1)$.

Solución

$$\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1) \qquad \text{dado}$$

$$4x - 5 = 2x + 1 \qquad \text{funciones logarítmicas biunívocas}$$

$$x = 3 \qquad \text{resolver para } x$$

PRUEBA $x = 3$ LI: $\log_6 (4 \cdot 3 - 5) = \log_6 7$

LD: $\log_6 (2 \cdot 3 + 1) = \log_6 7$

www.elsolucionario.net

Como $\log_6 7 = \log_6 7$ es una expresión cierta, $x = 3$ es una solución.

En el ejemplo que viene usamos la definición de logaritmo para resolver una ecuación logarítmica.

EJEMPLO 4 *Solución de una ecuación logarítmica*

Resuelve la ecuación $\log_4 (5 + x) = 3$.

Solución

$$\log_4 (5 + x) = 3 \qquad \text{dado}$$

$$5 + x = 4^3 \qquad \text{cambiar a forma exponencial}$$

$$x = 59 \qquad \text{resolver para } x$$

PRUEBA $x = 59$ LI: $\log_4 (5 + 59) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

LD: 3

Puesto que $3 = 3$ es una expresión cierta, $x = 59$ es una solución.

A continuación trazaremos la gráfica de una función logarítmica específica.

EJEMPLO 5 *Trazo de la gráfica de una función logarítmica*

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 x$.

Solución Describiremos tres métodos para realizar lo anterior.

Método 1 En vista de que las funciones dadas por $\log_3 x$ y 3^x son inversas; procederemos como lo hicimos para $y = \log_a x$ en la figura 18; es decir, trazamos la gráfica de $y = 3^x$ y luego la reflejamos en la linea $y = x$, lo cual nos da el trazo de la figura 19. Advertirás que los puntos $(-1, 3^{-1})$, (0, 1)

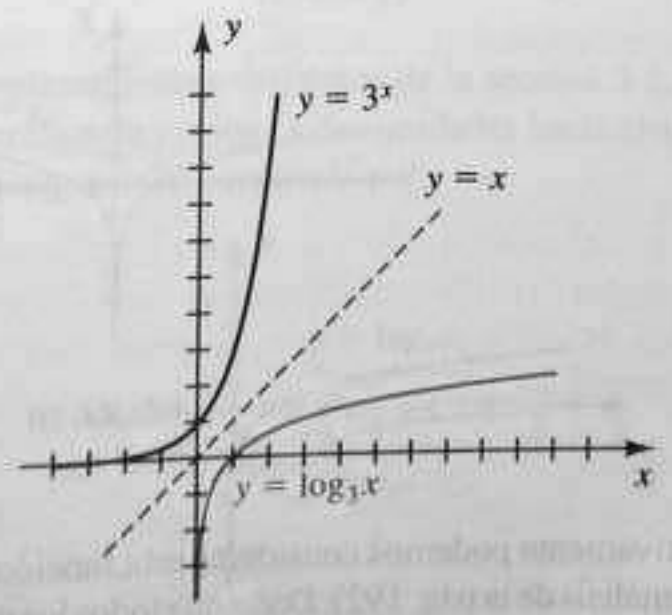


FIGURA 19

www.elsolucionario.net

y (1, 3) de la gráfica de $y = 3^x$ se reflejan en los puntos $(3^{-1}, -1)$, (1, 0) y (3, 1) en la gráfica de $y = \log_3 x$

Método 2 Encontramos puntos en la gráfica de $y = \log_3 x$ con $x = 3^k$, donde k es un número real, y luego aplicamos la propiedad (3) de los logaritmos de la página 371, como sigue:

$$y = \log_3 x = \log_3 3^k = k$$

Con esta fórmula obtenemos los puntos de la gráfica que aparecen en la tabla que sigue.

$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	−3	−2	−1	0	1	2	3

Esto proporciona los puntos obtenidos con el primer método.

Método 3 Podemos trazar la gráfica $y = \log_3 x$ si trazamos la grafica de la forma exponencial equivalente $x = 3^y$.

Al igual que en los próximos ejemplos, con frecuencia deseamos trazar la gráfica de $f(x) = \log_a u$, donde u es alguna expresión con x.

EJEMPLO 6 *Trazo de la gráfica de una función logarítmica*

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 |x|$ para $x \neq 0$.

Solución La gráfica es simétrica con respecto al eje y, ya que

$$f(-x) = \log_3 |-x| = \log_3 |x| = f(x).$$

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y la gráfica coincide con la gráfica de $y = \log_3 x$ trazada en la figura 19. Mediante simetría, reflejamos esa parte de la gráfica hasta el eje y y obtenemos el trazo de la figura 20.

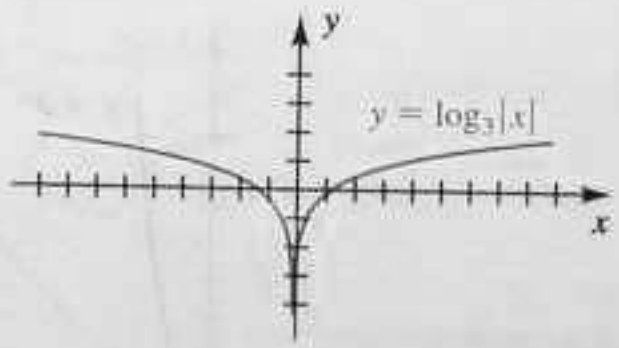


FIGURA 20

Alternativamente podemos considerar esta función como $g(x) = \log_3 x$ con $|x|$ sustituida por x (consulta el análisis de la pág. 192). Dado que todos los puntos de la gráfica de g tienen coordenadas x positivas, podemos obtener la gráfica de f combinando g con la reflexión de t en el eje y.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 7 *Reflexión de la gráfica de una función logarítmica*

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3(-x)$.

Solución El dominio de f es el conjunto de números reales negativos, ya que $\log_3(-x)$ existe sólo si $-x > 0$ o, lo que es igual, $x < 0$. Obtenemos la gráfica de f a partir de la gráfica de $y = \log_3 x$ sustituyendo con $(-x, y)$ cada punto (x, y) de la figura 19. Esto equivale a reflejar la gráfica de $y = \log_3 x$ en el eje y. La gráfica aparece en la figura 21.

Otro método es cambiar $y = \log_3(-x)$ en la forma exponencial $3^y = -x$ y luego trazar la gráfica de $x = -3^y$.

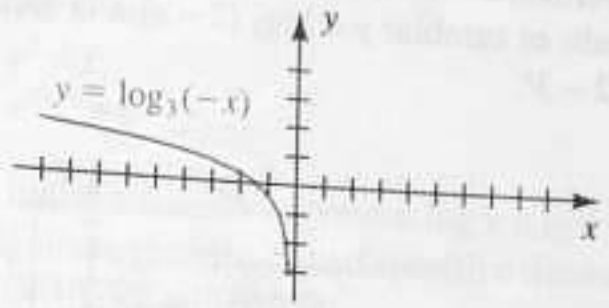


FIGURA 21

EJEMPLO 8 *Desplazamiento de gráficas de ecuaciones logarítmicas*

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = \log_3(x - 2)$ **b)** $y = \log_3 x - 2$

Solución **a)** La gráfica de $y = \log_3 x$ aparece en la figura 19 y en la 22. De acuerdo con el análisis sobre desplazamientos horizontales de la sección 3.5, llegamos a la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ corriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades a la derecha (Fig. 22).

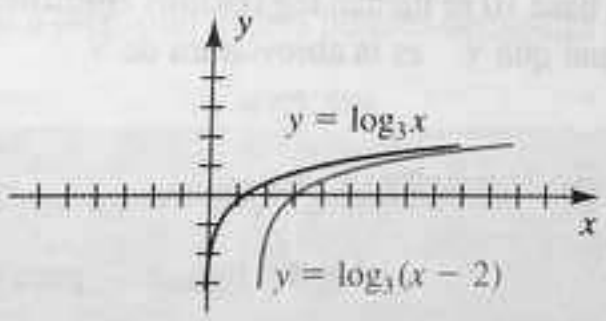


FIGURA 22

b) Según análisis sobre desplazamientos verticales de la sección 3.5, cabe obtener la gráfica de $y = \log_3 x - 2$ moviendo la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo (Fig. 23). Notarás que la intersección x está dada por $\log_3 x = 2$ o sea $x = 3^2 = 9$.

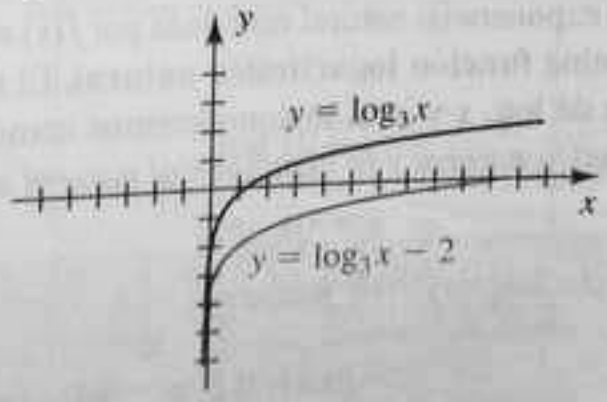


FIGURA 23

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 9 *Reflexión de la gráfica de una función logaritmica*

Traza la gráfica de f si $f(x) = \log_3 (2 - x)$.

Solución Si escribimos

$$f(x) = \log_3 (2 - x) = \log_3 [-(x - 2)],$$

al aplicar la técnica usada para obtener la gráfica de la ecuación $y = \log_3 (-x)$ en el ejemplo 7 (con x sustituida por $x - 2$), vemos que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = \log_3 (x - 2)$ hasta la línea vertical $x = 2$. Esto da el trazo de la figura 24.

Otro método es cambiar $y = \log_3 (2 - x)$ a la forma exponencial $3^y = 2 - x$ y luego trazar la gráfica de $x = 2 - 3^y$.

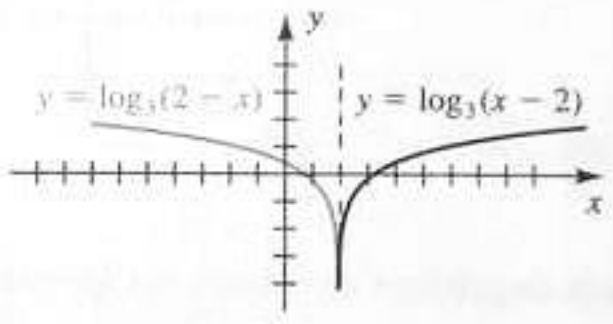


FIGURA 24

Antes de que se inventaran las calculadoras, se usaban los logaritmos con base 10 para complicados cálculos numéricos con factores, cocientes y potencias de números reales. Se utilizaba la base 10 porque estaba bien adaptada para números expresados en notación científica. Los logaritmos con base 10 se llaman **logaritmos comunes.** El símbolo **log** x se usa como abreviatura de $\log_{10} x$, al igual que $\sqrt{\ }$ es la abreviatura de $\sqrt[2]{\ }$.

Definición de logaritmo común

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{para toda} \quad x > 0$$

Dado que se dispone de calculadoras de poco costo, no hay necesidad de los logaritmos comunes como herramienta para trabajo de cálculos. No obstante, la base 10 tiene diversidad de aplicaciones y por ello muchas calculadoras cuentan con una tecla [LOG] para calcular logaritmos comunes.

La función exponencial natural está dada por $f(x) = e^x$ (Secc. 5.2). La función logarítmica con base e se denomina **función logarítmica natural.** El símbolo **ln** x (que se lee "ele ene de x") es una abreviatura de $\log_e x$ y aquí lo conoceremos como **logaritmo natural de** x; por lo tanto, *la función logarítmica natural y la exponencial natural son funciones inversas.*

Definición de logaritmo natural

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para toda} \quad x > 0$$

www.elsolucionario.net

Muchas calculadoras tienen una tecla marcada [LN], que sirve para calcular logaritmos naturales. La siguiente ilustración da varios ejemplos de formas equivalentes con logaritmos comunes y naturales.

ILUSTRACIÓN

Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log x = 2$	$10^2 = x$
$\log z = y + 3$	$10^{y+3} = z$
$\ln x = 2$	$e^2 = x$
$\ln z = y + 3$	$e^{y+3} = z$

En una calculadora, para hallar x cuando se conoce $\log x$ o $\ln x$ se usa la tecla [10^x] o la [e^x], respectivamente, como en el siguiente ejemplo. Si tu dispositivo tiene una tecla [INV] (por inverso), pulsa x y enseguida presiona [INV] [LOG] o [INV] [LN].

EJEMPLO 10 *Solución de una ecuación logarítmica*

Halla x si

a) $\log x = 1.7959$ **b)** $\ln x = 4.7$

Solución **a)** Cambiar $\log x = 1.7959$ en su forma exponencial equivalente da

$$x = 10^{1.7959}.$$

Al evaluar la última expresión a precisión de tres lugares decimales tendremos

$$x \approx 62.503.$$

b) Cambiar $\ln x = 4.7$ en su forma exponencial equivalente da

$$x = e^{4.7} \approx 109.95.$$

La tabla adjunta muestra formas de logaritmos comunes y naturales para algunas de las propiedades estudiadas.

Logaritmos de base a	Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
$\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log_a a^x = x$	$\log 10^x = x$	$\ln e^x = x$
$a^{\log_a x} = x$	$10^{\log x} = x$	$e^{\ln x} = x$

Los próximos cuatro ejemplos exponen aplicaciones de logaritmos comunes y naturales.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 11 *Escala Richter*

En la escala Richter, la magnitud R de la intensidad I de un temblor está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

donde I_0 es cierta intensidad mínima.

a) Si la intensidad de un temblor es $1000I_0$, encuentra R.

b) Expresa I en la forma de R e I_0.

Solución **a)**

$$R = \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{dado}$$

$$= \log \frac{1000I_0}{I_0} \qquad \text{sea } I = 1000I_0$$

$$= \log 1000 \qquad \text{cancelar } I_0$$

$$= \log 10^3 \qquad 1000 = 10^3$$

$$= 3 \qquad \log 10^x = x \text{ para toda } x$$

b)

$$R = \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{dado}$$

$$\frac{I}{I_0} = 10^R \qquad \text{cambiar a forma exponencial}$$

$$I = I_0 \cdot 10^R \qquad \text{multiplicar por } I_0$$

EJEMPLO 12 *Ley de Newton del enfriamiento*

Esta ley señala que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. La ley de Newton es útil para demostrar que, en ciertas condiciones, la temperatura T (en °C) de un objeto en un tiempo t (en horas) está dada por $t = 75e^{-2t}$. Expresa t como función de T.

Solución

$$T = 75e^{-2t} \qquad \text{dado}$$

$$e^{-2t} = \frac{T}{75} \qquad \text{aislar expresión exponencial}$$

$$-2t = \ln \frac{T}{75} \qquad \text{cambiar a forma logaritmica}$$

$$t = -\frac{1}{2} \ln \frac{T}{75} \qquad \text{dividir entre } -2$$

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 13 *Cálculo de un tiempo de duplicación*

Supongamos que una población crece continuamente a razón de 4% al año. Calcula el tiempo que tardará en duplicarse; esto es, su **tiempo de duplicación**.

Solución Observa que no se indica la población inicial. Esto no representa problema porque sólo deseamos establecer el tiempo necesario para obtener el tamaño de un apoblación en relación con su tamaño inicial. Con la fórmula del crecimiento $q = q_0e^{rt}$ con $r = 0.04$ resulta

$$2q_0 = q_0e^{0.04t} \qquad \text{sea } q = 2q_0$$

$$2 = e^{0.04t} \qquad \text{dividir entre } q_0\ (q_0 \neq 0)$$

$$0.04t = \ln 2 \qquad \text{cambiar a forma logarítmica}$$

$$t = 25 \ln 2 \approx 17.3 \text{ años}. \qquad \text{multiplicar por } \frac{1}{0.04} = 25$$

La ausencia de efecto de q_0 en la respuesta indica que el tiempo de duplicación para una población de 1000 es el mismo que para 1 000 000 o cualquier otra población inicial razonable.

Del último ejemplo podemos obtener una fórmula general para hallar el tiempo de duplicación de una población; es decir

$$rt = \ln 2 \qquad \text{o bien, lo que es igual,} \qquad t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Dado que $\ln 2 \approx 0.69$, el tiempo de duplicar t para un crecimiento de este tipo es aproximadamente $0.69/r$. Puesto que los números 70 y 72 son cercanos a 69 pero tienen más divisores, algunos investigadores se refieren a esta relación de duplicación como la **regla del 70** o **regla del 72**. A manera de ilustración de la regla 72, si la tasa de crecimiento de una población es 8%, entonces tardará alrededor de 72/8 = 9 años en duplicarse. En forma más precisa, este valor es

$$\frac{\ln 2}{8} \cdot 100 \approx 8.7 \text{ años}.$$

EJEMPLO 14 *Vida media de una sustancia radiactiva*

Un físico encuentra que una sustancia radiactiva desconocida registra 2000 conteos por minuto en un contador Geiger; diez días después la sustancia registra 1500 conteos por minuto. Mediante cálculo integral, se puede demostrar que al cabo de t días la cantidad de material radiactivo, y por lo tanto el número de conteos por minuto $N(t)$, es directamente proporcional a e^{ct} para alguna constante c. Determina la vida media de la sustancia.

Solución En vista de que $N(t)$ es directamente proporcional a e^{ct},

$$N(t) = ke^{ct},$$

www.elsolucionario.net

donde k es una constante. Con $t = 0$ y con $N(0) = 2000$, obtenemos

$$2000 = ke^{c0} = k \cdot 1 = k.$$

En consecuencia, la fórmula para $N(t)$ se escribe

$$N(t) = 2000e^{ct}.$$

Dado que $N(10) = 1500$, c se determina así:

$1500 = 2000e^{c \cdot 10}$	sea $t = 10$ en $N(t)$
$\frac{3}{4} = e^{10c}$	aislar la expresión exponencial
$10c = \ln \frac{3}{4}$	cambiar a forma logarítmica
$c = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}$	dividir entre 10

Por último, puesto que la vida media corresponde al tiempo t al que $N(t)$ es igual a 1000, tenemos:

$1000 = 2000e^{ct}$	sea $N(t) = 1000$
$\frac{1}{2} = e^{ct}$	aislar la expresión exponencial
$ct = \ln \frac{1}{2}$	cambiar a forma logarítmica
$t = \frac{1}{c} \ln \frac{1}{2}$	dividir entre c
$= \frac{1}{\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}} \ln \frac{1}{2}$	$c = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}$
≈ 24 días	calcular

El siguiente ejemplo es una buena ilustración de la capacidad de una calculadora graficadora, dado que es imposible hallar la solución exacta usando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 15 *Aproximación de una solución a una desigualdad*

Grafica $f(x) = \log(x - 1)$ y $g(x) = \ln(3 - x)$, y calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

Solución Comenzamos con las asignaciones

$$Y_1 = \log(x + 1) \quad \text{y} \quad Y_2 = \ln(3 - x).$$

En vista de que el dominio de f es $(-1, \infty)$, y el dominio de g es $(-\infty, 3)$, escogemos la pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$ y obtenemos la gráfica de la figura 25. Con zoom o intersect encontramos que

www.elsolucionario.net

el punto de intersección es aproximadamente (1.51, 0.40); por lo tanto, la solución de $f(x) \geq g(x)$ es el intervalo

$$1.51 < x < 3.$$

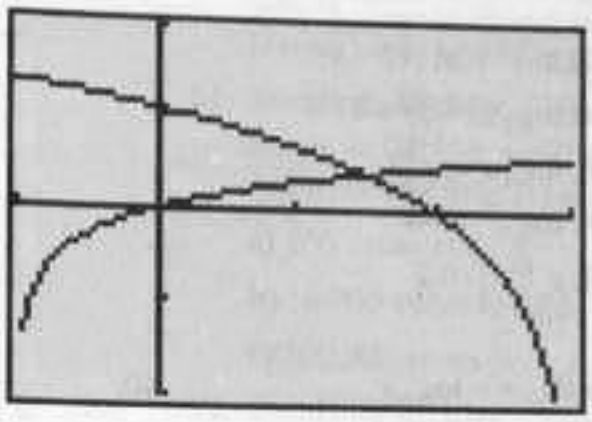


FIGURA 25 [–1, 3] por [–2, 2]

5.3 EJERCICIOS

Ejercicios 1 y 2: cambia a la forma logarítmica.

1. **a)** $4^3 = 64$ **b)** $4^{-3} = \frac{1}{64}$ **c)** $t^r = s$
   d) $3^x = 4 - t$ **e)** $5^{7t} = \dfrac{a+b}{a}$ **f)** $(0.7)^t = 5.3$

2. **a)** $3^5 = 243$ **b)** $3^{-4} = \frac{1}{81}$ **c)** $c^p = d$
   d) $7^x = 100p$ **e)** $3^{-2x} = \dfrac{P}{F}$ **f)** $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

Ejercicios 3 y 4: pasa a la forma exponencial.

3. **a)** $\log_2 32 = 5$ **b)** $\log_3 \frac{1}{243} = -5$
   c) $\log_t r = p$ **d)** $\log_3 (x+2) = 5$
   e) $\log_2 m = 3x + 4$ **f)** $\log_b 512 = \frac{3}{2}$

4. **a)** $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_4 \frac{1}{256} = -4$
   c) $\log_v w = q$ **d)** $\log_6 (2x-1) = 3$
   e) $\log_4 p = 5 - x$ **f)** $\log_a 343 = \frac{3}{4}$

Ejercicios 5 al 8: despeja *t* usando logaritmos de base *a*.

5. $2d^{t/3} = 5$ 6. $3a^{4t} = 10$
7. $A = Ba^{Ct} + D$ 8. $L = Md^{t/N} - P$

Ejercicios 9 y 10: convierte en la forma logarítmica.

9. **a)** $10^5 = 100\,000$ **b)** $10^{-3} = 0.001$
   c) $10^x = y + 1$ **d)** $e^7 = p$
   e) $e^{kt} = 3 - x$

10. **a)** $10^4 = 10\,000$ **b)** $10^{-2} = 0.01$
    c) $10^x = 38z$ **d)** $e^4 = D$
    e) $e^{0.1t} = x + 2$

Ejercicios 11 y 12: pasa a la forma exponencial.

11. **a)** $\log x = 50$ **b)** $\log x = 20t$
    c) $\ln x = 0.1$ **d)** $\ln w = 4 + 3x$
    e) $\ln (z-2) = \frac{1}{6}$

12. **a)** $\log x = -8$ **b)** $\log x = y - 2$
    c) $\ln x = \frac{1}{2}$ **d)** $\ln z = 7 + x$
    e) $\ln (t-5) = 1.2$

Ejercicios 13 y 14: encuentra el número, si es posible.

13. **a)** $\log_5 1$ **b)** $\log_3 3$ **c)** $\log_4 (-2)$
    d) $\log_7 7^2$ **e)** $3^{\log_3 8}$ **f)** $\log_5 125$
    g) $\log_4 \frac{1}{16}$

14. **a)** $\log_8 1$ **b)** $\log_9 9$ **c)** $\log_5 0$
    d) $\log_6 6^7$ **e)** $5^{\log_5 4}$ **f)** $\log_3 243$
    g) $\log_2 128$

Ejercicios 15 y 16: halla el número.

15. **a)** $10^{\log 3}$ **b)** $\log 10^5$ **c)** $\log 100$
    d) $\log 0.0001$ **e)** $e^{\ln 2}$ **f)** $\ln e^{-3}$
    g) $e^{2 + \ln 3}$

16. **a)** $10^{\log 7}$ **b)** $\log 10^{-6}$ **c)** $\log 100\,000$
    d) $\log 0.001$ **e)** $e^{\ln 8}$ **f)** $\ln e^{2/3}$
    g) $e^{1 + \ln 5}$

www.elsolucionario.net

Ejercicios 17 al 30: resuelve la ecuación.

17. $\log_4 x = \log_4 (8 - x)$

18. $\log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$

19. $\log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$

20. $\log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$

21. $\log x^2 = \log (-3x - 2)$

22. $\ln x^2 = \ln (12 - x)$

23. $\log_3 (x - 4) = 2$

24. $\log_2 (x - 5) = 4$

25. $\log_9 x = \frac{3}{2}$

26. $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

27. $\ln x^2 = -2$

28. $\log x^2 = -4$

29. $e^{2 \ln x} = 9$

30. $e^{-\ln x} = 0.2$

31. Traza la gráfica de f si $a = 4$:

a) $f(x) = \log_a x$

b) $f(x) = -\log_a x$

c) $f(x) = 2 \log_a x$

d) $f(x) = \log_a (x + 2)$

e) $f(x) = (\log_a x) + 2$

f) $f(x) = \log_a (x - 2)$

g) $f(x) = (\log_a x) - 2$

h) $f(x) = \log_a |x|$

i) $f(x) = \log_a (-x)$

j) $f(x) = \log_a (3 - x)$

k) $f(x) = |\log_a x|$

32. Trabaja el ejercicio 31 con $a = 5$.

Ejercicios 33 al 36: traza la gráfica de f.

33. $f(x) = \log x$

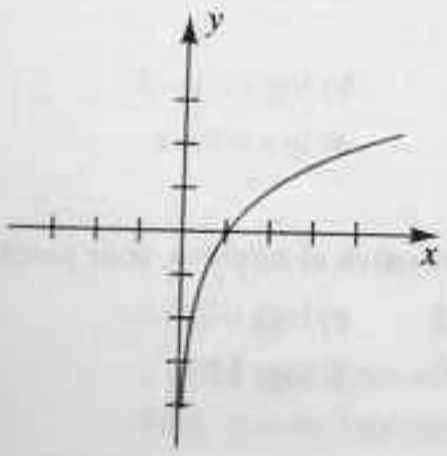
34. $f(x) = \ln x$

35. $f(x) = \log_2 |x - 5|$

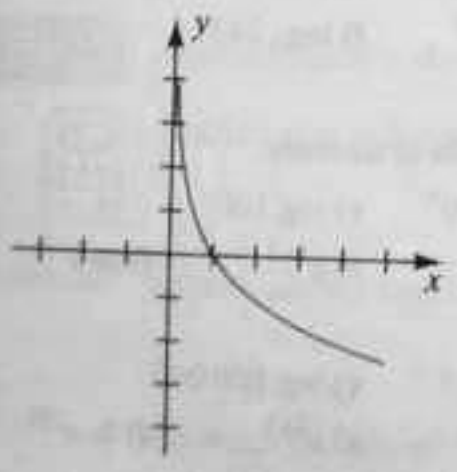
36. $f(x) = \log_3 |x + 1|$

Ejercicios 37 al 44: en la figura se muestra la gráfica de una función f. Expresa $f(x)$ en términos de logaritmos con base 2.

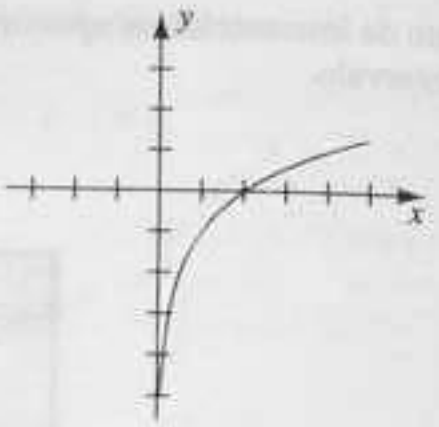
37.



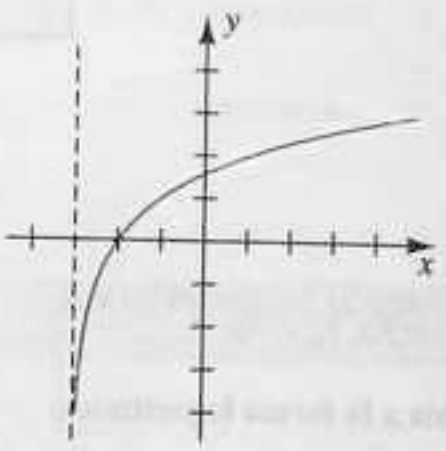
38.



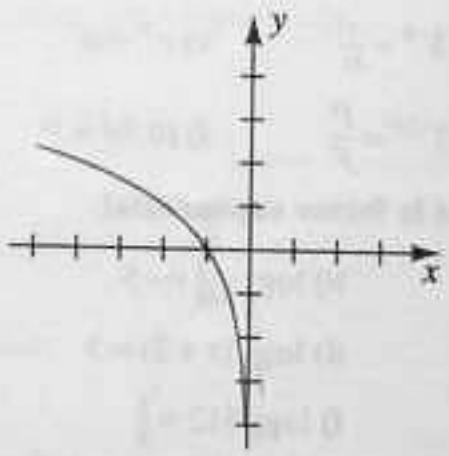
39.



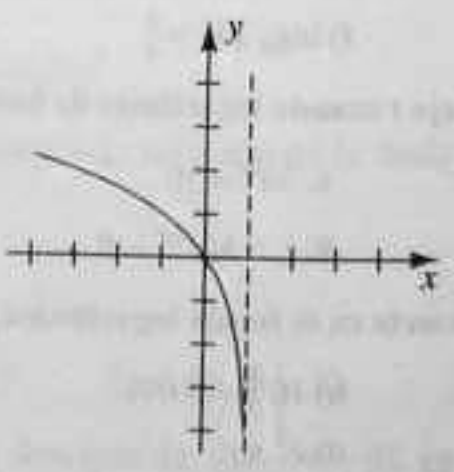
40.



41.

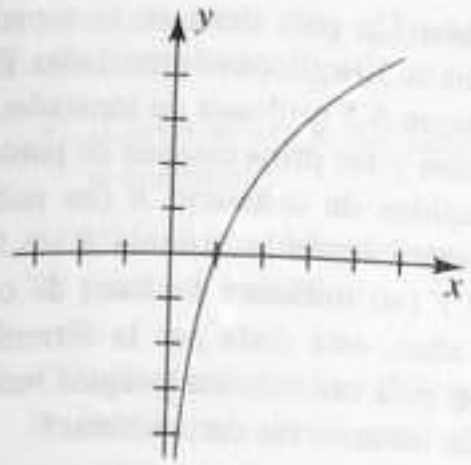


42.

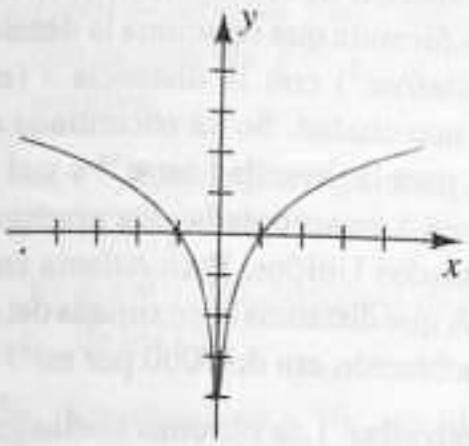


www.elsolucionario.net

43.



44.



Ejercicios 45 y 46: calcula x a tres cifras significativas.

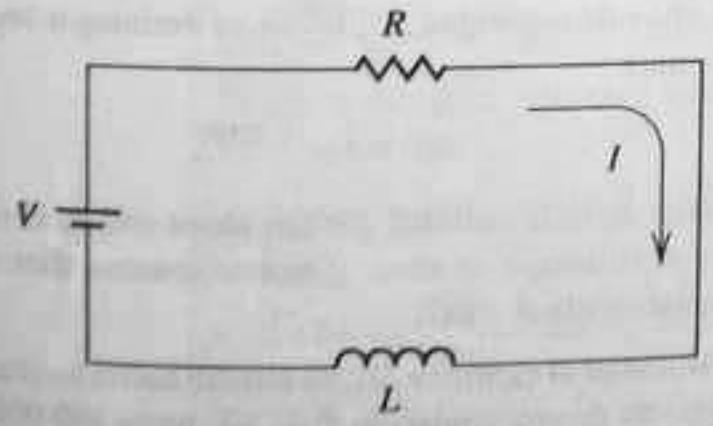
45. **a)** $\log x = 3.6274$ **b)** $\log x = 0.9469$
c) $\log x = -1.6253$ **d)** $\ln x = 2.3$
e) $\ln x = 0.05$ **f)** $\ln x = -1.6$

46. **a)** $\log x = 1.8965$ **b)** $\log x = 4.9680$
c) $\log x = -2.2118$ **d)** $\ln x = 3.7$
e) $\ln x = 0.95$ **f)** $\ln x = -5$

47. **Desintegración del radio** Si comenzamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad q restante después de t años está dada por $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Expresa t en términos de q y q_0.

48. **Desintegración del isótopo del bismuto** El isótopo radiactivo de bismuto, ^{210}Bi, se desintegra según la fórmula $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es una constante y t es el tiempo en días. Expresa t en términos de Q y k.

49. **Circuito eléctrico** En la figura aparece el diagrama de un circuito eléctrico sencillo que consta de un resistor y un inductor. La corriente I en el tiempo t está dada por $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L es la inductancia. Resuelve esta ecuación para t.



EJERCICIO 49

50. **Condensador eléctrico** Se deja descargar un condensador eléctrico con carga inicial Q_0. Después de t segundos, la carga Q es $Q = Q_0e^{kt}$, donde k es una constante. Despeja esta ecuación para t.

51. **Escala de Richter** Utiliza la fórmula $R = \log(I/I_0)$ de la escala de Richter para hallar la magnitud de un temblor que tiene una intensidad.
a) 100 veces la de I_0
b) 10 000 veces la de I_0
c) 100 000 veces la de I_0

52. **Escala de Richter** Consulta el ejercicio 51. Las magnitudes de los temblores más notables que se han registrado han sido entre 8 y 9 en la escala de Richter. Encuentra las intensidades correspondientes en términos de I_0.

53. **Intensidad del sonido** El nivel de un sonido, como lo capta el oído humano, se basa en su nivel de intensidad. Una fórmula para hallar el nivel de intensidad α (en decibeles) que corresponde a una intensidad sonora I es $\alpha = 10\log(I/I_0)$, donde I_0 es un valor especial de I acordado como el sonido más débil perceptible por el oído en ciertas condiciones. Encuentra α si
a) I es 10 veces más grande que I_0
b) I es 1000 veces más grande que I_0
c) I es 10 000 veces más grande que I_0 (éste es el nivel de intensidad de una voz promedio).

54. **Intensidad del sonido** Consulta el ejercicio 53. Un nivel de intensidad de 140 decibeles produce dolor en el oído humano promedio. ¿Aproximadamente cuántas veces más grande que I_0 debe ser I para que α llegue a este nivel?

55. **Crecimiento poblacional en Estados Unidos** La población $N(t)$(en millones) de Estados Unidos, t años después de 1980, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 227e^{0.007t}$. ¿Cuándo llegará al doble?

56. **Crecimiento poblacional en la India** La población $N(t)$ (en millones) de la India, t años después de 1985, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 762e^{0.022t}$ ¿Cuándo llegará a 1500 millones?

57. **Peso de niños** La relación de Ehrenberg

$$\ln W = \ln 2.4 + (1.84)h$$

es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en m) con el peso promedio W (en kg) para niños entre 5 y 13 años de edad.
a) Expresa W como función de h que no contenga ln.

www.elsolucionario.net

b) Calcula el peso promedio de un niño de 8 años que mide 1.5 metros.

58. Interés compuesto continuamente Si el interés es compuesto continuamente a una tasa de 10% por año, calcula cuántos años se requieren para que un depósito inicial de \$6000 se convierta en \$25 000.

59. Presión del aire La fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$ permite calcular la presión del aire $p(h)$ (en lb/in^2), a una altitud de h pies sobre el nivel del mar. Indica a qué altitud h aproximada la presión del aire será:

a) $10\ \text{lb/in}^2$

b) La mitad de su valor al nivel del mar.

60. Presión de vapor La presión P de vapor de un líquido (en lb/in^2), que es una medida de su volatilidad, se relaciona con su temperatura T (en °F) por la ecuación de Antoine

$$\ln P = a + \frac{b}{c+T}$$

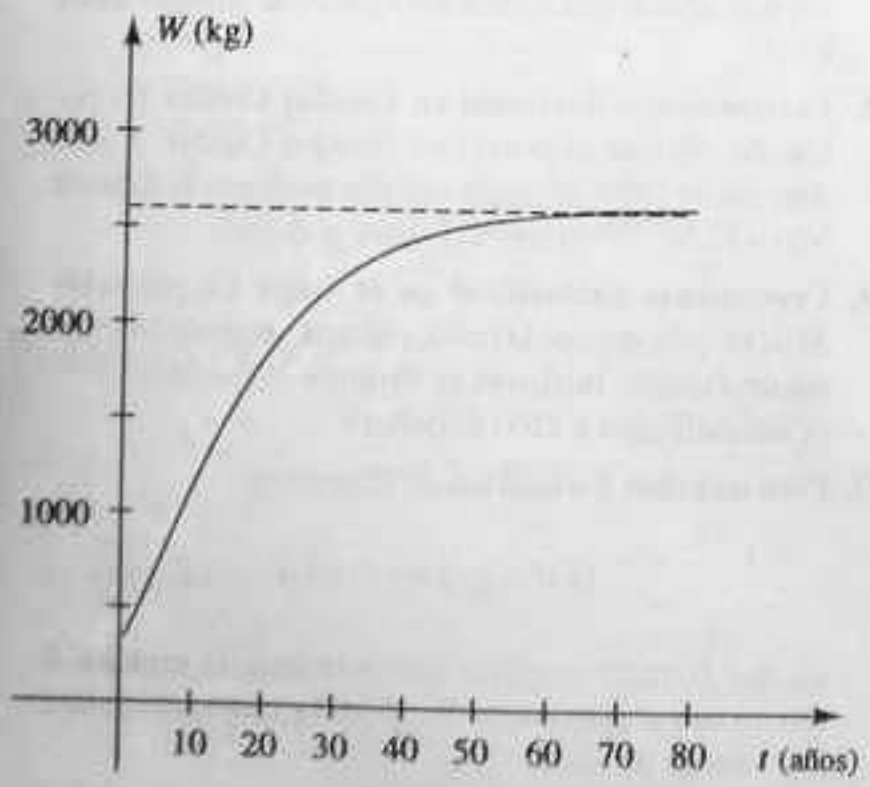
donde a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente con un incremento en temperatura. Expresa P como función de T.

61. Crecimiento de los elefantes El peso W (en kg) de una elefanta africana, a la edad de t (en años), se calcula mediante

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

a) Calcula el peso al nacer.

b) Calcula la edad de una elefanta africana de 1800 kg mediante (1) la gráfica siguiente y (2) la fórmula W de este ejercicio.



EJERCICIO 61

62. Consumo de carbón Un país tiene en la actualidad reservas carboníferas de 50 millones de toneladas. El año pasado se consumieron 6.5 millones de toneladas. Los datos de años pasados y las proyecciones de población sugieren que la rapidez de consumo R (en millones de tons/año) aumentará según la fórmula $R = 6.5e^{0.02t}$ y la cantidad total T (en millones de tons) de carbón que se usará en t años, está dada por la fórmula $T = 325(e^{0.02t} - 1)$. Si el país usa sólo sus propios recursos, ¿cuándo se agotarán las reservas carboníferas?

63. Densidad de la población urbana Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad D poblacional (en miles/mi^2) con la distancia x (en mi) desde el centro de una ciudad. Se ha encontrado que la fórmula $D = ae^{-bx}$, para la densidad central a y el coeficiente de decaimiento b, es apropiada para muchas grandes ciudades de Estados Unidos. Para Atlanta en 1970 $a = 5.5$ y $b = 0.10$ ¿A qué distancia aproximada del centro la densidad de la población era de 2000 por mi^2?

64. Brillantez de las estrellas Las estrellas se clasifican en categorías de brillantez llamadas magnitudes. A las menos brillantes, con flujo luminoso L_0, se les asignó una magnitud de 6; a las más brillantes y de flujo luminoso L, una magnitud m por medio de la fórmula

$$m = 6 - (2.5)\log\frac{L}{L_0}.$$

a) Encuentra m si $L = 10^{0.4}\,L_0$.

b) Resuelve la ecuación para L en términos de m y L_0.

65. Desintegración del yodo radiactivo El yodo radiactivo ^{131}I se usa con frecuencia en estudios de exploración o rastreo de la glándula tiroides. La sustancia se desintegra según la fórmula $A(t) = A_0a^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Encuentra a, suponiendo que la vida media del ^{131}I es de ocho días.

66. Contaminación radiactiva La lluvia ácida ha depositado estroncio radiactivo ^{90}Sr en un gran campo. Si pasa suficiente cantidad a la cadena alimenticia hasta los seres humanos, puede ocasionar cáncer óseo. Se ha determinado que el nivel de radiactividad del campo es 2.5 veces el nivel de seguridad S. El ^{90}Sr se desintegra según la fórmula

$$A(t) = A_0e^{-0.0239t},$$

donde A_0 es la cantidad que por ahora está en el campo y t es el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminada el área?

67. Velocidad al caminar En un estudio hecho en ciudades que van de una población P de 300 hasta 300 000 000, se encontró que la velocidad S promedio de una persona

www.elsolucionario.net

al caminar (en ft/s) se puede calcular con la ecuación $S = 0.05 + 0.86 \log P$.

a) ¿Cómo afecta la población a la velocidad promedio al caminar?

b) ¿Para qué población será de 5 ft/s la velocidad promedio al caminar?

68. Circuitos integrados (CI) para computadoras Entre los fabricantes de CI para computadoras, es importante considerar la fracción F de CI que fallará despues de t años de servicio. Esta fracción se puede calcular a veces con la fórmula $F = 1 - e^{-ct}$, donde c es una constante positiva.

a) ¿Cómo es que el valor de c afecta la confibialidad de un CI?

b) si $c = 0.125$, ¿después de cuántos años fallará el 35% de los CI?

C Ejercicios 69 y 70: calcula la función al valor de x a cuatro lugares decimales.

69. a) $f(x) = \ln(x + 1) + e^x$, $x = 2$

b) $g(x) = \dfrac{(\log x)^2 - \log x}{4}$, $x = 3.97$

70. a) $f(x) = \log(2x^2 + 1) - 10^{-x}$, $x = 1.95$

b) $g(x) = \dfrac{x - 3.4}{\ln x + 4}$, $x = 0.55$

C Ejercicios 71 y 72: calcula la raíz de la ecuación.

71. $x \ln x = 1$ **72.** $\ln x + x = 0$

C Ejercicios 73 y 74: grafica f y g en el mismo plano coordenado; calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$

73. $f(x) = 2.2 \log(x + 2)$; $g(x) = \ln x$

(*Nota*: en el Ejem. 19, Ap. I se presentan algunas secuencias de tecleo específicas de la TI-82.)

74. $f(x) = x \ln |x|$; $g(x) = 0.15e^x$

C 75. Nivel de colesterol en mujeres Algunos estudios que relacionan el nivel de colesterol seroso con afecciones de las arterias coronarias, sugieren que un factor de riesgo esla relación x de la cantidad total C de colesterol en la sangre con la cantidad H de colesterol de lipoproteína de alta densidad en la sangre. Para una mujer, el riesgo R de sufrir un ataque al corazón se puede calcular mediante la ecuación

$$R = 2.07 \ln x - 2.04 \text{ siempre que } 0 \leq R \leq 1.$$

Por ejemplo, si $R = 0.65$, entonces hay un 65% de probabilidad de que una mujer sufra un ataque al corazón durante una vida promedio.

a) Calcula R para una mujer con $C = 242$ y $H = 78$.

b) Graficamente calcula x cuando el riesgo sea de 75 por ciento.

C 76. Nivel de colesterol en hombres Consulta el ejercicio anterior. Para un varón, el riesgo puede calcularse con la fórmula $R = 1.36 \ln x - 1.19$.

a) Calcuia R para un hombre con $C = 287$ y $H = 65$.

b) Gráficamente calcula x cuando el riesgo es del 75 por ciento.

5.4 Propiedades de los logaritmos

En la sección anterior vimos que $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente; en consecuencia, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes sirvan para obtener las correspondientes de los logaritmos. Esto se demuestra en las pruebas de las siguientes leyes, que son fundamentales para todo trabajo con logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Si u y w denotan números reales positivos, entonces

(1) $\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$

(2) $\log_a \left(\dfrac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$

(3) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c

www.elsolucionario.net

PRUEBA Para las tres pruebas, hagamos

$$r = \log_a u \qquad \text{y} \qquad s = \log_a w.$$

Las formas exponenciales equivalentes son

$$u = a^r \qquad \text{y} \qquad w = a^s.$$

Ahora procedemos de este modo

(1)	$uw = a^r a^s$	definición de u y w
	$uw = a^{r+s}$	ley 1 de los exponentes
	$\log_a (uw) = r + s$	cambiar a forma logarítmica
	$\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$	definición de r y s
(2)	$\dfrac{u}{w} = \dfrac{a^r}{a^s}$	definición de u y w
	$\dfrac{u}{w} = a^{r-s}$	ley 5(a) de los exponentes
	$\log_a \left(\dfrac{u}{w}\right) = r - s$	cambiar a forma logarítmica
	$\log_a \left(\dfrac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$	definición de r y s
(3)	$u^c = (a^r)^c$	definición de u
	$u^c = a^{cr}$	ley 2 de los exponentes
	$\log_a (u^c) = cr$	cambiar a forma logarítmica
	$\log_a (u^c) = c \log_a u$	definición de r

Las leyes de los logaritmos para casos especiales $a = 10$ (comunes) y $a = e$ (naturales) se escriben como en la tabla.

Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
$\log (uw) = \log u + \log w$	$\ln (uw) = \ln u + \ln w$
$\log \left(\dfrac{u}{w}\right) = \log u - \log w$	$\ln \left(\dfrac{u}{w}\right) = \ln u - \ln w$
$\log (u^c) = c \log u$	$\ln (u^c) = c \ln u$

Según se indica en el próximo aviso de precaución, no hay leyes generales para expresar $\log_a (u + w)$ o $\log_a (u - w)$ en términos de logaritmos más sencillos.

www.elsolucionario.net

Precaución

$$\log_a (u + w) \neq \log_a u + \log_a w;$$
$$\log_a (u - w) \neq \log_a u - \log_a w$$

Los próximos ejemplos ilustran los usos de las leyes de los logaritmos.

EJEMPLO 1 *Uso de las leyes de los logaritmos*

Expresa $\log_a \dfrac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$ en términos de logaritmos de x, y y z.

Solución Escribimos $\sqrt{y}$ como $y^{1/2}$ y usamos las leyes de los logaritmos:

$$\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2} = \log_a (x^3 y^{1/2}) - \log_a z^2 \qquad \text{ley (2)}$$
$$= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2 \qquad \text{ley (1)}$$
$$= 3 \log_a x + \tfrac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z \qquad \text{ley (3)}$$

Observa que si un término con exponete positivo (como x^3) se encuentra en numerador de la expresión original, tendrá un coeficiente positivo en la forma expandida; si está en el denominador (como z^2), poseerá un coeficiente negativo en la forma expandida.

EJEMPLO 2 *Uso de las leyes de los logaritmos*

Expresa como un logaritmo:

$$\tfrac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z$$

Solución Aplicamos las leyes de los logaritmos:

$$\tfrac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z$$
$$= \log_a (x^2 - 1)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4 \qquad \text{ley (3)}$$
$$= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y + \log_a z^4) \qquad \text{álgebra}$$
$$= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a (yz^4) \qquad \text{ley (1)}$$
$$= \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4} \qquad \text{ley (2)}$$

EJEMPLO 3 *Solución de una ecuación logarítmica*

Resuelve la ecuación $\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$.

www.elsolucionario.net

Solución

$\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$	dado
$\log_5 (2x + 3) = \log_5 (11 \cdot 3)$	ley (1) de los logaritmos
$2x + 3 = 33$	funciones logarítmicas biunívocas
$x = 15$	despejar x

PRUEBA $x = 15$ LI: $\log_5 (2 \cdot 15 + 3) = \log_5 33$

LD: $\log_5 11 + \log_5 3 = \log_5 (11 \cdot 3) = \log_5 33$

En vista de que $\log_5 33 = \log_5 33$ es una expresión cierta, $x = 15$ es una solución.

Las leyes de los logaritmos se demostraron para logaritmos de números u y w reales *positivos*. Si las aplicamos a ecuaciones en que u y w sean expresiones con una variable, pueden resultar soluciones extrañas; por lo tanto, las respuestas deben sustituirse con la variable en lugar de u y w para determinar si estas expresiones están definidas.

EJEMPLO 4 *Solución de una ecuación logarítmica*

Resuelve la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.

Solución

$\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$	dado
$\log_2 [x(x + 2)] = 3$	ley (1) de los logaritmos
$x(x + 2) = 2^3$	cambiar a forma exponencial
$x^2 + 2x - 8 = 0$	multiplicar e igualar a 0
$(x - 2)(x + 4) = 0$	factorizar
$x - 2 = 0, \ x + 4 = 0$	teorema de factor 0
$x = 2, \quad x = -4$	despejar x

PRUEBA $x = 2$ LI: $\log_2 2 + \log_2 (2 + 2) = 1 + \log_2 4$

$= 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$

LD: 3

Dado que $3 = 3$ es una expresión cierta, $x = 2$ es una solución.

www.elsolucionario.net

PRUEBA $x = -4$ LI: $\log_2 (-4) + \log_2 (-4 + 2)$

En vista de que los logaritmos de números negativos no están definidos, $x = -4$ no es una solución.

EJEMPLO 5 *Solución de una ecuación logarítmica*

Resuelve la ecuación $\ln (x + 6) - \ln 10 = \ln (x - 1) - \ln 2$.

Solución

$$\ln (x + 6) - \ln (x - 1) = \ln 10 - \ln 2 \qquad \text{reacomodar términos}$$

$$\ln \left(\frac{x + 6}{x - 1} \right) = \ln \frac{10}{2} \qquad \text{ley (2) de los logaritmos}$$

$$\frac{x + 6}{x - 1} = 5 \qquad \ln \text{ es biunívoco}$$

$$x + 6 = 5x - 5 \qquad \text{multiplicar por } x - 1$$

$$x = \tfrac{11}{4} \qquad \text{despejar } x$$

PRUEBA En función de que $\ln (x + 6)$ y $\ln (x - 1)$ están definidos en $x = \frac{11}{4}$ (son logaritmos de números reales positivos) y como nuestros pasos algebraicos son correctos, deducimos que $\frac{11}{4}$ es una solución de la ecuación dada.

EJEMPLO 6 *Desplazamiento de la gráfica de una ecuación logarítmica*

Traza la gráfica de $y = \log_3 (81x)$.

Solución La ecuación se puede reescribir así:

$$y = \log_3 (81x) \qquad \text{dado}$$

$$= \log_3 81 + \log_3 x \qquad \text{ley (1) de los logaritmos}$$

$$= \log_3 3^4 + \log_3 x \qquad 81 = 3^4$$

$$= 4 + \log_3 x \qquad \log_a a^x = x$$

Por lo tanto, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3 (81x)$ corriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ en la figura 19 cuatro unidades hacia arriba. Esto da el trazo de la figura 26.

EJEMPLO 7 *Trazo de gráficas de ecuaciones logarítmicas*

Traza la gráfica de la ecuación:

a) $y = \log_3 (x^2)$ **b)** $y = 2 \log_3 x$

www.elsolucionario.net

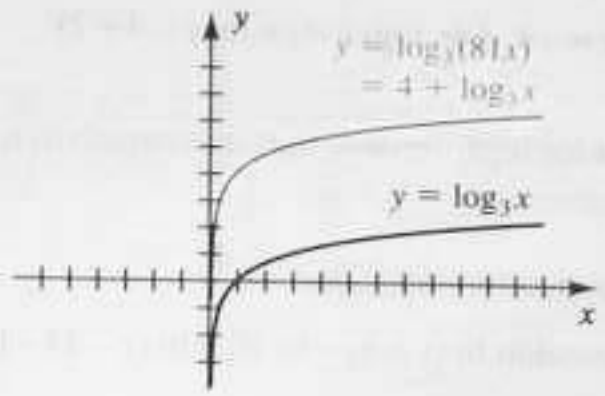


FIGURA 26

Solución **a)** Dado que $x^2 = |x|^2$, podemos reescribir la ecuación dada como

$$y = \log_3 |x|^2$$

Usamos una ley de logaritmos y tenemos

$$y = 2 \log_3 |x|.$$

Llegamos a la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ multiplicando por 2 las coordenadas y de puntos de la gráfica de $y = \log_3 |x|$ de la figura 20. Esto da la gráfica de la figura 27a).

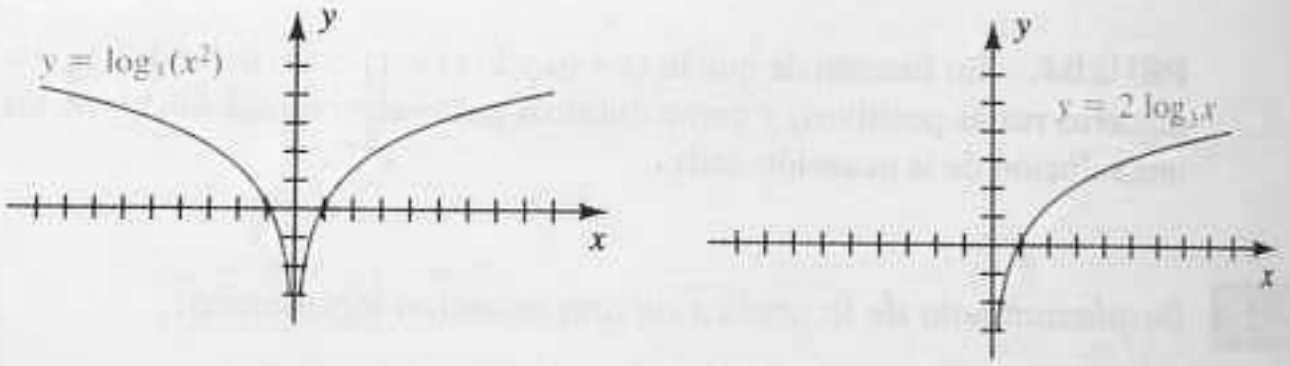


FIGURA 27

b) Si $y = 2 \log_3 x$ entonces x debe ser positiva; por lo tanto, la gráfica es idéntica a la parte de la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ de la figura 27a) que se encuentra a la derecha del eje y. Esto da la figura 27b).

EJEMPLO 8 *Relación entre el precio de venta y la demanda*

En economía, a menudo la demanda D de un producto está relacionada con su precio de venta p por una ecuación de la forma

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p,$$

donde a, c y k son constantes positivas.

a) Resuelve la ecuación para D.

b) ¿Cómo es que el aumento o disminución del precio de venta afecta la demanda?

www.elsolucionario.net

Solución

a)

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p \qquad \text{dados}$$

$$\log_a D = \log_a c - \log_a p^k \qquad \text{ley (3) de los logaritmos}$$

$$\log_a D = \log_a \frac{c}{p^k} \qquad \text{ley (2) de los logaritmos}$$

$$D = \frac{c}{p^k} \qquad \log_a \text{ es biunívoco}$$

b) Si el precio p aumenta, el denominador p^k en $D = c/p^k$ también lo hace y, por lo tanto, la demanda D disminuye. Si el precio baja, p^k disminuirá y la demanda D aumenta.

5.4 EJERCICIOS

Ejercicios 1 al 8: expresa en términos de logaritmos de x, y, z o w.

1. **a)** $\log_4 (xz)$ **b)** $\log_4 (y/z)$ **c)** $\log_4 \sqrt[3]{z}$
2. **a)** $\log_3 (xyz)$ **b)** $\log_3 (xz/y)$ **c)** $\log_3 \sqrt[5]{y}$
3. $\log_a \dfrac{x^3 w}{y^2 z^4}$
4. $\log_a \dfrac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$
5. $\log \dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$
6. $\log \dfrac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}}$
7. $\ln \sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5 z}}$
8. $\ln x \sqrt[3]{\dfrac{y^4}{z^5}}$

Ejercicios 9 al 16: escribe la expresión como un logaritmo.

9. **a)** $\log_3 x + \log_3 (5y)$ **b)** $\log_3 (2z) - \log_3 x$ **c)** $5 \log_3 y$
10. **a)** $\log_4 (3z) + \log_4 x$ **b)** $\log_4 x - \log_4 (7y)$ **c)** $\frac{1}{3} \log_4 w$
11. $2 \log_a x + \frac{1}{3} \log_a (x - 2) - 5 \log_a (2x + 3)$
12. $5 \log_a x - \frac{1}{2} \log_a (3x - 4) - 3 \log_a (5x + 1)$
13. $\log (x^3 y^2) - 2 \log x \sqrt[3]{y} - 3 \log \left(\dfrac{x}{y}\right)$
14. $2 \log \dfrac{y^3}{x} - 3 \log y + \dfrac{1}{2} \log x^4 y^2$
15. $\ln y^3 + \frac{1}{3} \ln (x^3 y^6) - 5 \ln y$
16. $\ln x - 4 \ln (1/y) - 3 \ln (xy)$

Ejercicios 17 al 32: resuelve la ecuación.

17. $\log_6 (2x - 3) = \log_6 12 - \log_6 3$
18. $\log_4 (3x + 2) = \log_4 5 + \log_4 3$
19. $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$
20. $3 \log_2 x = 2 \log_2 3$
21. $\log x - \log (x + 1) = 3 \log 4$
22. $\log (x + 2) - \log x = 2 \log 4$
23. $\ln (-4 - x) + \ln 3 = \ln (2 - x)$
24. $\ln x + \ln (x + 6) = \frac{1}{2} \ln 9$
25. $\log_2 (x + 7) + \log_2 x = 3$
26. $\log_6 (x + 5) + \log_6 x = 2$
27. $\log_3 (x + 3) + \log_3 (x + 5) = 1$
28. $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x - 4) = 2$
29. $\log (x + 3) = 1 - \log (x - 2)$
30. $\log (57x) = 2 + \log (x - 2)$
31. $\ln x = 1 - \ln (x + 2)$
32. $\ln x = 1 + \ln (x + 1)$

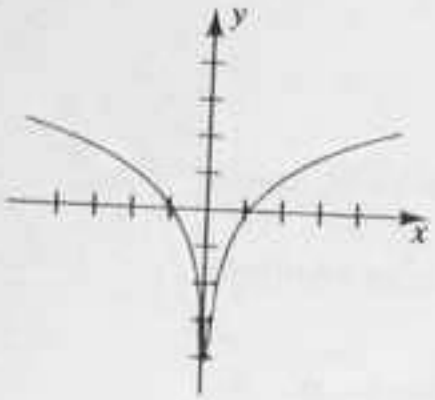
Ejercicios 33 al 44: traza la gráfica de f.

33. $f(x) = \log_3 (3x)$
34. $f(x) = \log_4 (16x)$
35. $f(x) = 3 \log_3 x$
36. $f(x) = \frac{1}{3} \log_3 x$
37. $f(x) = \log_3 (x^2)$
38. $f(x) = \log_2 (x^2)$
39. $f(x) = \log_2 (x^3)$
40. $f(x) = \log_3 (x^3)$
41. $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$
42. $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$
43. $f(x) = \log_3 \left(\dfrac{1}{x}\right)$
44. $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{1}{x}\right)$

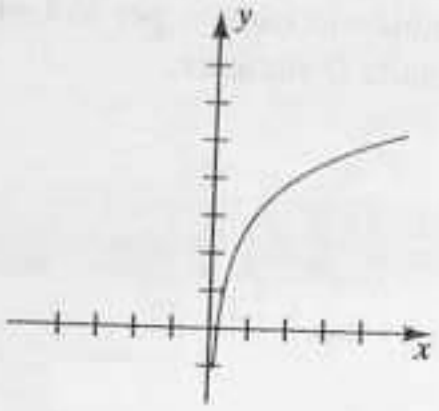
Ejercicios 45 al 48: en la figura se muestra la gráfica de una función f. Expresa $f(x)$ como un logaritmo con base 2.

www.elsolucionario.net

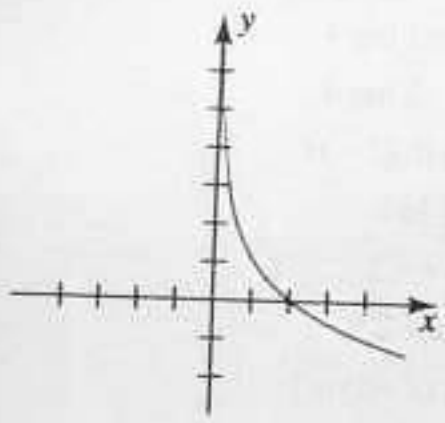
45.



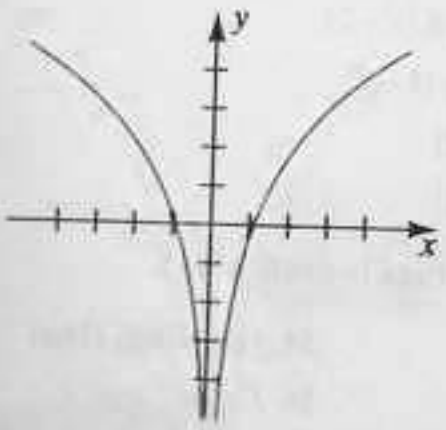
46.



47.



48.



49. Ley de Pareto La ley de Pareto para países capitalistas expresa que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyos ingresos rebasan x es

$$\log y = \log b - k \log x,$$

donde b y k son constantes positivas. Resuelve esta ecuación para y.

50. Precio y demanda Si p denota el precio de venta (en dólares) de un artículo y x es la demanda correspondiente (en número de piezas vendidas por día), la relación entre p y x estará dada a veces por $p = p_0 e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Expresa x como función de p.

51. Velocidad del viento Si v denota la velocidad del viento (en m/s) a una altura de z metros sobre el suelo, entonces, en ciertas condiciones, $v = c \ln (z/z_0)$, donde c es una constante positiva y z_0 es la altura a la que la velocidad es cero. Traza la gráfica de esta ecuación en un plano zv para $c = 0.5$ y $z_0 = 0.1$ m.

52. Eliminación de la contaminación Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha calculado que el nivel de contaminantes disminuiría según la fórmula $y = y_0 e^{-0.3821t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 es el nivel de contaminantes en que dejó de haber más contaminación. ¿Cuántos años tardaría en limpiarse el 50% de los contaminantes?

53. Reacción a un estímulo Denota con R la reacción de un sujeto a un estímulo de intensidad x. Hay muchas posibilidades para R y x. Si el estímulo x es la salinidad (en g de sal/l), R puede ser la estimación del sujeto de cuán salada está la solución, con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x está dada por la fórmula de Weber-Fechner $R(x) = a \log (x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 se denomina umbral del estímulo.

a) Encuentra $R(x_0)$.

b) Establece una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

54. Energía de un electrón La energía $E(x)$ de un electrón, tras de pasar por un material de espesor x, está dada por $E(x) = E_0 e^{-x/x_0}$, donde E_0 es la energía inicial y x_0 es la duración de la radiación.

a) Expresa, en términos de E_0, la energía de un electrón luego de atravesar un material de espesor x_0.

b) Indica, en términos de x_0, el espesor en que el electrón pierde 99% de su energía inicial.

55. Capa de ozono Un método para calcular el espesor de la capa de ozono consiste en usar la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx,$$

donde I_0 es la intensidad de longitud de onda particular de luz del Sol antes de que llegue a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar por una capa de ozono de x cm de espesor y k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda. Supón que para una longitud de onda de 3176×10^{-8} cm con $k \approx 0.39$, I_0/I se mide y da 1.12. Calcula el espesor de la capa de ozono al 0.01 de cm más cercano.

56. Capa de ozono Consulta el ejercicio 55. Calcula el porcentaje de decremento de la intensidad de luz con una longitud de onda de 3176×10^{-8} cm si la capa de ozono mide 0.24 cm de grueso.

www.elsolucionario.net

C **Ejercicios 57 y 58: grafica f en el mismo plano coordenado y calcula la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.**

57. $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

58. $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

C **Ejercicios 59 y 60: usa una gráfica para calcular las raíces de la ecuación en el intervalo.**

59. $e^{-x} - 2\log(1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

60. $2\log 2x - \log_3 x^2 = 0$; $(0, 3)$

C **Ejercicios 61 y 62: grafica f en el intervalo [0.2, 16]. a) Calcula los intervalos donde f sea creciente o decreciente b) calcula los valores máximo y mínimo de f en [0.2, 16].**

61. $f(x) = 2\log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

62. $f(x) = 1.1^{3x} + x - 1.35^x - \log x + 5$

C **Ejercicios 63 y 64: resuelve gráficamente la ecuación.**

63. $x \log x - \log x = 5$

64. $0.3e^x - \ln x = 4 \ln(x + 1)$

C **Ejercicios 65 y 66: el canto de algunas aves disminuye de intensidad (volumen sonoro) conforme avanza en la atmósfera; cuanto más alejado se encuentre un observador de un ave, el sonido será más débil. Esta disminución de intensidad sirve para calcular la distancia entre ambos mediante la distancia entre ambos mediante la fórmula:**

$$I = I_0 - 20\log d - kd \quad \text{siempre que} \quad 0 \leq I \leq I_0,$$

I_0 representa la intensidad (en decibeles) del canto a un metro de distancia (I_0 se suele conocer y por lo general depende del tipo de ave), I es la intensidad a una distancia d m del ave y k es una constante positiva que depende de condiciones atmosféricas como humedad y temperatura. Dadas I_0, I y k, estima gráficamente la distancia d entre el ave y el observador.

65. $I_0 = 70$, $I = 20$, $k = 0.076$

66. $I_0 = 60$, $I = 15$, $k = 0.11$

5.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección consideraremos varios tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas con sus aplicaciones.

Al resolver una ecuación donde aparecen expresiones con bases constantes y variables en el o los exponentes, a menudo *igualamos los logaritmos de ambos lados* de la ecuación. Con esto, las variables en el exponente se convierten en multiplicadores y la ecuación resultante es más fácil de resolver. Nos referimos a este paso como "tomar el logaritmo de ambos lados".

EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación exponencial*

Resuelve la ecuación $3^x = 21$.

Solución

$$3^x = 21 \qquad \text{dado}$$

$$\log(3^x) = \log 21 \qquad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$x \log 3 = \log 21 \qquad \text{ley (3) de los logaritmos}$$

$$x = \frac{\log 21}{\log 3} \qquad \text{dividir entre log 3}$$

También pudimos usar logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$

www.elsolucionario.net

Obtendremos la solución aproximada $x \approx 2.77$ con una calculadora. Una verificación parcial consiste en observar que como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$ debe estar entre 2 y 3, algo más cerca de 3 que de 2.

También pudimos resolver la ecuación del ejemplo 1 cambiando la forma exponencial $3^x = 21$ en logarítmica, como en la sección 5.3, y obtener

$$x = \log_3 21.$$

Ésta es la solución de la ecuación; sin embargo, dado que las calculadoras por lo general sólo tienen teclas para log y ln, no podemos calcular $\log_3 21$ directamente. El próximo teorema proporciona una sencilla *fórmula de cambio de base* para hallar $\log_b u$ si $u > 0$ y b es cualquier base logarítmica.

Teorema: fórmula de cambio de base

Si $u > 0$ y si a y b son números reales positivos diferentes de 1, entonces

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}.$$

PRUEBA Comenzamos con las ecuaciones equivalentes

$$w = \log_b u \quad \text{y} \quad b^w = u$$

y procedemos de esta forma:

$b^w = u$	dado
$\log_a b^w = \log_a u$	tomar $\log_a$ de ambos lados
$w \log_a b = \log_a u$	ley (3) de logaritmos
$w = \dfrac{\log_a u}{\log_a b}$	dividir entre $\log_a b$

Puesto que $w = \log_b u$, se obtiene la fórmula.

El siguiente caso especial de la fórmula del cambio de base se obtiene con $u = a$ y usar el hecho de que $\log_a a = 1$:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

La fórmula del cambio de base se confunde a veces con la ley (2) de logaritmos. El siguiente aviso precautorio puede recordarse por la frase "un cociente de logaritmos *no es* el logaritmo del cociente"

www.elsolucionario.net

Precaución

$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}; \qquad \frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a (u - b)$$

Los casos especiales de fórmula del cambio de base más usados son para $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales), según se expresa en seguida.

Fórmulas especiales para cambio de base

$$\textbf{(1)}\ \log_b u = \frac{\log_{10} u}{\log_{10} b} = \frac{\log u}{\log b} \qquad \textbf{(2)}\ \log_b u = \frac{\log_e u}{\log_e b} = \frac{\ln u}{\ln b}$$

A continuación retrabajamos el ejemplo 1 usando una fórmula para cambio de base.

EJEMPLO 2 *Uso de fórmula para cambio de base*

Resuelve la ecuación $3^x = 21$.

Solución Procedemos de esta manera:

$3^x = 21$ dado

$x = \log_3 21$ cambio a forma logaritmica

$= \dfrac{\log 21}{\log 3}$ fórmula especial de cambio de base 1

Otro método es usar una fórmula especial de cambio de base 2, con lo que llegaríamos a

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$

Los logaritmos con base 2 se utilizan en ciencias de la computación. El próximo ejemplo indica cómo hallarlos usando fórmulas de cambio de base.

EJEMPLO 3 *Calculo de un logaritmo con base 2*

Calcula $\log_2 5$ usando

a) Logaritmos comunes **b)** logaritmos naturales

Solución Con las fórmulas especiales de cambio de base 1 y 2 obtenemos:

a) $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2.322$

b) $\log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4 *Solución de una ecuación exponencial*

Resuelve la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.

Solución Podemos usar logaritmos comunes o naturales. Los primeros nos dan:

$$5^{2x+1} = 6^{x-2}$$ dado

$$\log (5^{2x+1}) = \log (6^{x-2})$$ tomar log de ambos lados

$$(2x+1)\log 5 = (x-2)\log 6$$ ley (3) de logaritmos

$$2x \log 5 + \log 5 = x \log 6 - 2 \log 6$$ multiplicar

$$2x \log 5 - x \log 6 = -\log 5 - 2 \log 6$$ poner todos los términos con x en un lado

$$x(\log 5^2 - \log 6) = -(\log 5 + \log 6^2)$$ factorizar y usar la ley (3) de logaritmos

$$x = -\frac{\log (5 \cdot 36)}{\log \frac{25}{6}}$$ despejar x y usar las leyes de logaritmos

Una aproximación es $x \approx -3.64$.

EJEMPLO 5 *Solución de una ecuación exponencial*

Resuelve la ecuación $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.

Solución

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$$ dado

$$5^x - 5^{-x} = 6$$ multiplicar por 2

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6$$ definición de exponente negativo

$$5^x (5^x) - \frac{1}{5^x}(5^x) = 6(5^x)$$ multiplicar por mcd 5^x

$$5^{2x} - 6(5^x) - 1 = 0$$ simplificar y restar $6(5^x)$

Reconocemos que esta forma de la ecuación es cuadrática en 5^x y procedemos de esta forma:

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0$$ ley de los exponentes

$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36+4}}{2}$$ fórmula cuadrática

$$5^x = 3 \pm \sqrt{10}$$ simplificar

www.elsolucionario.net

$$5^x = 3 + \sqrt{10} \qquad 5^x > 0, \text{ pero } 3 - \sqrt{10} < 0$$

$$\log 5^x = \log(3 + \sqrt{10}) \qquad \text{tomar log de ambos lados}$$

$$x \log 5 = \log(3 + \sqrt{10}) \qquad \text{ley (3) de los logaritmos}$$

$$x = \frac{\log (3 + \sqrt{10})}{\log 5} \qquad \text{dividir entre log 5}$$

Una aproximación es $x \approx 1.13$.

EJEMPLO 6 *Penetración de la luz en el mar*

La ley de Beer-Lambert expresa que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en el mar está dada por $I = I_0\, c^x$, donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

a) Despeja x mediante logaritmos comunes.

b) Si $c = \frac{1}{4}$, calcula la profundidad a la que $I = 0.01\ I_0$ (esto determina la zona donde puede tener lugar la fotosíntesis).

Solución

a)

$$I = I_0\, c^x \qquad \text{dado}$$

$$\frac{I}{I_0} = c^x \qquad \text{aislar la expresión exponencial}$$

$$x = \log_c \frac{I}{I_0} \qquad \text{cambiar a forma logarítmica}$$

$$= \frac{\log (I/I_0)}{\log c} \qquad \text{fórmula especial de cambio de base (1)}$$

b) Con $I = 0.01\ I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x de la parte a), tenemos

$$x = \frac{\log (0.01\ I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log (0.01)}{\log 1 - \log 4} = \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} = \frac{-2}{-\log 4} = \frac{2}{\log 4}.$$

Una aproximación es $x \approx 3.32$ m.

EJEMPLO 7 *Comparación de intensidades luminosas*

Si un haz de luz con intensidad I_0 se proyecta verticalmente hacia abajo en el agua, su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = I_0\, e^{-1.4x}$ (ve la Fig. 28). ¿A qué profundidad tendrá la mitad de su valor en la superficie?

Solución En la superficie, $x = 0$ y la intensidad es

$$I(0) = I_0 e^0 = I_0.$$

www.elsolucionario.net

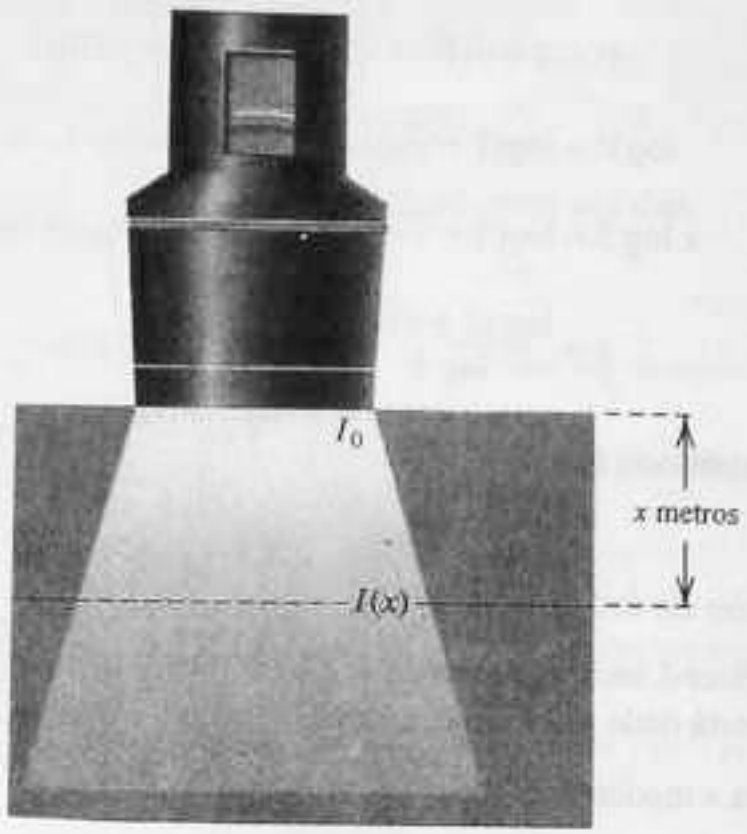


FIGURA 28

Deseamos hallar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Esto lleva a:

$$I(x) = \tfrac{1}{2}I_0 \qquad \text{intensidad deseada}$$

$$I_0 e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2} I_0 \qquad \text{fórmula para } I(x)$$

$$e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{dividir entre } I_0 \ (I_0 \neq 3)$$

$$-1.4x = \ln \tfrac{1}{2} \qquad \text{cambiar a forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1.4} \qquad \text{dividir entre } -1.4$$

Una aproximación es $x \approx 0.495$ m.

EJEMPLO 8 *Una curva logística*

Una **curva logística** es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}},$$

donde k, b y c son constantes positivas. Dichas curvas son útiles para describir una población y que crece rápidamente al principio, pero cuya tasa de crecimiento decrece después que x alcanza cierto valor. En un famoso estudio del crecimiento de protozoarios hecho por Gause, se encontró que una población de *Paramecium caudata* se podía describir mediante una ecuación logística con $c = 1.1244$, $k = 105$ y x el tiempo en días.

www.elsolucionario.net

a) Encuentra b si la población inicial era de tres protozoarios.

b) En el estudio, la tasa máxima de crecimiento tuvo lugar en $y = 52$. ¿En qué momento x ocurrió esto?

c) Demuestra que, tras un largo periodo, la población descrita por cualquier curva logística se aproxima a la constante k.

Solución **a)** Con $c = 1.1244$ y $k = 105$ en la ecuación logística, tenemos

$$y = \frac{105}{1 + be^{-1.1244x}}.$$

Ahora procedemos de este modo

$$3 = \frac{105}{1 + be^0} = \frac{105}{1 + b} \qquad y = 3 \text{ cuando } x = 0$$

$$1 + b = 35 \qquad \text{multiplicar por } \frac{1 + b}{3}$$

$$b = 34 \qquad \text{despejar } b$$

b) Puesto que $b = 34$ llegamos a:

$$52 = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}} \qquad \text{sea } y = 52 \text{ en la parte a)}$$

$$1 + 34e^{-1.1244x} = \frac{105}{52} \qquad \text{multiplicar por } \frac{1 + 34e^{-1.1244x}}{52}$$

$$e^{-1.1244x} = \left(\frac{105}{52} - 1\right) \cdot \frac{1}{34} = \frac{53}{1768} \qquad \text{aislar } e^{-1.1244x}$$

$$-1.1244x = \ln \frac{53}{1768} \qquad \text{cambiar a forma logaritmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{53}{1768}}{-1.1244} \approx 3.12 \text{ días} \qquad \text{dividir entre } -1.1244$$

c) Dado que $x \to \infty$, $e^{-cx} \to 0$; por lo tanto,

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}} \to \frac{k}{1 + b \cdot 0} = k.$$

En el ejemplo que viene graficamos una ecuación obtenida en la parte a) del ejemplo anterior.

EJEMPLO 9 *Trazo de la gráfica de una curva logística*

Grafica la curva logística dada por

$$y = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}},$$

y calcula el valor de x para $y = 52$.

www.elsolucionario.net

Solución Comenzamos por asignar

$$\frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

a Y_1 y 52 a Y_2. Como el tiempo x es no negativo, escogemos Xmin = 0. Seleccionamos Xmax = 10 para incluir el valor de x encontrado en la parte b) del ejemplo 8. Por la parte c), sabemos que el valor de y no puede rebasar 105; por lo tanto, elegimos Ymín = 0 y Ymáx = 105 y obtenemos una imagen similar a la figura 29.

Con las funciones intersect o zoom, vemos que para $y = 52$, el valor de x es de alrededor de 3.12, lo que concuerda con la aproximación encontrada en b) del ejemplo 8.

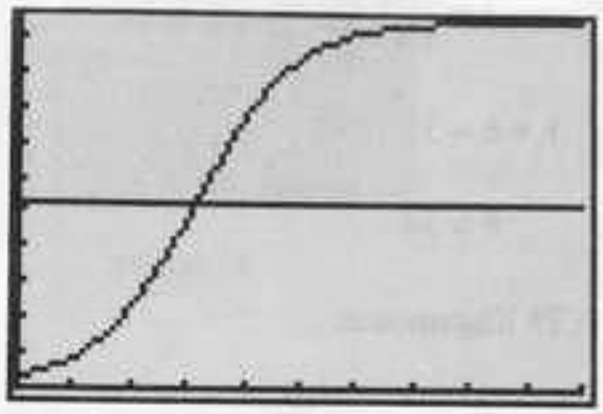


FIGURA 29 [0, 10] por [0, 105]

El ejemplo adjunto presenta la forma en que un cambio de fórmula de base hace posible la gráfica de funciones logarítmica con bases diferentes de 10 y de e en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 10 *Cálculo de puntos de intersección de gráficas logarítmicas*

Calcula el punto de intersección de las gráficas de

$$f(x) = \log_3 x \quad \text{y} \quad g(x) = \log_6 (x + 2).$$

Solución En su mayor parte, estos dispositivos están equipados para trabajar sólo con funciones logarítmicas comunes y naturales; por lo tanto, primero usamos una fórmula de cambio de base para reescribir f y g como

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\ln (x + 2)}{\ln 6}.$$

En seguida asignamos $(\ln x)/\ln 3$ y $(\ln(x + 2))/\ln 6$ a Y_1 y Y_2, respectivamente. Después de graficar Y_1 y Y_2 con una pantalla estándar, vemos que hay un punto de intersección en el primer cuadrante con $2 < x < 3$. Con las funciones de intersect o zoom, encontramos que el punto de intersección es aproximadamente (2.52, 0.84).

www.elsolucionario.net